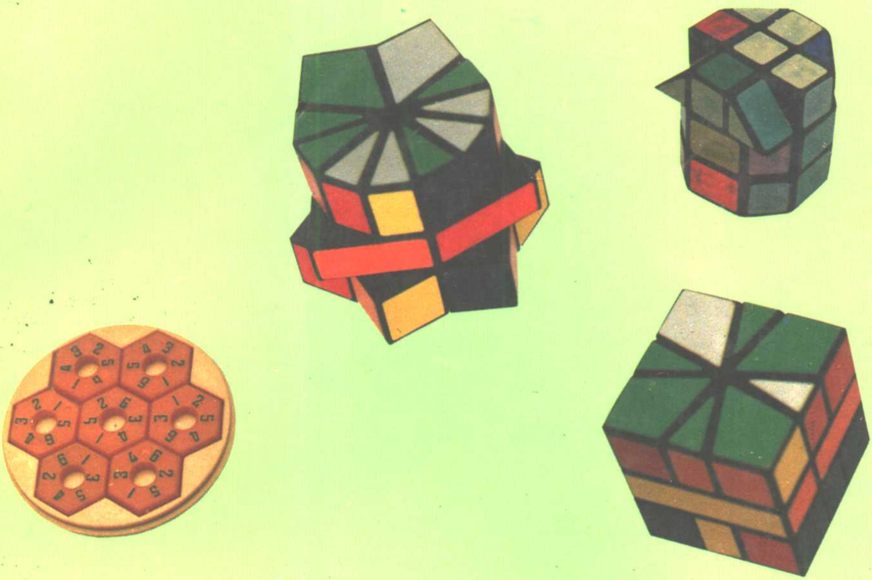
TONGSU SHUXUE MINGZHU YICONG



通俗数学名著译丛

SHUXUE YULE WENTI

J·A·H·亨特　J·S·玛达其　著

张远南　张昶　译

上海教育出版社

数学娱乐问题

数学娱乐问题

J·A·H·亨特 J·S·玛达其著 张远南 张昶译

上海教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学娱乐问题/（加拿大）H. 亨特，（加拿大）S. 玛达其著；张远南，张昶译. —上海：上海教育出版社，2000
（通俗数学名著译丛）
ISBN 7-5320-5549-3

Ⅰ.数… Ⅱ.①H…②S…③张…④张… Ⅲ.数学-通俗读物 Ⅳ.01-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第15861号

J. A. H. Hunter Joseph S. Madachy

Mathematical Diversions

Dover Publications, Inc.

根据多佛出版公司1975年版译出，

本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

通俗数学名著译丛

数 学 娱 乐 问 题

[美]J·A·H·亨特 J·S·玛达其 著

张远南 张 昶 译

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行

（上海永福路123号）

（邮政编码：200031）

各地新华书店经销 上海书刊印刷有限公司印刷

开本 850×1156 1/32 印张 6.5 插页 4 字数 151,000

1998年4月第1版 2000年3月第4次印刷

印数 10221—15220本

ISBN 7-5320-5549-3/G·5791 定价：(软精)9.50元

译丛序言

数学，这门古老而又常新的科学，正阔步迈向21世纪.

回顾即将过去的世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志.因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要，在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面，20世纪数学思想的深刻变革，已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只好望而却步.这样，提高数学的可接受度，就成为一种当务之急.尤其是当世纪转折之际，世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作，国际数学联盟(IMU)还专门将2000年定为**“世界数学年”**，其主要宗旨就是“使数学及其对世界的意义被社会所了解，特别是被普通公众所了解”.

一般说来，一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步，数学普及工作在我国也受到重视.早在60年代，华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读

物，激发了一代青少年学习数学的兴趣，影响绵延至今．改革开放以来，我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力．但总体来说，我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距．我国数学要在下世纪初率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务．为此，借鉴外国的先进经验是必不可少的．

《通俗数学名著译丛》的编辑出版，正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物，推动国内的数学普及与传播工作，为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量．丛书的选题计划，是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的．所选著述，基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作．它们在内容上包括了不同的种类，有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用；有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧；有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系；……等等，试图为人们提供全新的观察视角，以窥探现代数学的发展概貌，领略数学文化的丰富多采．

丛书的读者对象，力求定位于尽可能广泛的范围．为此丛书中适当纳入了不同层次的作品，以使包括大、中学生；大、中学教师；研究生；一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益．即使是对于专业数学工作者，本丛书的部分作品也是值得一读的．现代数学是一株分支众多的大树，一个数学家对于他所研究的专业以外的领域，也往往深有隔行如隔山之感，也需要涉猎其他分支的进展，了解数学不同分支的联系．

需要指出的是，由于种种原因，近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气，有关选题逐年减少，品种数量不断下降．在这样的情况下，上海教育出版社以迎接 2000 世界数学年为契机，按照国际版权公约，不惜耗资购买版权，组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》，这无疑是值得称道和支持的举措．参加本丛书翻译的专家学者们，自愿抽出宝贵的时间来进行这类

通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作,同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见.我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》出版成功.

让我们举手迎接2000世界数学年,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

1997年8月

DOVER 版前言

在这个新的Dover版里，我们收编了一些最近的发现，如新的已知最大的素数，等等. 此外，还在不改变原书面貌的前提下，对一些明显的错误作了修订.

作　者

1974年8月

第一版前言

“一些东西是旧的，一些东西是新的!”这句话似乎总结了本书所要尝试的目的. 需要强调的是：一个真正的娱乐数学的爱好者会发现，动手去做要比阅读怎样去做更加有趣得多!

一些材料，在本书正文中已有充分论述，没有必要在引言中再来一一细表.

对于大量的多阶米诺的资料，我们要感激S·W·果隆姆先驱性的工作. 少数一些人有价值的建议，已在书中相关的地方予以致谢. 此外，我们还要特别对以下人员，表达我们的深切谢意，感谢他们为本书提供了多方面的宝贵意见. 他们是：

J·H·安德森	S·格兰特
S·巴尔	G·盖洛特
A·G·布拉德伯里	R·B·麦克唐菲
A·L·布朗	D·默道希
S·恩肖	J·沃尔多夫

作　者

1963年1月

目　录

DOVER 版前言
第一版前言
第 1 章　友好的数和其他 …………………………………… 1
第 2 章　从悖论到并行节带………………………………… 14
第 3 章　神秘的阵列………………………………………… 27
第 4 章　拓扑趣谈…………………………………………… 41
第 5 章　一些推理问题……………………………………… 56
第 6 章　丢番图方程及诸如此类…………………………… 60
第 7 章　杂　集……………………………………………… 75
第 8 章　带有形状的娱乐…………………………………… 88
第 9 章　文字数学及类似课题 …………………………… 102
第10章　什么是机会？ …………………………………… 110
第11章　故事难题 ………………………………………… 120

答案与解答………………………………………………… 141
附　录：
　　斐波那契数列的一个基本性质………………………… 189
索　引……………………………………………………… 191

第1章　友好的数和其他

任何算命先生都会告诉你：数，所有的数，都有它特殊的品性．然而，可能你并不相信命理学，不相信数的个性．但是，像13这样的数又怎么说呢？人们总是凭臆想把它与坏运气及一些忧虑的事联系在一起，似乎有一种令人讨厌的品格，附着于13本身！从数字上看，13还是一个较小的素数（稍后，当我们讨论默森素数时，还将看到有关素数的一些特别有趣的东西）．

无论是职业或是业余的赌徒都会这样说：数7患有精神分裂症——正常的时候表现出好运气，不正常的时候则表现出坏运气．数3素以神秘者著称——宗教上的“三圣”一体；耶稣基督悬在十字架上3小时，躺在墓里整3天；毕达哥拉斯（Pythagoras）称3为“完美的数”，因为它表达了“开始、中间和末了”；古代的人则认为3是神创造的记号，因为世界是由3位神统治着，他们是朱庇特（在天堂）、尼普顿（在海洋）、普路托（在地狱）；还有3种命运，3位女神，连掌管文学、艺术和科学的神，也是3×3位；而人的本身，则可以认为是肉体、灵魂和精神三者的结合．类似地，关于7也有一些神秘的说法：例如7是上帝创造宇宙的天数；而7又是极其罪恶的，古希伯来人就认为“7是上帝的名字”．上面说的虽然只是两个数字，但对于其他的数字，也同样带有许多宗教的联想．

不知从什么时候开始，奇数被赋予阳性的表征，而偶数被赋予阴性的表征．反过来，又依此与文化相关联．

但是，所有这些关于数的个性的联想都是人为的，是人类自身经验所引发的结果. 然而作为数的本身，却有着其自身固有的特性.

[1] 一些数就其自身而言是乏味的①(自然，算命先生所坚信的应予除外)，只有当事情与其发生关系时，才能予以解析. 例如，数 220 看起来并没有什么特别. 但把它除自身以外的所有整因子都加起来得：

$$1+2+4+5+10+11+20+22$$
$$+44+55+110=284.$$

现在对数 284 也做同样的事：

$$1+2+4+71+142=220.$$

这里我们似乎看到了一些东西！220 与 284 两者之间有着密切的关系. 其中任一个数的因子(均指除自身外，下同)之和，等于另一个数. 具有这样性质的两个数，我们称之为*亲和数*，意即“友好的”数. 这类数人们至今也知道得不多，大约不到 1200 对. 这中间，伟大的欧拉(Euler)在 1750 年，一个人就发现了 59 对. 亲和数对，除上面讲的一对外还有：1184 与 1210，2620 与 2924，5020 与 5564，17296 与 18416，9363584 与 9437056，等等. 最小的亲和数对 220 与 284 是从古代人那里知道的. 那时人们把它与护符和命理学联系在一起，即：其中一个数的持有者，

---

① 原注：尽管证明没有乏味数的论证众所周知，我们这里仍将介绍如下. 就是：让我们假定有两类数——有趣的数和乏味的数. 而所有的数，要么归于这一类，要么归于那一类. 而在乏味数的类中，有一个最大的数和一个最小的数. 很明显，这就使得它们令人感到兴趣！如果我们把这两个数移到有趣数的一类，那么留下来的乏味数中，又有最大的与最小的，它们同样使人感到兴趣. 最后，我们只剩下一个或两个乏味的数. 而这本身就是使人感到兴趣的理由！综上，根据反证法，命题获证.

以此作为与另一个数持有者之间亲密友谊的保证.有些人甚至把亲和数看作婚姻中爱情的基础(就是在现代婚姻中,也不乏这类例子!).

在具有固有品性的数中,研究最多的就是素数.素数是这样的一种整数,除了1和它自身之外,没有别的整数因子.例如:2,3,5,7,…,229,…,5693,…,199999等等,直至无穷.素数颇具挑战性.越大的素数,越能表现出这种挑战!谁会留心像2,3这样小的素数呢?但对于像10000019这样的数,谁又能断定它绝对没有整数因子呢?尽管这个数与我们后面将要提到的"大"的素数相比,小得可怜而且无足轻重!

下面一些素数,看起来令人惊异: [2]

$$1,111,111,111,111,111,111$$

$$11,111,111,111,111,111,111,111$$

$$909,090,909,090,909,090,909,090,909,091$$

$$9,090,909,090,909,090,909,090,909,090,909,090,909,091.$$

有许多不同的方法,可以用以检验一个给定的数是否素数.但对于一个非常大的素数,要实施除法,就非得要动用电子计算机不可.有一种检验素数的方法,其基本要点是:用所有小于给定数平方根的素数去除它.例如,我们要检验233,那么,我们就要将它除以小于$\sqrt{233}$,即小于15的素数.这些素数是:2,3,5,7,11和13.当我们除以这些数之后,发现每次都有剩余.于是,233是素数.用这种方法检验5659,我们就要除以小于$\sqrt{5659}$,即小于75的素数.这样的素数有21个.尽管在实施除法中,存在着许多技巧,这些技巧,使我们得以排除其中的一部分.但所有这些技巧,对于解决像8083457是否素数的问题,都绝非一件易事.因为这里需要除的,小于$\sqrt{8083457}$的素数有412个之多!谁又能用这种方法来检验上面给的数是不是一个

素数呢？

自 2300 年前欧几里得(Euclid)那时起，素数便成为数学的一项重要内容．欧几里得首先证实了素数的无限性，其论证粗略如下：假设不然，有一个最大的素数 P．则全体素数的积加 1，要么是一个素数，要么不是一个素数(合数)．也就是说：

$$(p_1p_2p_3\cdots P)+1=\text{一个素数或一个合数}.$$

显然，左边的数是不能被任何小于 P 的素数，或 P 本身整除．事实上，这种除法的结果总是余 1．因此这个数要么是素数，要么是一个具有大于 P 的素因子的合数．两种情况，都表明比 P 更大的素数的存在．因而，P 不是最大的素数，充其量只是已知的最大素数．

各种各样的素数表被编列出来．其中最大的一部，是八卷本直至 100330201 的素数表，但中间错误甚多，且第二卷丢失．该书的原始手抄本，保存于维也纳．尽管对它的不完全，人们引以为憾，但它仍不失为一份极有价值的文献．这份表列出了
[3] 超过 5761456 个的素数，库立克(Kulik)为此花费了自己的大半生！

一份近乎完整的表，由莱默(D. N. Lehmer)于 1914 年出版．这份表包含了直至 10006721 的全部素数，含 1 在内共有 665000 个素数(1 通常不被认为是素数)．近年来，头 6000000 个素数的缩影胶片也已出版．它是由 RAND 公司的贝克(C. L. Baker)和格伦伯格(F. J. Gruenberger)在 IBM704 计算机上计算出的．这份长长的表，覆盖了直至 104395289 的素数．

早期中国人的手稿显示，把素数归于男性的品质，而把其余的奇数看成女性．这表明，即使在那样一种古老的日子里，素数也是作为一种特殊的品类被认识的．而今天，现代的数学，依然表现出对素数的青睐！

在上面提到的，增至 6000000 个的素数表中，有不少类型孤立的大素数是已知的，而且它们大多都有历史的渊源——主要是在证实它们素数性的过程中所包含的极其巨大的工作.

有一群素数称为罗宾逊(Robinson)数，它由以下公式给出：$R(k,n)=2^n\cdot k+1$，该公式对某些 k 和 n 的值产生素数. 例如，$k=5,n=1947$，得到一个由 586 个数字组成的素数. 这是目前所知道的最大的罗宾逊素数，然而这并不意味着它就是已知的最大素数.

另一个公式是由费尔马(Fermat)设计的，它也给出了一些素数. 费尔马坚信，对于所有的 n 值，$2^{2^n}+1$ 总能产生素数. 然而他大错而特错！只有五个素数被发现是遵从于这个公式的，它们是：3，5，17，257 和 65537，分别对应于 $n=0$，1，2，3 和 4. 对于紧接着的下一个 n 的值 $n=5$，公式产生数 4294967297，它有两个素因子 641 和 6700417. 从而开创了费尔马数为合数的先例. 此后再也没有这类的素数被发现. 一个被试验的最大的费尔马数是 $2^{2^{1945}}+1$，它包含有大约 $10^{10^{584}}$ 个数字！这个数完全的因子分解目前人们还不知道，只知道它有一个长达 586 个数字的因子，它就是罗宾逊素数 $R(5,1947)$. 这个用以试验的最大的费尔马数 F_{1945} 的非素数性，一方面使人们普遍怀疑，在 F_5 之后的费尔马数中，是否还能找到其他的素数？另一方面又进一步引发了人们的兴趣，并因此吸引了为数众多的，热心的数论专家. [4]

费尔马数与某些几何作图有着密切联系. 它就是：对于奇数 n，如何作一个正 n 边形的问题. 虽然作正三角形和正五边形没有什么困难，但却没有人能够只用圆规和直尺作出正七边形或正 11 边形. 人们已经知道正 17 边形的一种作法，它是由高斯(C. F. Gauss)于 1798 年他 19 岁的时候发现的. 同时，他还作出了一个令人吃惊的结论：即当正多边形的边数 n 是费尔马素数

时，才可能用圆规和直尺作出①. 换句话说，一个有着素数边的正多边形，只有当边数为 3，5，17，257，65537 时，才可能用欧几里得方法(即只用圆规和直尺)作出.

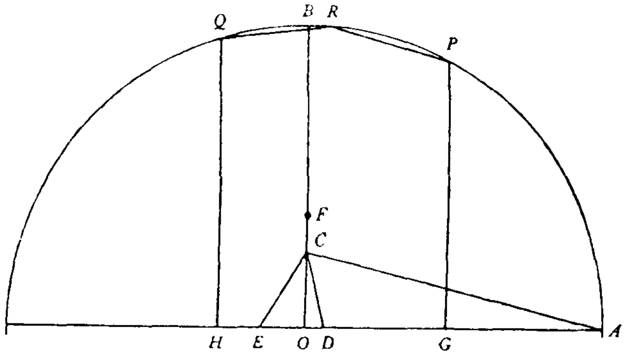


图 1-1

等边三角形和正五边形很容易画出. 正 17 边形也能像图 1-1 那样构造出来②：

作一个以 O 为中心的半圆，并画一条与半径 OA 垂直的半径 OB. 由 A 画 AC，这里 $OC=\frac{1}{4}OB$. 作 $\angle OCD=\frac{1}{4}\angle OCA$，且 $\angle ECD=45^\circ$. 以 EA 为直径画一个半圆，令交 OB 于 F. 以 D 为中心，DF 为半径画另一个半圆，交 OA 于 H 和 G 点. 过 G 和 H 作 OA 的垂线，交大的半圆于 P，Q 点. 则 $\widehat{PQ}$ 等于圆周的
[5] $\frac{2}{17}$. 令 R 点平分 $\widehat{PQ}$，则 PR 或 RQ 便是正 17 边形的一边.

---

① 译者注：这一说法不准确. 正确的说法应该是：仅用圆规和直尺把圆周 n 等分，当且仅当 n 是如下形状的整数时才可能：(i) $n=2^m$；(ii) n 是费尔马素数；(iii) $n=2^m p_1 p_2 \cdots p_k$，其中 p_i 是费尔马素数且各不相同.

② 原注：这一方法改编自柯克塞特(H. S. M. Coxeter)的《几何引论》一书，John Wiley & Sons，Inc.，1961 年版，第 27 页.

正 257 边形和正 65537 边形的作法人们都已知道，但由于篇幅太长而无法在此详述．要提到的是：正 65537 边形的作法，花费了哈默斯（O. Hermes）十年的时光，他的手稿装满了一个大箱子，该箱现仍保存于哥庭根大学．数学家们总能找到一些个别的，隐藏很深的方法——虽然这种不懈的努力是否有益，有时是值得怀疑的．

现在回到素数上来．让我们查验一些不同的公式，这些公式是为了产生有限的素数序列而设计的．最著名的是欧拉多项式 $x^2 - x + 41$，它对于 $x = 1, 2, 3, \cdots, 40$，给出了 40 个不同的素数．最简单的是 $2x^2 + 29$，它是由勒让德（Legendre）于 1798 年发现的．对于 $x = 0, 1, 2, \cdots, 28$，它能产生 29 个素数．没有一个多项式能够专门给出素数，但却有一个由台尔曼（M. H. Tallman）设计的公式，只要使用得当，可以专门产生素数：

$$N = \frac{P_n}{a_i a_k \cdots a_n} \pm a_i a_k \cdots a_n,$$

这里（1）P_n 是头 n 个素数的乘积，而 $a_i, a_k, \cdots, a_n$ 则是头 n 个素数中，任意一些不同的（或全部）素数；（2）N 要小于第 $n+1$ 个素数的平方．由此而得的每一个这样的 N 必为素数[①]．

一个例子便能弄清楚该公式的使用：

$$\begin{aligned} N &= \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23}{2\cdot 3\cdot 11\cdot 13\cdot 17} \\ &\quad - 2\cdot 3\cdot 11\cdot 13\cdot 17 \\ &= 709 \end{aligned}$$

是一个素数，因为 $709 < 29^2$．

关于没有一个多项式能够专门产生素数的证明，对一般的

① 原注：台尔曼公式的证明，发表于《娱乐数学杂志》No. 4，1961 年 8 月，第 64 页．

读者来说,并不常见.

事实上,如果一个有理代数式所表示的仅仅是素数的话,那么我们能够把它写为以下的式子:

$$a+bx+cx^2+dx^3+\cdots.$$

又若当 $x=m$ 时,该公式得到素数 P,则我们有:

[6] $$P=a+bm+cm^2+dm^3+\cdots.$$

又设 $x=m+nP$,我们将得到另一个素数 Q,其值为:

$$Q=a+b(m+nP)+c(m+nP)^2+d(m+nP)^3+\cdots.$$

现在,由于 $b(m+nP)=bm+(\text{含}P\text{的项})$,

$$c(m+nP)^2=cm^2+(\text{含}P\text{的项}),$$

$$d(m+nP)^3=dm^3+(\text{含}P\text{的项}),$$

……

于是, $Q=a+bm+cm^2+dm^3+\cdots+(\text{含}P\text{的项})$

$$=P+(\text{含}P\text{的项}).$$

表达式(含 P 的项)必须是 P 的倍数,因此,Q 必须是 P 的倍数,从而它不可能是素数.这就表明一个有理代数式不能仅仅表示素数.

有一些素数是紧挨在一起的.例如 3 和 5,11 和 13,19469 和 19471,等等.只有不多的多项式或公式能够产生这样的素数偶.以下一个是由伽西(A. T. Gazsi)发现的:

$$N=12150-1710A+60A^2,$$

这里 A 依次取值 1, 2, 3, …, 20 时,$N+1$ 和 $N-1$ 是一对紧挨在一起的素数偶.这里共有 18 对正的素数偶,及一对负的素数偶(-29 和 -31).

在素数领域,依然存在着许多未能解答的问题和未能证明