随机极限引论

朱成熹 著

南开大学出版社

随机极限引论

朱 成 熹 著

南开大学出版社

随 机 极 限 引 论

朱 成 熹 著

南开大学出版社出版
（天津八里台南开大学校内）
新华书店天津发行所发行
天津市大邱庄印刷厂印刷

1987年10月第1版 1987年10月第1次印刷
开本：850×1168 1/32 印张：17.625 插页4
字数：437千 印数：1—2，500
ISBN7—310—00083—8／O·14
统一书号：13301·33 定价：3.70元

内容简介

本书是目前国内第一本较系统地讲述随机极限理论方面的专著。内容主要包括独立随机变数列，马尔柯夫过程，平稳序列等的0—1律，级数的收敛性，稳定性诸方面的“强极限”基本理论和近代一些新成果以及独立随机系列之和的“弱极限”理论。读者只要了解概率论与测度论的基本知识便能阅读本书。为使读者对本书内容加深理解以及选作教材之用，在各章后面都附有适量习题。

读者对象为高校的概率论专业方面的教师、高年级大学生和研究生、以及有关专业的科技工作者。

序

概率论的任务是研究大量随机现象的统计规律，所谓“大量”，用数学语言来说，就是当对随机现象的观测次数趋向无穷时，它的“极限”呈现出的某种规律性。因此，极限理论在概率论中占有重要地位，苏联数学家格涅坚科（Гнеденко Б. В.）和柯尔莫戈洛夫（Колмогоров А. Н.）曾说“……概率论在认识论上的价值只能通过极限定理而显示出来”。概率论的真正历史，是从1713年贝努力（Bernoulli.J）的大数定律开始的，自此概率论的研究中心之一就是“极限”理论。特别近几十年来极限理论的发展更为迅速，它不论在理论上或实际应用上都有重大意义。因此，我校开设概率论专门课，二十多年来一直把随机过程（特别是独立随机变数和）的“极限”理论作为有关方向（随机过程论，信息论，数理统计等）的必修课。著者以二十年来的教学实践，结合“极限”理论的不断发展，对讲义经过多次修改和补充，逐步写成此书。

本书力图作到深入浅出且条理清晰，尽量避免使用更高深的数学知识，读者只需学过高等数学和一般概率论常识，并具有测度论的基础知识[1*]，就能较顺利地阅读此书。标有星号（*）的章节在初次阅读时都可略去，待必要时再补看。

胡国定教授在六十年代初期讲此课的教学笔记，对作者讲课和编写讲义给了很大帮助，王梓坤教授对此书的写作给予了热情的支持和关怀，在此作者向两位教授表示衷心的感谢。

由于作者水平所限，书中一定会有不少的错误和缺点，恳请批评指正。

1983.8.

导　言

概率论发源于十七世纪中叶，它是与惠更斯、巴斯加尔、费尔马及雅谷·贝努力(Bernoulli.J)诸人的工作分不开的。由于赌徒们所提的一些当时还未归入数学范围的问题，引起了巴斯加尔和费尔马(1654年)的通信讨论，逐渐结晶出了象概率及数学期望等重要概念。同时这几位杰出的学者当时也已料到概率论这门研究或然现象的科学将起重要的自然哲学作用。他们相信在大量或然事件的基础上能发生明确的规律性。可是由于当时自然科学发展水平不高，所以在相当长时期内，赌博成为建立概率论概念和方法所凭借的唯一具体背景，同时它们采用的数学工具也只不过是初等数学和排列组合法。这些只可以看作是概率论的史前理论。概率论的真正历史始于贝努力（〔假设的艺术〕，1713）的大数定律及模阿夫（De Moivre，1730）证明的$p=q=\frac{1}{2}$的中心极限定理，模阿夫结果的基本意义被拉普拉斯（Laplace，1812）完全给予阐明（对任意$0<p<1$）。接着贝努力及模阿夫—拉普拉斯极限定理直到切别谢夫（Чебышев）的工作以前，作为概率论的基本成就，那就是普哇松（Poisson）的三个极限定理，其中之一推广了贝努力定理，另一个推广了模阿夫—拉普拉斯定理，而第三个引导出所谓普哇松分布律。上述五个极限定理用近代的术语可陈述如下：

设A_1，A_2，…，A_n，…是相互独立的随机事件列，它们发生的概率记为

$$p_n=P(A_n) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

在前n个事件

$$A_1,A_2\cdots,A_n$$

里发生的个数，以μ_n表之。

1) **贝努力定理** 如果 $p_n \equiv p(n=1,2,3\cdots)$ 且 $0<p<1$，则对任给的 $\varepsilon>0$，当 $n\to\infty$ 时都有下式成立

$$P\left(\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}\right)\to 0$$

2) **棣阿夫—拉普拉斯定理** 如果 $p_n\equiv p$（$n=1,2,\cdots$）且 $0<p<1$。则当 $n\to\infty$ 时对于 $-\infty<z_1<z_2<\infty$ 一致地有

$$P\left(\left\{z_1<\frac{\mu_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}<z_2\right\}\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2}e^{-z^2/2}dz$$

3) **普哇松的大数法则** 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n(1-p_n)<\infty$$

则对任给 $\varepsilon>0$，当 $n\to\infty$ 时都有

$$P\left(\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{a_n}{n}\right|>\varepsilon\right\}\right)\to 0$$

其中 $a_n=p_1+p_2+\cdots+p_n$。

4) **普哇松型的基本极限定理** 当 $n\to\infty$ 时，对于 $-\infty<z_1<z_2<+\infty$ 一致地有

$$P\left(\left\{z_1<\frac{\mu_n-a_n}{b_n}<z_2\right\}\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2}e^{-z^2/2}dz$$

其中 $b_n^2=p_1(1-p_1)+p_2(1-p_2)+\cdots+p_n(1-p_n)$。

以上考虑的是一个独立随机事件列 $\{A_n\}$ 的前 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 里发生事件个数的“极限”问题。它可以视为一个独立事件系列：

A_1，A_2

A_1，A_2，A_3

… … …

A_1，$A_2\cdots$，A_n

… … … … …

第 n 列里发生事件个数的“极限”问题。普哇松进一步考虑了更

一般的事件系列：

$$\begin{array}{llll} A_{11} & & & \\ A_{21}, & A_{22} & & \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \cdots, & A_{nn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

并假定在每一列里，所有事件都是相互独立且它们的概率都是相等的，即对每个$n=1, 2, 3, \cdots$ 都有

$p_{nk}=P(A_{nk}) \equiv p_n \quad (k=1, 2, \cdots, n)$

$A_{n1}, A_{n2}, \cdots, A_{nn}$ 相互独立

仍令μ_n表第n 列事件$A_{n1}, A_{n2}, \cdots A_{nn}$里发生的事件个数。

5) **小概率事件的普哇松极限定理** 如果当$n\to\infty$时$np_n\to\alpha$，则当$n\to\infty$时

$$P(\{\mu_n=m\})\to\frac{\alpha^m}{m!}e^{-\alpha}$$

其中α是正的实数，$m=0, 1, 2, \cdots$。

如所周知，若定义随机变数

$$\chi_A=\begin{cases}1 & \text{事件}A\text{发生}\\ 0 & \text{事件}A\text{不发生}\end{cases}$$

于是我们可以把定理1）—4）中的μ_n表为

$$\mu_n=\chi_{A_1}+\chi_{A_2}+\cdots+\chi_{A_n}$$

同样，定理5）中的μ_n可表为

$$\mu_n=\chi_{A_{n1}}+\chi_{A_{n2}}+\cdots+\chi_{A_{nn}}$$

显然，事件$A_{n1}, A_{n2}, \cdots, A_{nn}$的相互独立性是等价于随机变数$\chi_{A_{n1}},\chi_{A_{n2}},\cdots,\chi_{A_{nn}}$的相互独立性的。这样一来，上述的

五个定理只不过是相互独立随机变数系列和的极限定理的特殊情形。

此后的工作一直围绕着解决下面两个较一般的所谓古典极限问题而进行的。给定一列相互独立的随机变数列

$X_1, X_2, \cdots X_n, \cdots$

它们具有有穷的数学期望及方差，对每个$n \geqslant 1$，

$$a_n = EX_n \qquad b_n^2 = D(X_n)$$

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$B_n = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots b_n^2}$$

第一个问题 在什么条件下，大数法则成立？亦即对任给$\varepsilon > 0$，当$n \to \infty$时有

$$P\left(\left\{\left|\frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{A_n}{n}\right| > \varepsilon\right\}\right) \to 0?$$

第二个问题 在什么条件下中心极限定理能成立？亦即当$n \to \infty$时，对于z一致地有

$$P\left(\left\{\frac{S_n - A_n}{B_n} < z\right\}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\,du?$$

十九世纪中叶，切别谢夫的古典工作是概率论发展过程中新纪元的开端，他所创立的方法（1867年）应用到第一个问题上所得到的条件是

$$B_n = 0(n^2)$$

这个条件首先为马尔科夫所指出，因此，常被称为马尔科夫条件。

解第二个问题时，出现了很大困难。针对此问题，切别谢夫创立了矩法，后来李亚普洛夫（Liapounoff）在本世纪头两年用特征函数的方法在较普遍的条件下解决了第二个问题。大约在本

世纪1926－1950这些年代中，这个古典极限问题（作为一般中心极限问题的特殊情形）才获得其精确陈述和彻底解决。恰恰是在这个特殊问题得到它的定型的答案的同时，出现了远为一般的独立随机系列的中心极限问题，并且几乎是立刻就获得了解决。这主要是借助于强有力的特征函数的工具以及截尾法，对称化法，中心化法等，其主要内容我们将在后四章中讨论。近年来对各类随机系列（或过程）的泛函的极限分布也有一些研究，我们将在最后一章作些简单的介绍。

在本世纪三十年代，苏联数学家柯尔莫戈洛夫等人建立了概率论的公理系[54d]，从而把当时还不严格的概率论与发展比较成熟的测度论密切地联系了起来，使概率论真正成为数学的一个分支，它们的一些主要概念之间的类比关系如下：

概　率　论	**测　度　论**[1a]
基本事件全体Ω	空间Ω
随机事件体$\mathscr{A}$	空间Ω上的σ域$\mathscr{A}$
随机事件A	可测空间（Ω，$\mathscr{A}$）的可测集A
概率P	测度P（$P(\Omega)=1$）
概率空间（$\Omega,\mathscr{A},P$）	测度空间（$\Omega,\mathscr{A},P$）且$P(\Omega)=1$
必然事件A	$P(A)=1$的可测集A
不可能事件A	$P(A)=0$的可测集A
随机变数X	几乎处处（a.e.[P]）有限可测函数X
数学期望EX	X的积分$\int_\Omega XdP$
$\{X_n: n\geqslant 1\}$“收敛”于X	
概率收敛	测度收敛$X_n \xrightarrow{P} X$
强收敛	几乎处处收敛$X_n \xrightarrow{a.e.[P]} X$

弱收敛　　　　　　　　按分布收敛$X_n \xrightarrow{d \cdot f} X$

从测度论中得知

$$X_n \xrightarrow{a.e.[P]} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{d.f} X$$

并且当$X=a$，a.e.〔P〕（a是常数）则

$$X_n \xrightarrow{P} X \Longleftrightarrow X_n \xrightarrow{d.f} X$$

因此，前述古典极限问题，实 际 上是弱收敛于退化律（$X=0$，a.e.〔P〕）与正态律$\mathbf{N}(0, 1)$ 的“弱极限”问题。

从以上类比中发现，除了上述“弱极限”问题以外，还有一类更强的所谓“强极限”问题。于是有许多数学家都热心于这个方面的研究，最早的一些结果是在独立随机变数列的零壹律，强大数律及级数的强收敛等方面得到的，近年来对于各类随机过程的极限问题也有不少研究。这些内容我们将在前三章中予以扼要的介绍。由于篇幅的关系，一类较重要的 情 形 “軼的 极 限” 问题．只好割爱了。有兴趣的读者可参看〔82〕及〔22〕等文献。

目 录

导 言

第一章 随机过程的 0—1 律

习题

第二章 随机变数和的强收敛性规律

习题

第三章 随机变数和的强稳定性规律

习题

第四章 特征函数与分布律

第一章　随机过程的 0—1 律

§1.1　独立性定义及其基本性质

设（Ω, $\mathscr{A}$, P）是概率空间；T是参数集，一般常取

$T_1 = \{1, 2, \cdots, n\}$　　$T_2 = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$

$T_3 = [a, b]$　$(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$ 等等。

若$X(\omega)$ 是（Ω, $\mathscr{A}$, P）上的几乎处处（简记为a.e.[P]）有限可测函数，则称$X(\omega)$ 为（Ω, $\mathscr{A}$, P）上的随机变数，简记为r.v.X。

$\mathscr{A}$中的元素称为（Ω, $\mathscr{A}$, P）上的随机事件，常简称为事件，事件的集合称为事件类。

若对每个$t\in T$，$X_t(\omega)$ 都是（Ω, $\mathscr{A}$, P）上的随机变数，当$T=T_1$时，把$X^{T_1}=\{X_t(\omega): t\in T_1\}=\{X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)\}$称为n维随机矢量；当$T=T_2$或$T_3$时，把$X^T(\omega)=\{X_t(\omega): t\in T\}$称为随机过程；对一般的T，称$X^T$为随机变数族。

若对每个$t\in T$，A_t与$\mathscr{C}_t$分别是事件与事件类，则$\{A_t: t\in T\}$与$\{\mathscr{C}_t: t\in T\}$分别称为事件族与事件类族。

今后若不另加申明，我们都在固定的概率空间（Ω, $\mathscr{A}$, P）上考虑问题。以$\mathscr{B}$表一维空间$R=(-\infty,\infty)$上的波勒尔（Borel）集类；以 $(R^T, \mathscr{B}^T) = (\prod_{t\in T} R_t, \prod_{t\in T}\mathscr{B}_t)$ 表 $(R_t, \mathscr{B}_t) = (R, \mathscr{B})$ $(t\in T)$的乘积可测空间；以$\mathscr{F}\{X_t: t\in T\}$表$(X^T)^{-1}$

$(\prod_{t\in T}\mathscr{B}_t)$ σ域；以χ_A表集A的示性函数，即

$$\chi_A(\omega)=\begin{cases}0 & \omega\bar{\in} A\\ 1 & \omega\in A\end{cases}$$

以a.e.〔P〕表对概率P几乎处处。

定义1.1 (i) 称事件族$\{A_t:t\in T\}$是相互独立的，如果对任意有限集$T_n=\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}\subset T$都有

$$P(\bigcap_{k=1}^{n}A_{t_k})=\prod_{k=1}^{n}P(A_{t_k}) \qquad (1.1)$$

(ii) 称事件类族$\{\mathscr{C}_t:t\in T\}$是相互独立的，如果对任意$A_t\in\mathscr{C}_t$ $(t\in T)$，事件族$\{A_t:t\in T\}$都是相互独立的；

(iii) 称随机变数族$X^T(\omega)=\{X_t(\omega):t\in T\}$是相互独立的，如果σ域族$\{X_t^{-1}(\mathscr{B}):t\in T\}$是相互独立的；

(iv) 称X^T与$Y^{T'}$是相互独立的，如果σ域$(X^T)^{-1}(\prod_{t\in T}\mathscr{B}_t)$与$(Y^{T'})^{-1}(\prod_{t\in T'}\mathscr{B}_t)$相互独立，亦即σ域$\mathscr{F}\{X_t:t\in T\}$与$\mathscr{F}\{Y_t:t\in T'\}$相互独立。

（为简便起见，有时常省略"相互"二字，简言之为独立）。

由定义易证独立性有如下基本性质：

性质1 若事件类族$\{\mathscr{C}_t:t\in T\}$是相互独立的，并且对每个$t\in T$有$\mathscr{C}'_t\subset\mathscr{C}_t$，则事件类族$\{\mathscr{C}'_t:t\in T\}$是相互独立的。

性质2 设对每个$t\in T$及$T_t=\{1,2,\cdots,n_t\}$，$g_t(x_1,x_2,\cdots,x_{n_t})$都是$n_t$维有限波勒尔（Borel）可测函数，$Y_t(\omega)=g_t(X^{T_t}(\omega))$。若$\{X^{T_t}:t\in T\}$相互独立，则$\{Y_t:t\in T\}$也相互独立。

证 由逆像的基本性质及g_t是n_t维波勒尔可测函数可得。对每个$t\in T$有[1a]

$$\overset{-1}{g_t}(\mathscr{B}) \subset \prod_{u \in T_t} \mathscr{B}_u$$

$$\overset{-1}{Y_t}(\mathscr{B}) = [g_t(X^{T_t})]^{-1}(\mathscr{B})$$

$$= (X^{T_t})^{-1}(\overset{-1}{g_t}(\mathscr{B})) \subset (X^{T_t})^{-1}(\prod_{u \in T_t} \mathscr{B}_u) \qquad (1.2)$$

另一方面，由$\{X^{T_t}: t \in T\}$相互独立，故$\{(X^{T_t})^{-1}(\prod_{u \in T_t} \mathscr{B}_u): t \in T\}$相互独立，根据（1.2）及性质1知，$\{\overset{-1}{Y_t}(\mathscr{B}): t \in T\}$相互独立，即$\{Y_t: t \in T\}$相互独立。

例1 设$\{X_1, X_2\}$与$\{X_3, X_4, X_5\}$独立，由性质2知$Y_1 = X_1 + X_2$与$Y_2 = \mathrm{Cos}(X_3 + X_4)/(1 + X_5^2)$独立。

性质3 事件类族$\{\mathscr{C}_t: t \in T\}$相互独立的充要条件是对任意有限集$T_n = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\} \subset T$，都有$\{\mathscr{C}_t: t \in T_n\}$相互独立。

性质4 若事件A有$P(A) = 0$或1，则对任意事件B都有A与B独立。

证 当$P(A) = 0$时，由

$$0 \leqslant P(AB) \leqslant P(A) = 0$$

可得 $P(AB) = 0 = P(A)P(B)$

当$P(A) = 1$时，则$P(A^c) = 0$，由

$$0 \leqslant P(A^cB) \leqslant P(A^c) = 0$$

故 $P(A^cB) = 0$，从而

$$P(AB) = P(B) - P(A^cB) = P(B)$$
$$= P(B)P(A)$$

由定义1.1知A与B独立。

性质5 事件A与A独立的充要条件是

$P(A) = 0$或1。

证 充分性可由性质4得到。若A与A独立，则

$$P(A)=P(A\cap A)=P(A)P(A)$$

故 $P(A)(1-P(A))=0$

所以 $P(A)=0$或1，这就证明了必要性成立

对于$(\Omega,\mathscr{A},P)$上任一子σ域$\mathscr{A}'$我们把下面σ域

$$\overline{\mathscr{A}'}=\{A':A'\in\mathscr{A}且存在A\in\mathscr{A}'使得P(A'\triangle A)=0\}$$

称为$\mathscr{A}'$关于$(\Omega,\mathscr{A},P)$的完全化σ域。其中$A\triangle A'=A-A'+A'-A$是A与A'的对称差。

注意这里定义的完全化与测度论〔1a〕中完全化的定义有区别，在这里$\overline{\mathscr{A}'}$中不包含那些不属于$\mathscr{A}$的P零测集的子集。本书中若不另加申明，我们都限定取这种意义下的完全化定义。

定理1·1 设$(\Omega,\mathscr{A},P)$上事件类族$\{\mathscr{C}_t:t\in T\}$是相互独立的，并且对每一个$\mathscr{C}_t(t\in T)$都是π类，则$\{\sigma(\mathscr{C}_t):t\in T\}$必是相互独立的。进而还有$\{\overline{\sigma(\mathscr{C}_t)}:t\in T\}$也是相互独立的。其中$\sigma(\mathscr{C}_t)$是$\mathscr{C}_t$产生的最小σ域。

证 由性质3只须证对任意给定的有限集$T_n=\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}\subset T$都有

$$\overline{\sigma(\mathscr{C}_{t_1})},\ \overline{\sigma(\mathscr{C}_{t_2})},\ \cdots,\ \overline{\sigma(\mathscr{C}_{t_n})}$$

相互独立即可。为此分三步进行：

(i) 先证对任意给定的$k(1\leqslant k\leqslant n)$，$\{\mathscr{C}_{t_1},\mathscr{C}_{t_2},\cdots,\mathscr{C}_{t_{k-1}},\sigma(\mathscr{C}_{t_k}),\mathscr{C}_{t_{k+1}},\cdots,\mathscr{C}_{t_n}\}$相互独立。

为此利用λ-π类方法证之〔1a〕：令

$$\mathscr{F}_{t_k}=\{A:A\in\mathscr{A}且下述事件类族相互独立$$

$$\{\{A\},\mathscr{C}_{t_1}\cdots,\mathscr{C}_{t_{k-1}},\mathscr{C}_{t_{k+1}},\cdots,\mathscr{C}_{t_n}\}\}$$