

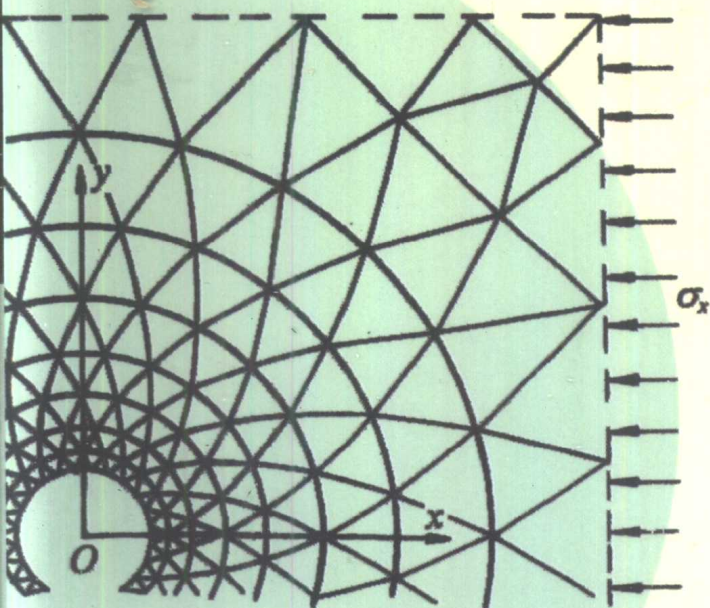
JIEGOU YOUXIANYUAN FENXI

高等学校教材

结构有限元

分析

兰州铁道学院 吴鸿庆 任侠 编



中国铁道出版社

铁道科技图书出版基金资助出版

高等学校教材  
结构有限元分析

兰州铁道学院 吴鸿庆 任侠 编

中国铁道出版社

2000年·北京

(京)新登字 063 号

### 内 容 简 介

本书系统介绍了结构有限元分析的基本原理。主要内容包括杆系结构、弹性力学问题和薄板弯曲问题的有限元法。在重点阐述有限元法基本概念的同时,对有关的数值算法和计算程序也作了详细介绍,并对一些重要过程和算法给出了详细的计算框图和相应的子程序,同时给出了具有多种功能、可供实际结构分析使用的用 FORTRAN 77 编写的空间杆系结构静力分析程序。

本书可作为高等院校土建类专业高年级大学生和一年级研究生的教材及教学参考书,也可供从事结构分析计算的工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

结构有限元分析/吴鸿庆,任侠编. —北京:中国铁道出版社,2000.9  
高等学校教材  
ISBN 7-113-03873-5

I. 结… II. ①吴… ②任… III. 结构分析:有限元分析-高等学校-教材  
IV. O241.82

书 名: 结构有限元分析

作 者: 吴鸿庆 任侠

出版发行: 中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)

责任编辑: 李丽娟

封面设计: 马 利

印 刷: 北京市彩桥印刷厂

开 本: 787×1092 1/16 印张: 27.25 字数: 680 千

版 本: 2000年9月第1版 2000年9月第1次印刷

印 数: 1~2000册

书 号: ISBN 7-113-03873-5/O·82

定 价: 36.30元

版权所有 盗印必究

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换。

# 前 言

随着电子数字计算机的出现而迅速发展起来的有限元方法,已使结构分析所能处理问题的规模和深度进入了一个崭新的发展阶段。目前,以有限元方法为核心的大型通用结构分析程序系统已经得到广泛应用,并且成为结构设计自动化的有力工具。

国内外已有不少关于有限元分析包括结构有限元分析的优秀专著。但我们根据近 20 年来为土建类高年级大学生和一年级研究生讲授结构有限元方法的教学实践,深感仍有必要编写一本适合初学者的结构有限元分析的书籍,详细介绍有关的基本概念、基本算法以及编制计算程序的基本知识,以便使初学者切实掌握结构有限元分析的基本方法并能在计算机上予以实现,解决实际工程结构分析问题。

本书共分十章。第一章从统一的观点介绍了杆系结构有限元的基本概念。第二章和第三章分别介绍了刚度矩阵的存储和组集以及求解线性代数方程组的等带宽高斯消元法和一维压缩存储下的  $LDL^T$  分解算法,由于这两章的内容是使初学者从传统手算方法过渡到计算机算法的关键和难点所在,故而用较多篇幅作了详细阐述。第四章介绍了杆系结构静力分析计算程序的基本结构和编制方法,给出了两个完整的用 Fortran 77 编写的计算程序,其中 FRAME2 是一个简单的平面杆系结构静力分析程序,供高年级大学生学习使用;另一个是具有自由格式输入、结点和单元自动生成以及处理一般主从自由度关系等多种功能,可用于实际工程结构分析的空间杆系结构静力分析程序 FRAME3,供研究生学习使用。第五章介绍了曲梁单元主、从自由度概念及其应用,以及斜约束处理方法等杆系结构分析中的一些常见问题。第六章介绍杆系结构动力分析问题的有限元法,并介绍了按抗震设计反应谱计算结构地震反应的方法。第七章介绍了动力分析中特征值问题的基本概念和某些常用算法,主要是矢量逆迭代法和子空间迭代法。第八章介绍了弹性力学问题有限元法的基本概念。第九章重点介绍了用于求解弹性力学平面问题和空间问题的等参数单元,并介绍了分片试验和无限元的基本概念。第十章重点介绍弹性薄板弯曲问题的有限元法,并介绍了用于求解弹性薄壳问题的平板单元。

由于杆系结构是一类最为常用的结构,并考虑到土建专业高年级大学生以及刚入学的一年级研究生多数均未学习过弹性力学,所以本书前七章均限于杆系结构问题。根据我们的教学实践,这样安排有利于初学者理解和掌握结构有限元分析的基本概念和方法。由于杆系结构有限元方法也是对离散化后的一般有限元系统进行分析的典型方法,因此,本书前七章的内容不仅是学习连续体有限元法的导引,而且其中许多内容直接或略加扩充后即可用于连续体有限元分析。

有限元方法是力学、计算数学和现代计算技术相结合的产物,是一种求解微分方程边值问题和初值问题的强有力的数值方法。有限元法的内容及其应用领域都是极为广泛的。本书仅限于介绍它的一个非常小的然而也是最为常用最为基本的部分,即基于位移法的线性结构分析的有限元方法。我们希望本书能为读者进入有限元方法这一广阔领域提供一个

坚实的基础。

本书是在编者作为兰州铁道学院土木工程系高年级学生和一年级研究生讲授结构有限元分析课程时所用自编讲义的基础上编写而成。在编写时我们力求做到概念明确，说理透彻，由浅入深，循序渐进，难点分散，重点突出，推导详细，便于自学。虽然如此，限于我们的水平，书中难免仍有许多缺点和不妥之处，欢迎读者予以批评指正。

本书的出版得到了兰州铁道学院工程结构研究所所长刘世忠博士的大力支持和帮助，研究所的朱东生博士、虞庐松博士以及陈权、孙建琴、王省茜、毕桂平等同志，特别是王丽娟同志，为本书的出版付出了辛勤劳动。编者谨向以上同志表示衷心的感谢。

编者

二〇〇〇年四月

## 目 录

第一章 杆系结构有限元分析的基本原理	1
§ 1-1 引 言	1
§ 1-2 杆系结构类型和结点自由度	2
§ 1-3 局部坐标系	5
§ 1-4 局部坐标系下的铰结杆单元刚度矩阵	6
§ 1-5 局部坐标系下的梁单元刚度矩阵	8
§ 1-6 坐标变换	19
§ 1-7 结点静力平衡方程组和结构刚度矩阵	26
§ 1-8 等效结点荷载	34
§ 1-9 支承约束及强迫位移的处理方法	40
§ 1-10 杆系结构有限元法的小结	42
第二章 结构刚度矩阵的存储和组集	44
§ 2-1 引 言	44
§ 2-2 结构刚度矩阵的方阵存储法	45
§ 2-3 结构刚度矩阵的稀疏性及正定性	50
§ 2-4 结点约束信息表和单元定位数组	53
§ 2-5 刚度矩阵的等带宽存储	58
§ 2-6 刚度矩阵的变带宽存储	60
§ 2-7 结点荷载总列阵的组集	65
§ 2-8 小 结	66
第三章 线性方程组的若干直接解法	67
§ 3-1 引 言	67
§ 3-2 高斯消元法	67
§ 3-3 高斯消元的等带宽算法	71
§ 3-4 实对称正定矩阵的 $LDL^T$ 分解	75
§ 3-5 变带宽存储下的 $LDL^T$ 分解算法	79
§ 3-6 关于直接解法的若干讨论	87
第四章 杆系结构静力分析计算程序	94
§ 4-1 平面杆系结构计算程序 FRAME2	94
§ 4-2 空间杆系结构计算程序 FRAME3	117

<b>第五章 杆系结构分析的若干补充问题</b> .....	183
§ 5-1 引    言.....	183
§ 5-2 考虑剪切变形影响的梁单元.....	183
§ 5-3 曲梁单元.....	186
§ 5-4 主从自由度的概念及其应用.....	198
§ 5-5 弹簧单元与斜支承.....	205
§ 5-6 对称面及反对称面上的位移约束条件.....	208
<b>第六章 动力分析问题</b> .....	210
§ 6-1 运动方程.....	210
§ 6-2 一致质量矩阵和堆聚质量矩阵.....	212
§ 6-3 阻尼矩阵.....	214
§ 6-4 自振特性分析.....	215
§ 6-5 振型叠加法.....	217
§ 6-6 直接积分法.....	220
§ 6-7 基于设计反应谱的地震反应分析.....	223
<b>第七章 结构动力分析中的特征值问题</b> .....	229
§ 7-1 概    述.....	229
§ 7-2 瑞利—李兹近似解法.....	236
§ 7-3 矢量迭代法.....	239
§ 7-4 广义雅可比方法.....	244
§ 7-5 子空间迭代法.....	255
<b>第八章 弹性力学问题有限元法概述</b> .....	260
§ 8-1 引    言.....	260
§ 8-2 弹性力学基本方程.....	261
§ 8-3 三角形单元的位移模式、应变矩阵和应力矩阵.....	268
§ 8-4 三角形单元的单元刚度矩阵、系统平衡方程.....	272
§ 8-5 位移模式与有限元解的收敛准则.....	279
§ 8-6 基于虚功原理的有限元列式.....	283
§ 8-7 基于最小势能原理的有限元列式.....	287
§ 8-8 解的下限性质、完备协调单元的单调收敛性.....	292
§ 8-9 收敛速率和离散化误差.....	295
<b>第九章 等参数单元</b> .....	298
§ 9-1 引    言.....	298
§ 9-2 四结点矩形双线性单元.....	298
§ 9-3 四结点四边形等参数单元.....	302

---

§ 9-4 八结点曲边四边形等参数单元·····	310
§ 9-5 数值积分、高斯求积公式·····	318
§ 9-6 数值积分的阶、降阶积分·····	323
§ 9-7 最佳抽样点与应力计算·····	332
§ 9-8 三维等参数单元·····	336
§ 9-9 四结点四边形非协调单元·····	343
§ 9-10 分片试验·····	350
§ 9-11 无限元·····	358
<b>第十章 薄板弯曲问题的有限元法·····</b>	<b>368</b>
§ 10-1 引 言·····	368
§ 10-2 弹性薄板的弯曲·····	369
§ 10-3 薄板弯曲问题的单元刚度矩阵·····	374
§ 10-4 矩形薄板单元·····	376
§ 10-5 克拉夫—托切尔三角形薄板单元·····	379
§ 10-6 T-21 及 T-18 三角形薄板单元·····	385
§ 10-7 面积坐标、三角形区域上的求积公式·····	390
§ 10-8 基于离散克希荷夫假设的薄板单元·····	394
§ 10-9 矩形及三角形薄板广义协调元·····	402
§ 10-10 用于薄壳分析的平板单元·····	413
§ 10-11 应用实例·····	421
<b>参考文献·····</b>	<b>425</b>



# 第一章 杆系结构有限元分析的基本原理

## § 1-1 引言

杆系结构是一类最为常见的广泛应用的结构，因而，杆系结构有限元分析方法(通常又称为矩阵分析方法)本身具有很大的实用意义。另一方面，杆系结构矩阵分析方法实际上是对任何离散化结构进行分析的典型方法。对于板、壳和三维弹性体，一旦单元力学特性确定之后，全部分析求解过程与杆系结构矩阵分析方法是类似的。因此，它也是学习弹性连续介质有限元法的导引。

杆系结构矩阵分析方法所依据的力学原理仍然是结构力学的基本力学原理，解决任何超静定结构问题(除应力应变关系外)都必须同时兼顾静力平衡、变形协调这两个方面。就基本概念而言，矩阵位移法与一般结构力学中的位移法并无不同。但引入矩阵工具后，可简洁地阐明分析原理和运算过程，并使全部计算求解过程变得十分规则，便于编制成为通用性较强的计算程序上机运算。

杆系结构矩阵位移法的分析求解过程包含三个基本方面。

### 一、结构离散化

结构离散化是把给定的杆系结构按适当的方式划分成若干个杆件,每个杆件称为一个单元,用杆的轴线代表。各杆轴线之间的交点称为结点。按照自然数的顺序,对所有结点和单元进行编号。

全部未知结点位移是整个问题中的基本未知量。

### 二、单元分析

在位移法中,单元分析的中心是建立单元刚度矩阵。

每个杆件单元都是在其两端结点处切开、从结构中取出的一个分离体。作用在杆单元两端截面上的结构内力称为单元结点力。

单元结点力和单元结点位移都是未知的。单元分析的主要目的就是建立用未知的结点位移去确定单元结点力的表达式。联系单元结点力与单元结点位移之间关系的变换矩阵即单元刚度矩阵。

### 三、系统分析

系统分析的任务是按照静力平衡与变形协调条件把作为分离体的各个单元重新组集成为一个完整的结构进行求解。

对杆系结构分析的位移法而言,各杆之间仅在结点处相互连接。相交于某一结点的

各个杆件，它们的杆端位移可用上述同一结点的位移表示，因而位移连续条件自动得到满足。

可见，在位移法中，把单元组集为完整结构的充分且必要条件就是结点静力平衡条件：汇交于某个结点的各个杆件对该结点的作用力与作用在该结点上的外荷载组成平衡力系。某一杆件对结点的作用力与结点对该杆件的作用力(单元结点力)大小相等，方向相反，因而可通过未知的结点位移予以表示。因此，结点静力平衡条件就体现为未知结点位移必须满足的条件。从而，结点平衡方程组就提供了确定全部未知结点位移的一组代数方程。对于线性弹性结构，这是一组对未知结点位移而言的线性代数方程组，即结构力学位移法中的正则方程组。方程组的系数矩阵即结构刚度矩阵，各系数即刚度影响系数。

系统分析的主要任务是：

- (1) 由单元刚度矩阵组集结构刚度矩阵。
- (2) 求解结点平衡方程组，解出全部未知结点位移。

求得全部结点位移后，利用单元刚度矩阵即可算出各单元的内力。

以下我们的讨论仅限于线性弹性杆系结构，即：

(1) 假定位移和变形都是很小的。即假定在荷载或温度变化作用下，结构内各点位移都远小于结构原来的尺寸，在建立平衡方程时，可不考虑结构的几何改变，即可以按照未发生位移前的结构几何形态去建立力的平衡关系。同时，我们还假定结构内各点的应变和转角也是很小的，在研究结构变形时，可以略去应变和转角的二次幂及乘积项。这称为小变形假定。

(2) 假定应力-应变关系服从虎克定律。即假定在外界因素作用下，结构内各点的应力和应变保持线性关系。

对线性弹性结构而言，叠加原理成立：若干组荷载同时作用产生的效果等于各组荷载分别作用所产生的效果之和。

## § 1-2 杆系结构类型和结点自由度

从分析的角度来看，杆系结构可分为连续梁、平面桁架、平面刚架、格栅、空间桁架和空间刚架等 6 种基本类型。对其中任何一种类型，矩阵位移法的分析求解过程都是相同的，程序结构也完全相同，区别仅在于单元刚度矩阵。本节着重说明以上几类结构中的结点自由度，并规定好结点位移分量的记法。

以下我们总假定被划分为单元的每根杆件都是一根等截面直杆或可近似视为一段等截面直杆，并且对该单元而言，所有弹性系数均为常量。同时还假定所有外荷载都仅仅作用在结点上。换言之，如果有分布荷载，则假定已按静力等效原则把它移置为结点荷载。具体移置方法将在 § 1-8 中讨论。

### 一、连续梁

图 1-1 所示为一连续梁， $XY$  平面为梁的一个纵向对称面。 $OXYZ$  为取定的右手直角坐标系，称为结构坐标系或整体坐标系。

所有荷载均为作用于  $XY$  平面内的荷载。外力矩按右手螺旋法则用双箭头矢量表

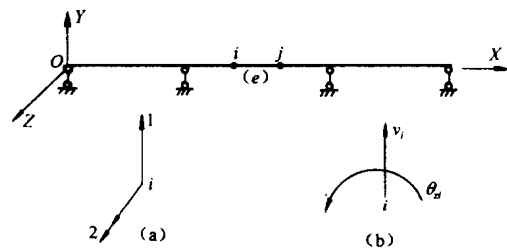


图 1-1 连续梁

示。所有外力矩均为对  $Z$  轴的矩。

在以上条件下,  $XY$  平面即为梁的弯曲平面。

把给定的连续梁划分为若干个梁单元, 所有支承点均需取为结点。

对图 1-1 中的连续梁而言, 任何一个不受支座约束的结点, 其位移自由度为 2, 即一个沿  $Y$  方向的线位移(挠度)、一个绕  $Z$  轴的角位移(截面转角)。结点  $i$  的两个位移分量的编号如图 1-1(a)所示。我们用列矢量  $\delta_i$  表示结点  $i$  的位移。即

$$\delta_i = [\delta_{i1} \quad \delta_{i2}]^T \quad (1-1a)$$

其中  $\delta_{i1}$ 、 $\delta_{i2}$  分别代表结点  $i$  的 1 号和 2 号位移分量, 上标  $T$  表示矩阵的转置。结点  $i$  的位移分量亦可记为  $v_i$ 、 $\theta_{zi}$ , 如图 1-1(b)所示。即亦可记为

$$\delta_i = [v_i \quad \theta_{zi}]^T \quad (1-1b)$$

所有结点位移分量均以坐标轴的正方向为正。角位移用双箭头矢量表示, 箭头方向与坐标轴方向相同者为正(右手螺旋规则)。例如在图 1-1 中, 在  $XY$  平面上顺  $Z$  轴负方向观察, 截面反时针转动时,  $\theta_{zi}$  为正。

所有结点荷载也都按坐标轴分量给定, 它们也均以坐标轴正方向为正。对每个结点而言, 荷载的分量编号顺序与结点位移分量的编号顺序相同。

对其它几类杆系结构, 关于结点位移分量和结点荷载分量的正负号, 均采用同样的规定和表示方法, 不再声明。

连续梁任一截面上的内力是由弯曲正应力合成的弯矩以及剪应力合成的剪力。

## 二、平面桁架

图 1-2 所示为一平面桁架。各杆之间的连接假定为理想铰, 故各杆仅能承受轴向力。结点位移是由各杆轴向变形引起的, 故结点位移可仅用线位移描述。对平面桁架而言, 任一不受约束结点的位移自由度为 2, 与前面一样, 结点  $i$  的位移记为

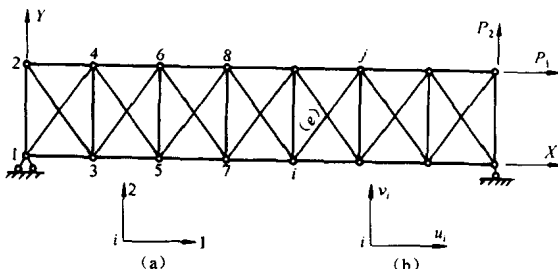


图 1-2 平面桁架

$$\delta_i = [\delta_{i1} \quad \delta_{i2}]^T \quad (1-2a)$$

或

$$\delta_i = [u_i \quad v_i]^T \quad (1-2b)$$

其中  $u_i$ 、 $v_i$  分别为结点  $i$  沿  $X$  轴和  $Y$  轴方向的线位移。

不言而喻, 对平面桁架而言, 所有外荷载假定均作用在桁架所在平面内。因假定结点均为铰接, 不能承受力矩, 故结点荷载分量即沿坐标轴方向的集中力。

## 三、平面刚架

图 1-3 所示为一平面刚架, 即:

(1) 结构杆件轴线均位于同一平面内, 并且各杆横截面有一对称轴, 此对称轴亦位于杆件所在的同一平面内。

(2) 杆件之间的连接点假定为刚性结点。

(3)所有外荷载均位于杆件所在的同一平面内。在此条件下,此平面即为各杆件的弯曲平面。

平面刚架中任一不受支承约束的结点具有三个位移自由度,如图 1-3(a)或图 1-3(b)所示,即

$$\delta_i = [\delta_{i1} \quad \delta_{i2} \quad \delta_{i3}]^T \quad (1-3a)$$

或记为

$$\delta_i = [u_i \quad v_i \quad \theta_{zi}]^T \quad (1-3b)$$

应当指出,平面刚架中的构件一般以弯曲变形为主,在采用传统手算方法计算时,轴向变形一般皆略去不计。采用计算机进行分析时,我们不再略去轴向变形,这不仅使分析精度有所提高,更重要的是便于编制计算机程序,对无侧移刚架和有侧移刚架等情形,也无需加以区分。

图 1-3 中各立柱底部均为固定端。当然,在一般情况下,平面刚架的支承条件可以包括固定铰支、活动铰支以及弹性支承等各种情形。

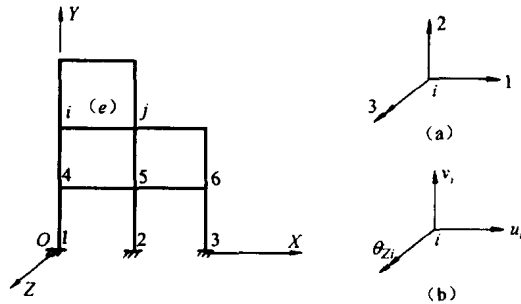


图 1-3 平面刚架

#### 四、格 栅

图 1-4 所示为一格栅结构,或称纵横梁系统。

格栅本身为一平面结构,即其所有杆件均位于同一平面内,如图 1-4 中  $XY$  平面。纵横梁之间可以为铰接,也可以为刚接。以下,我们假定格栅中各结点均为刚接,至于结点为铰接的情况,可作为特殊情况处理。

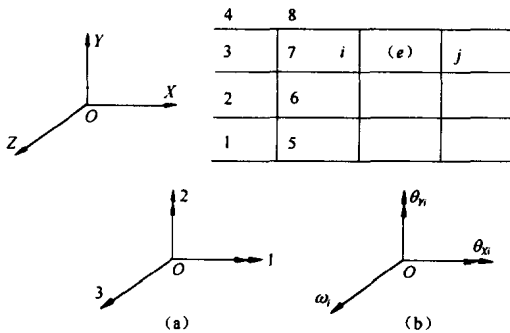


图 1-4 格栅

格栅承受荷载为:

(1)垂直于格栅平面即平行于  $Z$  轴的结点集中力。

(2)在格栅平面内的结点集中力矩。

我们假定:格栅中每个杆件的横截面均有两根对称轴,在这个假定下,杆件的弯曲与扭转彼此互不耦合,可以分别处理。

对格栅中任何一个刚结点而言,都具有三个位移自由度,一个沿  $Z$  轴的线位移(挠度),另外两个是截面绕  $X$  轴和  $Y$  轴的角位移,如图 1-4(a)及 1-4(b)所示。对于杆轴线平行于  $X$  轴的杆件而言,  $\theta_x$  是截面扭转角,  $\theta_y$  是弯曲转角。

与平面刚架中轴向变形居于次要地位相似,格栅中构件变形一般也是以弯曲变形为主,扭转变形居于次要地位。

对  $XY$  平面内的格栅而言,结点位移为:

$$\delta_i = [\delta_{i1} \quad \delta_{i2} \quad \delta_{i3}]^T \quad (1-4a)$$

或

$$\delta_i = [\theta_{Xi} \quad \theta_{Yi} \quad \omega_i]^T \quad (1-4b)$$

图 1-4 中的格栅，其纵梁支承为铰支座。一般情况下，纵梁支承也可以是固定端、固定铰支、活动铰支或弹性支承。

简言之，格栅为一承受面外荷载的平面结构。

### 五、空间桁架

空间桁架与平面桁架类似，区别在于各杆件不在同一平面内，结点为理想球形铰，每个不受约束的结点具有三个线位移分量，即

$$\delta_i = [\delta_{i1} \quad \delta_{i2} \quad \delta_{i3}]^T \quad (1-5a)$$

或 
$$\delta_i = [u_i \quad v_i \quad w_i]^T \quad (1-5b)$$

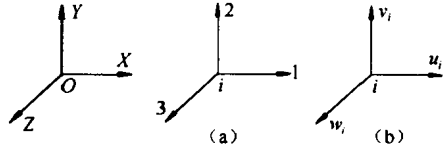


图 1-5 空间桁架的结点位移

### 六、空间刚架

对空间刚架的每个刚结点而言，都具有六个位移自由度，即沿坐标轴方向的三个线位移和三个角位移(1—5)。结点位移记为

$$\delta_i = [\delta_{i1} \quad \delta_{i2} \quad \delta_{i3} \quad \delta_{i4} \quad \delta_{i5} \quad \delta_{i6}]^T \quad (1-6a)$$

或

$$\delta_i = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{Xi} \quad \theta_{Yi} \quad \theta_{Zi}]^T \quad (1-6b)$$

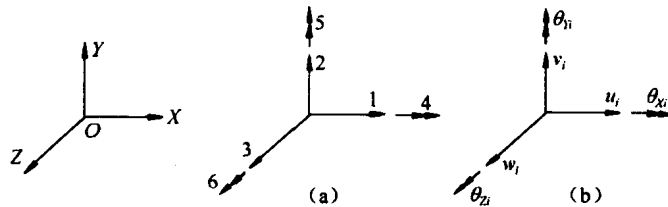


图 1-6 空间刚架的结点位移

最后强调指出，图 1-1 到图 1-6 中，所有结点位移分量和结点荷载分量都是对所选定的同一坐标系而言的。即图 1-1 到图 1-6 中的 OXYZ 坐标系，这些坐标系都称为结构坐标系或整体坐标系。

## § 1-3 局部坐标系

单元分析的中心是建立杆端内力与杆端位移之间的关系式，即建立单元刚度矩阵。对单元分析而言，采用适合于该单元具体方位的坐标系，将会方便得多。这种附属于某个单元的坐标系，称为单元坐标系或局部坐标系。

杆系结构的基本类型虽有如前所述的六类，但就其各个杆件的类型而言，则主要可分为梁单元和铰结杆单元两类。下面，我们首先分别对这两类单元规定好它们的局部坐标系。

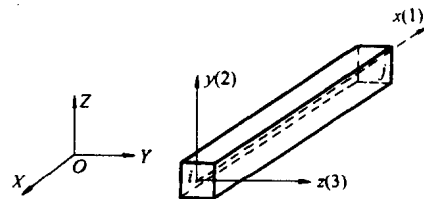


图 1-7 局部坐标系

典型的三维梁单元如图 1-7 所示, 设  $e$  号单元两端结点号码分别为  $i$ 、 $j$ , 取结点  $i$  作为  $e$  号单元局部坐标系的坐标原点, 取结点  $i$  到结点  $j$  的杆轴(形心轴)方向为  $x$  轴正方向(也称局部坐标系 1 轴), 这里需要说明的是,  $e$  号单元的两个端结点中, 取任何一端作为  $i$  端均可, 但一旦取定后, 局部坐标系的  $x$  轴(1 轴)的正向即随之确定,  $x$  轴(1 轴)在整体坐标系中的方向余弦也随之确定。

局部坐标系另外两根坐标轴的取法则视单元类型而定。

对梁单元, 取  $i$  端截面上的两个形心主惯性轴作为  $y$  轴(2 轴)和  $z$  轴(3 轴)。xyz 坐标系为右手直角坐标系。

对铰结杆单元,  $i$  端截面内的任意两个相互垂直的方向, 皆可取为  $y$  轴和  $z$  轴。

下面引进一些记号:

$L$ ——单元长度;

$A$ ——单元横截面面积;

$J$ ——截面扭转常数;

$I_y$ ——对  $y$  轴的截面惯性矩;

$I_z$ ——对  $z$  轴的截面惯性矩;

$E$ —— $e$  号单元的拉压弹性模量;

$G$ —— $e$  号单元的剪切弹性模量。

只要给定  $e$  号单元两端结点号码及整体坐标系下的结点号码, 单元的长度及其相对于整体坐标系的方位即完全确定。因而, 给定单元结点号码、结点坐标以及单元的  $A$ 、 $J$ 、 $I_y$ 、 $I_z$ 、 $E$ 、 $G$  之后, 该单元的几何性质和弹性性质即完全确定。

## § 1-4 局部坐标系下的铰结杆单元刚度矩阵

首先讨论平面铰结杆。取  $e$  号单元, 其端结点为  $i$ 、 $j$ 。每个结点位移自由度为 2, 单元自由度为 4, 局部坐标系下单元两端结点位移分量和结点力分量的正方向及其编号如图 1-8 所示。

$e$  号单元是从两端结点处切取出的分离体, 图中  $e$  号单元两端的小圆圈仅用以表明该单元的性质是两端铰结。

结点  $i$  和结点  $j$  对  $e$  号单元的作用力称为单元结点力, 对铰结杆单元, 结点力为杆端截面上均匀分布的轴向应力的合成, 即轴向力, 如图 1-8(b)中的  $N_i$ 、 $N_j$ 。垂直于杆轴方向的结点力为零。

为方便起见, 我们用列矢量  $\delta^e$  和  $F^e$  表示  $e$  号单元的结点位移和结点力, 即

$$\delta^e = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

$$F^e = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} N_i \\ Q_i \\ N_j \\ Q_j \end{bmatrix} \quad (1-8)$$



图 1-8 单元结点位移、单元结点力的正方向及其编号

我们的目的是用  $e$  号单元的结点位移去表示结点力。由材料力学可知，轴向力与轴向变形(伸长与缩短)成正比，即

$$N_i = \frac{EA}{L}(u_i - u_j) \quad (1-9)$$

由  $e$  号单元静力条件有

$$N_j = -N_i = \frac{EA}{L}(-u_i + u_j) \quad (1-10)$$

因  $Q_i = Q_j = 0$ ，故由式(1-9)和式(1-10)，单元结点力和单元结点位移之间的关系可写成如下的矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} N_i \\ Q_i \\ N_j \\ Q_j \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

或缩写为

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e \quad (1-11)$$

$\mathbf{K}^e$  即局部坐标系下平面铰结杆的单元刚度矩阵。因而我们得到平面铰结杆单元刚度矩阵：

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

显然，使  $e$  号杆  $i$  端发生单位水平位移而保持其余结点位移分量为零状态下，各结点施加于  $e$  号单元的作用力即  $\mathbf{K}^e$  的第一列元素。仅由  $j$  端发生单位水平位移所引起的结点力即  $\mathbf{K}^e$  的第三列元素。

下面讨论空间铰结杆，这时每个铰结点有三个独立线位移，单元结点位移与结点力的正方向及其编号如图 1-9 所示。

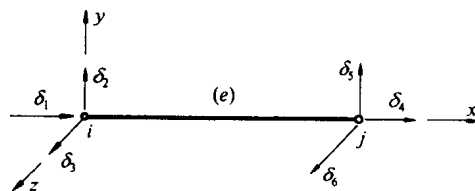


图 1-9 空间铰结杆单元

式(1-9)和式(1-10)对空间铰结杆单元同样适用，因而得到空间铰结杆单元刚度矩阵：

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

单元刚度矩阵  $\mathbf{K}^e$  具有几个明显而重要的性质:

(1) 单元刚度矩阵是常量矩阵。即  $\mathbf{K}^e$  的元素均为常数, 它们由单元的几何性质和弹性系数完全确定, 而与荷载和其它外界因素(如温度变化)无关。

(2) 单元刚度矩阵是对称矩阵。即

$$K_{ij}^e = K_{ji}^e, \quad (j \neq i)$$

这是功的互等定理(贝谛定理)的反映。

(3) 单元刚度矩阵是奇异矩阵。

我们是在结构系统处于静力平衡的前提下进行讨论的, 因而, 对于作为分离体的  $e$  号单元而言, 作用在它上面的外力(即结点力)必为平衡力系, 即对现在讨论的两端铰结杆而言,  $N_i + N_j = 0$ 。由此, 在  $\mathbf{K}^e$  中相应于  $N_i$  及  $N_j$  的两行元素必成比例。例如在(1-12)式中,  $\mathbf{K}^e$  的第三行就是第一行的(-1)倍,  $\mathbf{K}^e$  的行列式自然为零。

从物理意义来看, 作为分离体的  $e$  号单元是一个无约束杆。承受平衡力系作用的无约束杆的变形是确定的, 但位移并不是确定的, 因为整个杆件还可以发生任意的刚体位移。换句话说, 由于方程组(1-11)的系数矩阵即  $\mathbf{K}^e$  的行列式为零, 即使已知  $\mathbf{F}^e$ , 方程组(1-11)的解仍是不能确定的, 它的解不是惟一的, 即不能确定结点位移  $\delta^e$ 。单元刚度矩阵是奇异矩阵, 反映的正是处于静力平衡状态的无约束结构可以发生任意刚体位移这一事实。显然, 为了确定  $e$  号单元的结点位移, 必须把各单元重新组集成为一个完整结构, 根据整个结构的荷载条件和支承条件求解。

还应指出, 由于单元刚度矩阵是常量矩阵, 因而, 单元结点力与单元结点位移成线性关系, 这当然是基于线弹性结构的前提而得出的结果。§ 1-1 中关于线性结构三条假定有一条不适用时, 这个结论就不成立。例如, 如果  $e$  号杆内的应力已超过比例极限或者应力-应变关系本身就不包含直线段, 则该单元的弹性模量  $E$  将随单元应力而变化, 这时  $\mathbf{K}^e$  的元素即不再保持常量。

以上关于单元刚度矩阵的三条基本性质, 虽然是由讨论两端铰结杆而得出的, 事实上, 对任何遵循线性弹性性质的单元而言, 都同样成立。

## § 1-5 局部坐标系下的梁单元刚度矩阵

### 一、势能驻值原理

我们仅限于讨论外力为保守力即存在外力势能的情形。大小和方向均保持不变的给定的外荷载以及弹性力, 都是保守力。

弹性体的总势能  $\Pi$  由弹性体的应变能  $U$  和外力势能  $W$  组成, 即

$$\Pi = U + W \quad (1-14)$$



弹性体在外荷载作用下处于静力平衡状态的充分必要条件是总势能取驻值, 这就是弹性体的势能驻值原理。

如果弹性体的总势能  $\Pi$  能表示为有限个广义位移  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  的函数, 即

$$\Pi = \Pi(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \quad (1-15)$$

则由多元函数微分学即知,  $\Pi$  取驻值的充分必要条件是:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_n} = 0 \quad (1-16)$$

由于弹性体具有无限多个自由度, 因而一般而言, 只能把弹性体的总势能近似表示为有限个广义位移的函数。这时, 由方程组(1-16)给出的是近似解, 即近似满足平衡方程的解。当然, 如果对于某些简单问题能把总势能  $\Pi$  准确地表示为有限个广义位移的函数, 则方程组(1-16)将给出满足平衡方程的准确解。

可以证明, 如果弹性体的平衡状态是稳定的, 则相应总势能为最小。

在本节中, 我们将利用势能驻值原理建立梁单元的平衡方程, 从而建立梁单元的刚度矩阵。

## 二、基本假设及有关记号

首先讨论平面梁单元。除了在 § 1-1 中关于线弹性杆系结构的一般假设之外, 我们还假定:

(1) 关于梁的弯曲变形的平截面假定成立。

(2) 单元仅在两端结点处承受作用在截面形心处的剪力和弯矩。

将所讨论的典型梁单元  $e$  从原杆件系统中分离出来, 它在  $i$  端及  $j$  端受到的剪力和弯矩分别记为

$$\mathbf{F}_i^e = \begin{bmatrix} Q_i^e \\ M_{zi}^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_j^e = \begin{bmatrix} Q_j^e \\ M_{zj}^e \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

并引入单元  $e$  的结点力列阵:

$$\mathbf{F}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i^e \\ \mathbf{F}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i^e \\ M_{zi}^e \\ Q_j^e \\ M_{zj}^e \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

注意  $\mathbf{F}^e$  的所有分量都是按局部坐标系定义的, 它们的正方向一律取为局部坐标系的坐标轴正向, 如图 1-10 所示。

单元  $e$  在结点力  $\mathbf{F}^e$  作用下发生变形而平衡。结点  $i$  和结点  $j$  的位移在局部坐标系中的分量分别记为

$$\delta_i^e = \begin{bmatrix} v_i^e \\ \theta_{zi}^e \end{bmatrix}, \quad \delta_j^e = \begin{bmatrix} v_j^e \\ \theta_{zj}^e \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

并引入单元  $e$  的结点位移列阵:

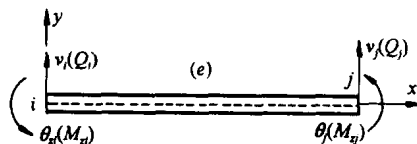


图 1-10 平面梁单元