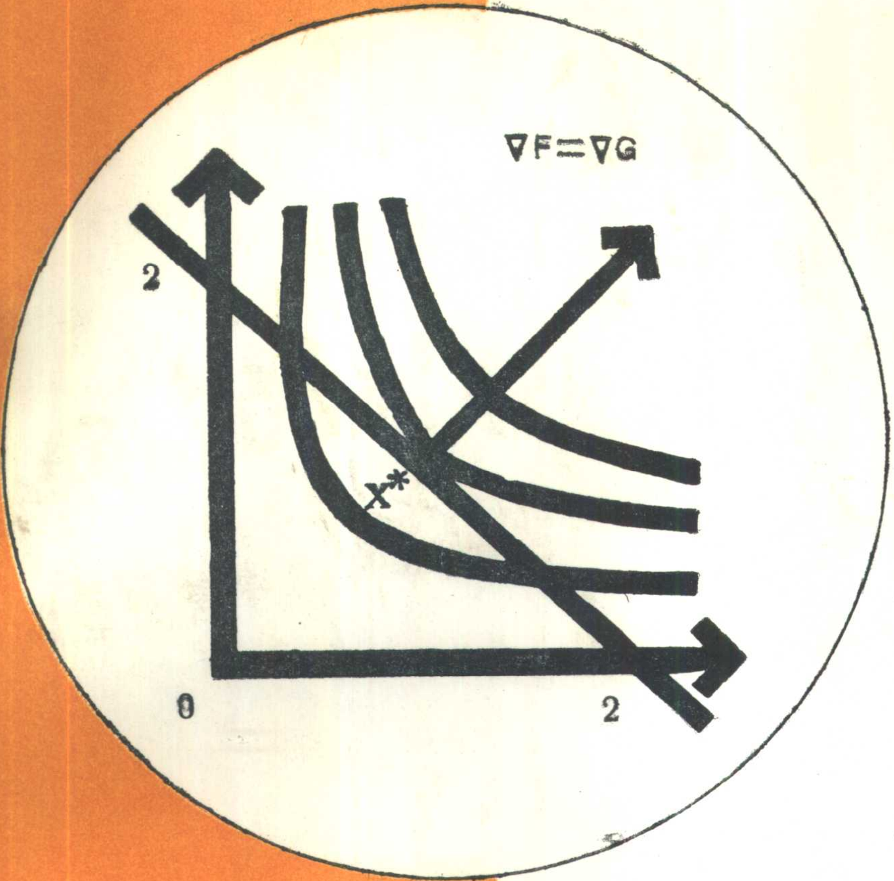
线性和非线性规划引论及其应用



费培之　编著

四川大学出版社

线性和非线性规划引论及其应用

费培之 编著

四川大学出版社

内 容 提 要

本书共分九章，包括线性与非线性规划的模型和图解、凸分析初步、最优性条件、线性规划、对偶线性规划、一维最优化、无约束最优化、约束最优化、经济应用等内容。

本书共有396道例题与习题，书末付有答案和提示，便于教学。

本书体系完整，结构合理，取材适当，深入浅出。可作为有关专业本科生和研究生的教材。如果略去某些数学推导，也可作为大专生的教材。对于有关工程技术人员，也是一本合适的参考书。

责任编辑：廖　斌

封面设计：李　玫

线性和非线性规划

引论及其应用

费培之　编著

四川大学出版社出版发行　（成都四川大学内）

四川省新华书店经销　西南测绘制印厂印刷

开本：787×1092 毫米 1/16　印张：18.87　字数400千

1989年12月第1版　1989年12月第1次印刷

印数：1—1400册

ISBN 7-5614-0249-X/O·43　定价：3.75元

前　言

近年来，数学、运筹、经济、工程、管理、计算等有关专业都相继开设了线性和非线性规划方面的课程。为适应教学与科研发展的需要，在作者多年使用的讲义的基础上，并参考国内外有关文献资料，编写了本书。

线性与非线性规划是近三四十年发展起来的，在运筹学中特别重要的，应用广泛并且十分活跃的一个分支。

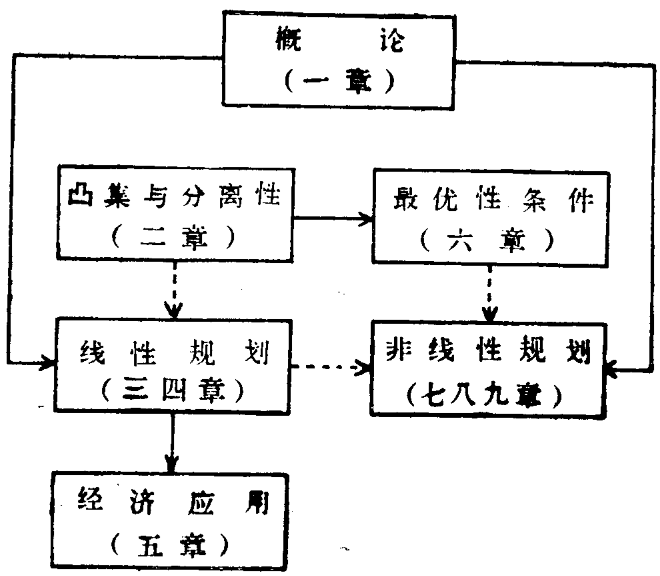
人们在实际工作中常常遇到许多决策问题，如何用线性或非线性规则的数学模型来描述这些问题？当建立线性或非线性规划的模型后，如何进行分析并求出最优解？这就是本书要讨论的问题。

通过对数学模型的一般讨论，以及线性与非线性规划的若干模型和图解，使读者对线性与非线性规划有一个初步的了解，并提高运用线性与非线性规划解决实际问题的兴趣与能力。

为了使读者对线性规划在经济中的应用有一个较系统较全面的分析和了解，书中专门设置了“经济应用”一章。

在书中共编入了396道例题与习题，这是作者在十几年的教学过程中逐步搜集，整理和积累而成的，各章习题紧密配合教材，有助于加深对基本内容的掌握和理解。有的习题是正文的补充，若课时较多，可加在正文中学习，若课时较少，也可以略去。为便于教学，在附录中给出了部分习题的答案和提示。

本书包括了线性与非线性规划的基本理论，方法和应用，对线性与非线性规划提供了入门性的，较系统的和完整的论述。在编写中注意了各部分内容的相对独立性，便于读者根据自己的需要进行取舍。各部分内容之间的关系如右图，虚线箭头表示，在略去前面一部分内容后，对后面一部分内容的学习不会有多大困难。



本书可作为有关专业本科生和研究生的教材。如果略去某些理论部分的内容和数学推导，也可作为大专生的教材。

本书是在四川大学出版社的鼓励和支持下完成的，作者对此深表感谢。

蒙四川省运筹学会理事长敖硕昌教授的审阅和推荐，陈度副教授和夏伟民副教授审阅过书稿，在此一并致谢。感谢韩薇同志绘了插图。

作　者

一九八九年三月于四川大学

符 号 说 明

大写字母，如A，B，X，S等，表集或矩阵。

小写粗体字母，如$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$等，表向量或集的元。

小写字母，如a，b，f，g，α，β等，表数量或函数。

R：实数集

ϕ：空集

I：单位矩阵或指标集

R^n：n维欧氏空间

$R^{m\times n}$：R上所有m×n矩阵的集

A^T：矩阵A的转置

$\boldsymbol{\alpha}^T$：向量$\boldsymbol{\alpha}$的转置

r(A)，detA分别表矩阵A的秩，行列式

$A_{i\cdot}$：矩阵A的第i行

$A_{\cdot j}$：矩阵A的第j列

0：数量零，或零向量，或零矩阵，从上下文自然可以区分开

sup，inf 分别表上、下确界

int S，clS，bdS 分别表集S的内部，闭包，边界

∃：存在一个

∀：每一个

⊥：正交

max，min 分别表极大化，极小化

s.t.：受约束于

A⊂B：集A是集B的子集

A＼B：属于A而不属于B的元之集

∪，∩：集的并，交

＋，－：数量或向量或矩阵的加，减

$\boldsymbol{x}\in S$：$\boldsymbol{x}$属于集S

$\boldsymbol{x}\notin S$：$\boldsymbol{x}$不属于S

$\boldsymbol{x}\geqslant 0$：$\boldsymbol{x}$的每个分量非负

$\boldsymbol{x}\ngeqslant 0$：$\boldsymbol{x}$有负分量

$\boldsymbol{x}\neq 0$：$\boldsymbol{x}$至少有一个分量不为零

$o(\lambda)$：关于λ的高阶无穷小

$\|\boldsymbol{x}\|$：$\boldsymbol{x}$的欧氏模

$\triangleq$：定义为，表示为

目　　录

第一章　概论

§1.1　最优化……………………………………………………………………（ 1 ）

§1.2　数学规划问题………………………………………………………………（ 2 ）

§1.3　线性与非线性规划应用实例……………………………………………………（ 3 ）

§1.4　图解法……………………………………………………………………（ 8 ）

习题一

第二章　凸集与分离性

§2.1　凸集……………………………………………………………………（ 13 ）

§2.2　凸包……………………………………………………………………（ 15 ）

§2.3　凸集的分离性………………………………………………………………（ 16 ）

§2.4　极点……………………………………………………………………（ 19 ）

§2.5　凸锥……………………………………………………………………（ 20 ）

习题二

第三章　单纯形法

§3.1　标准形式……………………………………………………………………（ 25 ）

§3.2　单纯形法……………………………………………………………………（ 27 ）

§3.3　线性规划的几何理论……………………………………………………………（ 37 ）

§3.4　第一个可行基………………………………………………………………（ 44 ）

§3.5　二阶段法……………………………………………………………………（ 49 ）

§3.6　备选最优解和次最优解…………………………………………………………（ 55 ）

§3.7　修正单纯形法………………………………………………………………（ 57 ）

§3.8　有界变量问题………………………………………………………………（ 61 ）

§3.9　退化问题和Bland规则…………………………………………………………（ 69 ）

习题三

第四章　对偶

§4.1　对偶线性规则………………………………………………………………（ 83 ）

§4.2　对偶的基本性质……………………………………………………………（ 86 ）

§4.3　对偶单纯形法………………………………………………………………（ 93 ）

§4.4　备选对偶最优解……………………………………………………………（ 96 ）

§4.5　原始—对偶单纯形法…………………………………………………………（ 97 ）

习题四

第五章　经济应用

§5.1　松驰变量，剩余变量和人造变量的经济意义……………………………………（ 109 ）

§5.2　影子价格……………………………………………………………………（ 112 ）

§5.3　机会成本和新产品的投产…………（115）
§5.4　对偶的经济意义…………（117）
§5.5　产品价格的变化…………（121）
§5.6　资源限额的变化…………（125）
§5.7　技术系数的变化…………（128）
§5.8　新的资源限制…………（130）
§5.9　生产计划的调整…………（132）
习题五
第六章　非线性规划的最优性条件
§6.1　无约束问题的最优性条件…………（140）
§6.2　等约束问题的最优性条件…………（143）
§6.3　不等约束问题的最优性条件…………（146）
§6.4　等和不等约束问题的最优性条件…………（151）
§6.5　约束规范…………（157）
§6.6　凸函数…………（162）
§6.7　凸规划…………（165）
习题六
第七章　一维最优化
§7.1　分数法…………（174）
§7.2　黄金分割法…………（178）
§7.3　二次插值法…………（183）
§7.4　三次插值法…………（186）
习题七
第八章　无约束最优化
§8.1　旋转方向法…………（192）
§8.2　共轭方向…………（195）
§8.3　Powell法…………（199）
§8.4　最速下降法…………（204）
§8.5　牛顿法…………（207）
§8.6　共轭梯度法…………（209）
§8.7　变尺度法…………（214）
习题八
第九章　约束最优化
§9.1　近似规划法…………（239）
§9.2　可行方向法…………（241）
§9.3　梯度投影法…………（247）
§9.4　简化梯度法…………（255）
§9.5　罚函数法…………（260）
§9.6　障碍函数法…………（262）
习题九
附录　习题参考答案和提示
参考文献

第一章　概　　论

§1.1　最优化

一个复杂的系统，往往有许多可能的决策，最优化就是从这些所有可能的决策中选取最好决策的一门科学。最优化的理论和方法在工程、经济、管理、军事、系统分析和计算机科学等各个领域有着广泛的应用，并且日益显示其重要性。

一个决策过程通常包括密切相关的四个阶段：

1).形成问题；

2).建立模型；

3).分析和求解模型；

4).检验和改善模型。

这些阶段不是截然分开的，它们之间相互影响，在实际决策过程中常常是交叉进行的。

形成问题是决策过程的第一阶段。首先要深入了解实际情况，明确需要解决什么问题，以及希望达到什么目标等。其次要搜集有关资料、数据等，为建立模型作好准备。

第二阶段是建立数学模型。这是决策过程的一个重要阶段，也是困难的一个阶段。一个好的数学模型，应当完整地体现所要解决的实际决策问题，同时应当尽可能简单明确，易于实现。为了使模型能完整地体现所要解决的问题，应当充分考虑影响决策的种种因素，这就有可能导致模型过于复杂，难于实现。为了使模型简单实用，应当舍弃一些次要因素，并简化各因素间的关系，这就有可能导致模型过于理想化，离实际问题相去甚远。因此，要建立一个好的数学模型，不是容易的，这需要有扎实的基础理论，有效的方法技巧，以及丰富的实际经验。

一般说来，建立一个数学模型应考虑下面四个方面。

1.确定时间范围

一个决策从开始到终止的时间叫规划期或计划期。时间期限的长短一般是决策本身的性质所决定的。一项重大科研计划的规划期可能在十年以上。一个公司的经营计划可能是一年或几年。一个工厂的生产计划可能是一年或一月，等等。

2.确定决策变量和参数

在影响决策的诸因素中，有的是可控制的，有的是不可控制的。对于前者，用决策变量来表示，对于后者，用参数来表示。决策变量和参数的选取是否恰当，直接影响模型的性质。若选取恰当，则可使模型简洁，易于处理。若选取不恰当，则可使模型复杂，难于处理。

3.确定约束条件

找出决策变量和参数间的定量关系，这些关系一般可用数学式子来表示，称为约束条件。

4.确定目标函数

评价一个决策的好坏,应当有一个定量的标准。这个标准,一般用目标函数的极大化或极小化来表示。例如，目标函数可以是利润最大，成本最小，总产量最大，某种贵重的原料消耗最少，或者生产时间最短等等。评价一个决策的标准并不都是单一的，这时可用求多个目标函数的极大化或极小化来表示。

决策过程的第三阶段是分析和求解模型。对一个决策问题当然不会满足于建立模型，而应当找出最优决策。因此，在建立模型之后，首先应分析模型的性质，结构和特点，然后选择一个合适的方法，最后求出最优解。求最优解的计算一般都利用计算机。现在，利用微机求最优解的问题，正受到普遍的欢迎和重视。

决策过程的第四阶段是检验和改善模型。如果所求得的最优解能够满足决策的要求，则这个解就是要找的最优决策。如果解不满足决策的要求，则可从中得到信息以发现错误。一般地，可能发生的错误有下面一种或几种：

1)．参数的确定可能有错；

2)．可能忽略了某些重要的决策变量，或者包含了与本系统关系不大的决策变量；

3)．约束条件可能有错，或者有遗漏；

4)．目标函数可能没有合理地反映评价决策的定量标准；

5)．模型的结构可能有错。

一旦发现错误，就要修正模型，从而进入决策过程的新的一个循环，直到建立一个合适的模型并求出最优决策。简单说来，一个决策过程如图1.1所示。

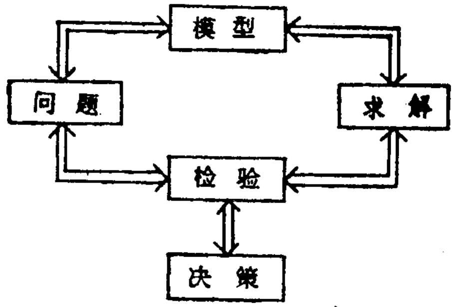


图1.1　**决策过程示意图**

§1.2　数学规划问题

数学规划是运用相当广泛的一类数学模型，它是运筹学的一个重要分支。数学规划问题的一般形式是

$$\min_{x\in S} f(x)$$

其中f：$R^n \to R^1$，R^n表n维欧氏空间，$S\subset R^n$。通常，S是由数学式子描述的。描述S的数学式子叫**约束条件**，S叫**可行域**，每个$x\in S$叫一个**可行点**，或者一个**可行解**，$x\in S$的每个分量叫**决策变量**，或者就叫**变量**。$f(x)$叫**目标函数**。注意到

$$-\min_{x\in S} f(x) = \max_{x\in S}\ (-f(x))$$

所以，也可以把一般形式写为

$$\max f(x)$$
$$x\in S$$

对于数学规划问题，从不同的角度出发，可以有不同的分类。

按照模型中所考虑的时期数，模型可以分为**静态的**（单时期的）**和动态的**（多时期或多阶段的）。**动态规划**就是研究多阶段决策问题的。

按照模型中参数的性质，如果参数是已知常数，则模型称为**确定型的**；如果参数是随机的，则模型称为**随机型的**；如果参数可以变动，而与参数变动对应的最优解的变动是确定的，则模型称为**参数型的**。一般，随机型和参数型的问题比确定型的问题更困难。

按照模型中变量的性质，如果变量的取值是连续的，则模型称为**连续型的**；如果变量的取值是离散的。则模型称为**离散型的**。如果某些变量取连续值，某些变量取离散值，则模型称为**混合型的**。一般，离散型的问题比连续型的问题更困难。

按照模型中函数的性质，如果模型中的函数都是线性的，则称为**线性规划**，否则，称为**非线性规划**。

按照模型中包含决策变量和约束条件的多少，模型可以分为**小型的**，**中型的**和**大型的**。

一般所谓数学规划问题，其目标函数$f(x)$是R^n上实值函数，即f：$R^n\to R^1$。如果目标函数是一个向量值函数，即

$$f(x)=(f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_m(x))$$

其中f_i：$R^n\to R^1$，$i=1$，$\cdots$，m，则这样的模型称为**多目标的**。处理多目标问题的一类重要方法，就是把多目标问题转化为单目标问题。

本课程讨论的是静态的，确定型的，连续型的，单目标的线性与非线性规划问题。

§1.3 线性与非线性规划应用实例

线性与非线性规划在各个领域有着广泛的应用。下面的一些实例只是一个引子，说明如何从各个不同领域中的实际问题形成线性与非线性规划的数学模型。

例1.1（运输问题）

设某产品供应n个销地，B_1，$\cdots$，B_n，销地B_j的需要量为b_j，$j=1$，$\cdots$，n。这些产品来自m个产地，A_1，$\cdots$，A_m，产地A_i的产量为a_i，$i=1$，$\cdots$，m。假设从产地A_i到销地B_j的运输单价是c_{ij}，问如何组织运输使总运费最小。

解　设从产地A_i到销地B_j的运输量x_{ij}为决策变量，则可得线性规划模型如下。

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad \text{（总运价）} \qquad (1.1)$$

$$s.t.\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\leqslant a_i,\ i=1,\ \cdots m\ \text{（产量限制）}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j, \quad j=1、\cdots, n \quad (需量限制)$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i=1, \cdots, m \quad (运量非负)$$
$$j=1, \cdots, n$$

如果进一步假定产销平衡，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

则运输问题具有如下形式。

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1.2}$$

$$s.t. \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=1, \cdots, n$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i=1, \cdots, m$$
$$j=1, \cdots, n$$

例1.2（营养问题）

某饲养场在一个饲养期内需要营养成分B_i至少b_i单位，$i=1, \cdots, m$。在市场上有n种饲料可供选购，饲料A_j的单价是c_j，$j=1, \cdots, n$。已知每单位饲料Aj含营养成分B_i的单位数是a_{ij}，问如何购买饲料使购买费用最小。

解 设饲料A_j的购买量x_j为决策变量，则可得线性规划模型如下。

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad （总费用） \tag{1.3}$$

$$s.t. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \quad i=1, \cdots, m \quad （营养需要）$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1 \cdots, n \quad （购买量非负）$$

例1.3（生产活动问题）

设有m种资源，B_1，…，B_m，从事n种生产活动，A_1，…，A_n，并设

a_{ij} = 生产活动A_j每单位消耗B_i的单位数；

b_i = 资源B_i的可使用量；

c_j = 生产活动A_j每单位的利润。

问如何安排生产活动使总利润最大。

解 设生产活动A_j的生产量x_j为决策变量，则可得线性规划模型如下。

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{（总利润）} \qquad (1.4)$$

$$s.t. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,\ i=1,\ \cdots,\ m \text{（资源限制）}$$

$$x_j \geqslant 0,\ j=1,\ \cdots,\ n \text{（产量非负）}$$

例1.4（下料问题）

设有钢坯150根，每根长15米。现需配套钢材，每套包括7根2米长的和2根7米长的。如果不计下料损耗，问如何下料使配套钢材的套数最多。

解 首先考虑钢坯的所有下料方式，共有3种：

（1）截取7米长的1根，2米长的4根；

（2）截取7米长的2根；

（3）截取2米长的7根。

今设第（i）种截法所截钢坯数x_i为决策变量，则可得线性规划模型如下。

$$\max \frac{1}{2}(x_1 + 2x_2) \qquad \text{（总套数）} \qquad (1.5)$$

$$s.t.\ x_1 + x_2 + x_3 = 150 \qquad \text{（钢坯限额）}$$

$$\frac{1}{2}(x_1 + 2x_2) = \frac{1}{7}(4x_1 + 7x_3) \qquad \text{（配套限制）}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \text{ 整数}$$

例1.5（定位问题）

设某城市的街道成纵横交叉的网状。今欲建某物资的供应中心，供应本城m个用户，问该中心建在什么位置合适。

解 将用户设想为平面上的点，并可设在该城市的平面坐标系上，某物资所供应的m个用户的坐标为（a_i，b_i），$i=1$，…，m。假定供应中心的位置在（x，y），则x，y为决策变量。如何评价中心位置的好坏呢？可以用下述原则：从中心到任何一个用户的最大距离越小越好。由于城市的街道是纵横交叉的，因此，任意两用户间的距离不应取直线距离，而应取矩形距离。这样一来，从供应中心（x，y）到用户（a_i，b_i）的距离就是

$$|x-a_i| + |y-b_i|$$

于是，供应中心的定位问题归结为下面的极大一极小化问题：

$$\min_{x,y}\left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant m} [|x-a_i| + |y-b_i|] \right\} \qquad (1.6)$$

其中x，y的取值受该城市可供供应中心选择范围的限制。例如，$a\leqslant x\leqslant b$，$c\leqslant y\leqslant d$。现在引进新的变量z。

$$z = \max_{1\leqslant i\leqslant m} [|x-a_i| + |y-b_i|]$$

则问题（1.6）可转化为非线性规划问题

$$\min f(x,\ y,\ z) = z \qquad (1.7)$$

$$s.t.\ g_i(x,\ y,\ z) = z - |x-a_i| - |y-b_i| \geqslant 0$$
$$i = 1,\ \cdots,\ m$$
$$a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d$$

容易证明，问题（1.6）与（1.7）在下述意义下是等价的：$(x^*,\ y^*)$是问题（1.6）的最优解，其充要条件是$(x^*,\ y^*,\ z^*)$是问题(1.7)的最优解，且存在$k(1 \leqslant k \leqslant m)$，使$z^* = |x^* - a_k| + |y^* - b_k|$。如果引进更多的变量，还可以把定位问题的非线性规划模型（1.7）转化为线性规划模型（习题1.1）。

例1.6 （离散最优控制问题）

考虑有M个时期的控制系统，以向量y_0表该系统的初始状态。当用控制向量u_k施加于该控制系统时，使该系统从状态y_{k-1}变到状态y_k：

$$y_k = y_{k-1} + \Phi_k(y_{k-1},\ u_k)$$
$$k = 1,\ \cdots,\ M$$

其中Φ_k为向量值函数。由控制向量序列$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_M$所产生的状态向量序列$y_1, y_2, \cdots, y_m$称为**轨道**。控制过程如图1.2所示。于是，离散最优控制问题可用下面的非线性规划模型来描述。

$$\min f(y_0, y_1, \cdots, y_M, u_1, \cdots,\ u_M) \tag{1.8}$$
$$s.t.\ y_k = y_{k-1} + \Phi_k(y_{k-1},\ u_k)$$
$$g_k(u_k) \geqslant 0$$
$$f_k(y_k) \geqslant 0 \qquad k = 1,\ \cdots,\ M$$
$$h(y_0, y_1, \cdots, y_M, u_1,\ \cdots,\ u_M) \geqslant 0$$

其中f，g_k，f_k、h是实值函数。

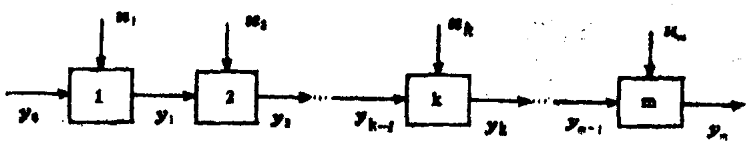


图1.2　离散控制系统示意图

例1.7（跨流域补偿调节问题）

设在一个地区内的河流及其支流形成若干水系，分布在这些水系上的水电站，组成一个**跨流域系统**。在这个系统中，有调节水库的水电站称为**有库电站**，没有调节水库的水电站称为**迳流式电站**。一个迳流式电站，如果它的上游没有调节水库，则称为**纯迳流式电站**。所有纯迳流式电站构成一个子系统，称为**无调节系统**，其余所有电站构成另一个子系统，称为**调节系统**。这样，一个跨流域系统就分解成了调节系统和无调节系统两个子系统。如图1.3所示。

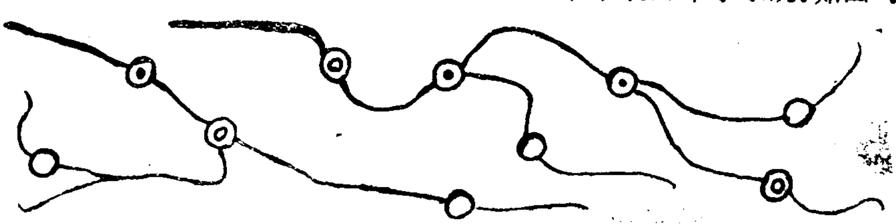


图1.3　跨流域水电站群示意图

◎　有库电站　⊙迳流式电站　○纯迳流式电站

在跨流域补偿调节的优化设计中，对无调节系统可单独处理，并把计算结果直接引入调节系统进行补偿调节。对于调节系统，以

$$\{1,2,\cdots,r\}$$

表所有有库电站标号集，以

$$\{r+1,\ r+2,\ \cdots,\ m\}$$

表所有迳流式电站标号集。现在考虑补偿调节的一个计算期，例如一年或几年，并把一个计算期按月或旬分为q个计算时段，则跨流域水电站群之间的关系可用下列各组约束条件描述。

1.水量平衡

各电站各时段的下泄水量QX_{ij}等于发电水量Q_{ij}与弃水量$\widetilde{Q_{ij}}$之和：

$$QX_{ij}=Q_{ij}+\widetilde{Q_{ij}},i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,q \tag{1.9}$$

2.水量限制

各电站各时段的下泄水量QX_{ij}受最小下泄量Q_{ij}^{min}和最大下泄量Q_{ij}^{max}的限制：

$$Q_{ij}^{min}\leqslant QX_{ij}\leqslant Q_{ij}^{max},\ i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,q \tag{1.10}$$

3.水位限制

各电站各时段的平均水位Z_{ij}受允许最低水位Z_{ij}^{min}和允许最高水位Z_{ij}^{max}的限制：

$$Z_{ij}^{min}\leqslant Z_{ij}\leqslant Z_{ij}^{max},\ i=1,\cdots,r,\ j=1,\cdots,q \tag{1.11}$$

由于水位与库容满足函数关系

$$Z=f_i(V),\ i=1,\ \cdots,r \tag{1.12}$$

因此，水位限制可转化为库容限制，即各电站各时段的平均库容V_{ij}受允许最小库容V_{ij}^{min}和允许最大库容V_{ij}^{max}的限制：

$$V_{ij}^{min}\leqslant V_{ij}\leqslant V_{ij}^{max},\ i=1,\cdots,r,j=1,\cdots\cdots,q \tag{1.13}$$

4.出力限制

各电站各时段的出力P_{ij}受最小出力N_{ij}°和装机容量NY_i的限制：

$$N_{ij}^{\circ}\leqslant P_{ij}\leqslant NY_i,\ i=1,\cdots,r,\ j=1,\cdots,q \tag{1.14}$$

5.水轮机出力限制线限制

设水轮机的出力限制线是

$$N = a_i H + b_i, \quad i = 1, \cdots, m \tag{1.15}$$

其中a_i，b_i为常数，H为运行水头，则

$$P_{ij} \leqslant N_{ij}, \quad i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, q \tag{1.16}$$

6.系统出力限制

设NG_j为无调节系统在时段j的出力，P为系统总保证出力，则

$$P \leqslant NG_j + \sum_{i=1}^{m} P_{ij}, \ j = 1, \cdots, q \tag{1.17}$$

综上，跨流域补偿调节优化设计问题可以归结为一个多目标非线性规划问题，即在上述各组约束和变量非负的条件下，求系统的总保证出力P和总发电量E都最大，其中

$$E = \sum_{j=1}^{q} \left(NG_j + \sum_{i=1}^{m} P_{ij} \right)$$

§1.4 图解法

为便于理解线性与非线性规划问题，首先考虑只有两个决策变量的简单情形。在这种情形，可以利用几何直观来求解，这就是所谓图解法。

例1.8 考虑线性规划问题

$$\begin{aligned} & \min(4x_1 + x_2) \\ & s.t. \ 2x_1 + x_2 - 4 \geqslant 0 \\ & \quad 2x_1 - x_2 + 4 \geqslant 0 \\ & \quad x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

目标函数和4个约束函数是

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2 \\ & q_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_8 - 4 \\ & q_2(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 + 4 \\ & q_3(x_1, x_2) = x_1 \\ & q_4(x_1, x_2) = x_2 \end{aligned}$$

同时满足给定约束条件的所有值，形成LP(1.18)的可行域S，在图1.4中用阴影部分表示。注意到

$$4x_1 + x_2 = C$$

表示一条直线，称为目标函数的值为C的**等高线**，其中C为常数。在图中，等高线用虚线表示。从图1.4，$C = 4$的等高线与可行域S交于点$\mathbf{x}^* = (0,4)^T$。在$\mathbf{x}^*$，沿目标函数的梯度方向$\nabla f(\mathbf{x}^*) = (4,1)^T$，正好是等高线的值$C$增加的方向。由于问题是极小化，所以$\mathbf{x}^* = (0,4)^T$

就是$LP(1.18)$的最优解，而最优值就是4。

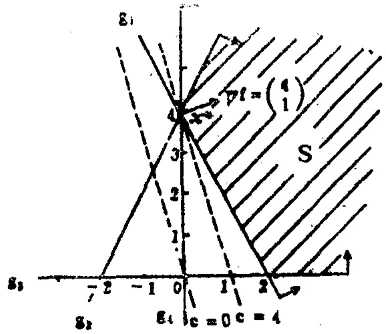


图1.4　线性规划（1.18）的图解

例1.9　考虑非线性规划问题

$$nin\ [(x_1-4)^2+(x_2+4)^2] \quad (1.19)$$

$$s.t.\ -x_1^2-x_2+1\geqslant 0$$

$$x_2+3\geqslant 0$$

目标函数和2个约束函数是

$$f(x_1,x_2)=(x_1-4)^2+(x_2+4)^2$$

$$g_1(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2+1$$

$$g_2(x_1,x_2)=x_2+3$$

同时满足给定约束条件的所有值，形成$NLP(1.19)$的可行域S，在图1.5中用阴影部分表示。注意到

$$(x_1-4)^2+(x_2+4)^2=C$$

的等高线是以（4，－4）为园心，以$\sqrt{C}$为半径的园周，在图中用虚线表示。由于是极小化问题，所以应找与可行域相交的具有最小半径的园周。从图1.5，这个园周正好是$C=5$的园周，它与可行域相交于$\mathbf{x}^*=(2,-3)^T$。因此，$NLP(1.19)$的最优解是$\mathbf{x}^*=(2,-3)^T$，最优值是5。

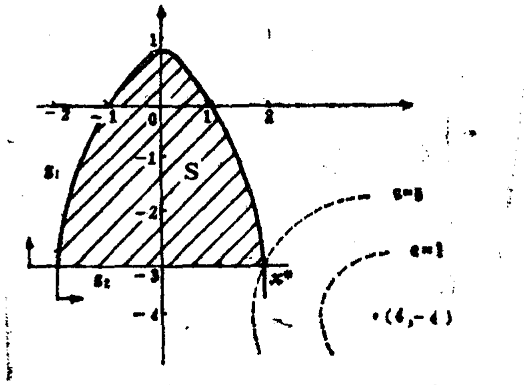


图1.5　非线性规划(1.19)的图解

习　题　一

1.1　引进新的变量，把$NLP(1.7)$化为线性规划问题。

1.2　今有m件工作，欲分配m个人去作，每人恰好作一件。假定第i个人去作第j件工作的效益值为c_{ij}，问应如何分配工作使总效益值最大。试列出数学模型。

1.3　某公司有1000万元进行投资，可供投资的单位及有关信息如下表：

投资单位	信用等级	到期年限	到期收益	税率
A_1	2	9年	4.3%	免
A_2	2	15年	5.4%	50%
A_3	1	4年	4.8%	50%
A_4	1	3年	4.4%	50%
A_5	5	2年	4.5%	免

假定对投资有下列政策性限制：

（1）对A_2，A_3和A_4的投资总额不少于400万元；

（2）平均信用等级不超过1.4（较低的信用等级表示信用程度较高）；

（3）平均到期年限不超过5年。

问应如何投资，使付税后的总收入最大。试列出数学模型。

1.4　设某厂引用没有污染的河水，然后将污水又排放回该河流。污水中含有污染物A和B。根据环境保护的要求，应对污水先进行处理，在达到排放标准后，才允许排放。假定该厂有四种处理污水的方式，其处理效率及费用如下表：

处理方法	1	2	3	4
处理后含A（克/米^3）	a_1	a_2	a_3	a_4
处理后含B（克/米^3）	b_1	b_2	b_3	b_4
费　　用（元/米^3）	c_1	c_2	c_3	c_4

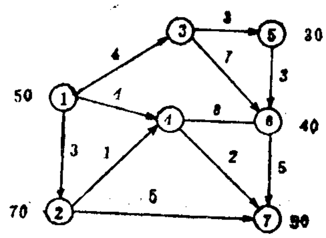
假定：（1）河水的流量是M米^3/天；（2）工厂每天至少要处理污水L立方米；（3）要求河水中的污染物每立方米含A不超过a克，含B不超过b克；（4）污染物的加入或去除都不影响河水的流量。试列出处理污水的总费用最少的数学模型。

1.5　设有n个城市，在同一条河中取用饮水，同时又向该河排放污水。为保证饮水符合卫生标准，在每个城市各建一水厂。已知在河段i的下列参数：

排出污染物的量（公斤/天）	流量（米^3/天）	污染物的允许上限（公斤/天）	处理费用（元/公斤）	污染物的最大去除率
a_i	Q_i	b_i	c_i	η_i

假定：(1) n个城市依次位于该河的上游到下游，城市i在河段i，$i=1,\cdots,n$；(2)河段i的污染物在下游河段j仍存留的百分比为a_{ij}；(3) 污染物的加入或去除都不影响流量。试建立各水厂脱除污染物的总费用最少的数学模型。

1.6　某公司有2个仓库，用节点1和2表示，有2个转运站，用节点3和4表示，有3个商店，用节点5,6和7表示。仓库旁的数字表货物存贮量，商店旁的数字表货物需要量。箭头表运输方向，箭杆旁的数字表运输单价。试建立从仓库到商店的货物运输总费用最少的数学模型。



1.7　某厂按订货要求安排年度生产计划。该厂实行2班制，在第j月的有关参数如右表，$j=1,\cdots,12$。

订货量	最大生产量		生产单位成本		存贮单位成本
	1班	2班	1班	2班	
a_j	b_{1j}	b_{2j}	c_{1j}	c_{2j}	d_j

假定：(1) 各月末按订货量一次供货；(2) 在年末，生产量与订货量平衡。问如何组织生产使全年生产总成本最少。试列出数学模型。

1.8　修一条公路，分

公路段	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
可取土量（米^3）	30	／	／	10	100
需填土量（米^3）	30	120	140	50	／