

现代应用数学手册

计算方法分册

清华大学应用数学系《现代应用数学手册》编委会



北京出版社

清华大学应用数学系
《现代应用数学手册》编委会

现代应用数学手册

计算方法分册

北 京 出 版 社

内 容 简 介

本书是进行科学计算的常备工具书,内容新颖,查阅方便,实用性强。主要介绍生产、科研、管理、教学等实践中在电子计算机上使用的各种计算方法和技巧,其中包括节省机器时间、节省机器内存等高效率的计算方法和技巧。全书分为十三章,依次为插值法、函数逼近与曲线拟合、数值积分与数值微分、方程求根、线性方程组的直接解法和迭代解法、矩阵特征值与特征向量计算、常微分方程初值问题和边值问题的数值解法、偏微分方程的数值解法、积分方程数值解法。每种方法均配有例题,便于读者加深理解、掌握和使用。在附录中有二十个经过计算机验算的程序供读者选用。同时还附有中文—外文索引、外文—中文索引以及外国人名表。本书可供广大科研人员、技术人员、管理干部、计算工作者、大中专院校师生和研究生使用。

清华大学应用数学系《现代应用数学手册》编委会

现代应用数学手册

计算方法分册

Xiandai Yingyong Shuxue Shouce

*

北 京 出 版 社 出 版

(北京北三环中路6号)

新华书店北京发行所发行

香河县第二印刷厂印刷

*

850×1168毫米 32开本 28.875印张 733,000字

1990年3月第1版 1990年3月第1次印刷

印数:1—930

ISBN 7-200-00160-0/G·35

定 价: 12.65 元

《现代应用数学手册》编写说明

随着电子计算机科学技术的飞速发展,人类正在进入信息时代。信息时代是数学与应用数学大发展的时代,人类长期积累起来的知识体系,正在经历着第三次数学化。数学思想、数学模型与数学方法,随着计算机的广泛应用,日益广泛地渗透到社会生活各个领域。

当代,除了传统的数学理论如微积分、微分方程、特殊函数、复变函数、变分法和计算方法等已经得到广泛的应用外,过去被认为比较抽象的一些数学理论如数理逻辑、抽象代数、泛函分析,以及一些新兴的数学理论如运筹学、优化方法、随机分析、数值分析、离散数学、计算机科学等,也逐渐地成为社会生产、科学研究、工程技术、经济和社会管理中不可缺少的工具。应用数学的研究范围正在迅速地扩大。

为了满足日益增长的对现代应用数学工具的社会需要,清华大学应用数学系《现代应用数学手册》编委会组织编写了这部手册。这是一部中型应用数学工具书,读者对象是理、工、农、医、经济和社会管理等各领域具有大、中专文化程度的广大工程技术人员、科研人员,大、中学校教师以及其他使用数学工具的实际工作者,大、中专院校的学生和研究生等。

这部手册将分为《基础数学》、《分析与方程》、《应用分析》、《计算方法》、《概率与统计》、《运筹与优化》、《离散数学》等分册,由北京出版社陆续出版。各分册的内容自成体系,互相独立,以便读者按需选用。

为了使本手册成为一部高质量的工具书,编者力求使它具有

下列特点:

1. 内容注重“新颖” 本书努力作到内容现代化,除应用现代观点介绍古典内容外,对已得到较广泛应用的新理论、新方法尽量优先入选。

2. 选材突出“应用” 本书在选材上突出数学理论的“应用”,以通俗易懂的方式着重介绍在现代科学技术、经济管理 etc 实际领域中应用广泛而较成熟的数学理论和方法。对于那些目前应用较少的纯数学理论,暂不收入。

3. 紧密结合计算机的应用 为了更有效地应用数学方法解决各类实际问题,广大科研、技术和管理人员迫切要求数学方法与计算机应用相结合,以提高工作效率。为此,多数分册在附录中提供了相当数量的常用语言程序(用FORTRAN语言编写),供读者选用。

4. 编排体例尽量方便读者查阅 本书采用了一套较为完备的索引体系。除正文中各章、节的编号依惯例一律采用国际十进制编码外,对于正文中重要的定义、定理、例题、公式、图、表等还采用一种与正文中章、节相匹配的“三位制”统一编码体制。此外,为了便于读者阅读外文资料,附录中附加了“中文—外文索引”与“外文—中文索引”。

5. 数学符号力求统一与国际化 鉴于目前国内各种文献书籍中使用的数学符号不够统一与国际化,给读者阅读时带来困难,本书原则上采用国际数学界的权威著作《数学百科辞典》(Encyclopedic Dictionary of Mathematics/EDM)中的符号为标准,对于不在EDM中的其他数学符号,则选用较为通用者,便于读者正确地阅读、理解与应用。

本书的编撰得到清华大学应用数学系领导的热心支持。应用数学系内外的许多教师及科研工作者的大力支持,直接或间接的关心和指导,才使本书得以问世。在编辑出版工作中,一直得到北京出版社的热情支持与帮助。在此,我们一并深表谢意。

对于本书的缺点和错误，我们热情地欢迎广大读者批评、指正。

清华大学应用数学系
《现代应用数学手册》编辑委员会
1990年1月于北京

计算方法分册编者说明

为了提高科学计算及使用电子计算机的效率，广大科技工作者、管理人员和大中专院校师生，迫切需要了解 and 熟悉各种类型数学问题的数值计算方法，以便从中选取合适的方法，并编制程序上机计算。适应这一要求，我们把电子计算机上使用的各种方法、公式、算法、例题以及应用程序精选、汇编成册，以供查阅参考。

作为一本工具书，本手册既考虑到各类计算方法的齐全，又兼顾到内容的新颖，因此，既选编常用的方法又尽量选编高效率的新方法，淘汰了一些陈旧的方法。

附录中二十个程序，用 FORTRAN 语言编写，这些程序是在 Universe-68 (宇宙-68) 微型计算机上调试通过，并用例题验证了程序的正确性。参加调试程序的人员有顾金生、杨苗仁、姜爱民、殷国忠、李燕玲等同志，我们在此表示衷心的感谢。

《现代应用数学手册》

编辑委员会

主 编：马振华

编 委：（依姓氏笔画为序）

刘坤林 陆 璇

陈景良 李文汉

郑乐宁 林元烈

柏 瑞 胡冠章

顾丽珍

计算方法分册

责任编辑委 顾丽珍

章次	编者	校者
1	陈景良	李庆扬
2	陈景良	李庆扬
3	李庆扬	陆金甫
4	陆金甫	李庆扬
5	李庆扬	陆金甫
6	陈景良	顾丽珍
7	顾丽珍	陈景良
8	顾丽珍	陈景良
9	李庆扬	关治
10	关治	顾丽珍
11	关治	顾丽珍
12	陆金甫	关治
	关治	顾丽珍
13	陆金甫	关治

本书用法说明

- 查阅本手册时，除可按章节内容依目录查找外，还可从“中文—外文索引”与“外文—中文索引”查找。
- 凡重要的定义、定理、算法、公式、例、图、表均用黑体字编码标出检索号，例如1.2.4，以方便读者查找。
- 编码与章节号一律采用国际十进制记法。随机插入号按以下的优先次序排列： 1° ， 2° ， 3° ，…；(1)，(2)，(3)，…。
- 正文中凡引用带编码检索号的内容时，直接注明编码号，如(2.1.2)。
- 正文中凡引用不带编码检索号的内容时，用划横线的章节编码号表示，如(2.1)，即第2章，第1节；(2.1.1)，即第2章，第1节，第1段。
- 未编码的公式，一律按节累计编号，如(3-1)，(3-2)，…。
- 本手册中采用的数学符号原则上遵循 EDM，适当增添新的符号。

符 号 表

$+$	加法/正号
$-$	减法/负号
$\pm$	正或负
$\times/\cdot$	乘法
$a \div b / \frac{a}{b} / a/b$	a 除以 b
$=$	等号
$\equiv$	恒等号
$\approx$	约等号
$\neq/\neq$	不等于
$\neq/\neq$	不恒等
$\triangleq$	定义
$\stackrel{\text{def}}{=}$	定义并赋值/赋值
$\sim$	相似
$\cong$	全同
$>$	大于
$<$	小于
$\gg$	远大于
$\ll$	远小于
$\geq$	大于等于
$\leq$	小于等于
$ a $	a 的绝对值
$n!$	n 的阶乘
2	

$\binom{a}{n}$	即 $\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$ (a 为实数)
$\binom{n}{k}/c_n^k$	二项式系数 即 $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$
...	省略号
$\vdots$	省略号
Σ	总和
$\sum_{i=1}^n$	对 i 从1至 n 项求和
$\prod$	连乘/求积
$\prod_{i=1}^n$	对 i 自1至 n 项求积
i	虚数单位 $i=\sqrt{-1}$
$\operatorname{Re} z$	复数 z 的实部
$\operatorname{Im} z$	复数 z 的虚部
$ z $	复数 z 的模
$\arg z$	复数 z 的幅角
$\bar{z}$	复数 z 的共轭复数
(a, b)	开区间
$[a, b]$	闭区间
$(a, b], [a, b)$	半开区间
∞	无穷大
$\longrightarrow$	收敛于/映射
$\Longleftrightarrow$	等价
$\lim a_n$	序列 a_n 的极限
$f(x)$	函数 f 在点 x 的值
$f/f(\cdot)$	函数

$f[\cdot]$	函数 f 的均差
$\frac{df}{dx} / f'$	函数 f 对 x 的导数
$\frac{d^n f}{dx^n} / f^{(n)}$	函数 f 对 x 的 n 阶导数
$\frac{\partial f}{\partial x} / f_x$	函数 f 对 x 的偏导数
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} / f_{xy}$	函数 f 对 x, y 的混合偏导数
$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} / f_{x^m y^n}$	f 先对 x 求 m 次偏导数, 再对 y 求 n 次偏导数
$f(x) \Big _a^b / [f(x)]_a^b$	等于 $f(b) - f(a)$
$\nabla \varphi / \text{grad} \varphi$	φ 的梯度
$\Delta \varphi / \nabla^2 \varphi$	拉普拉斯算子
$\Delta_h \varphi_i$	离散拉普拉斯算子
$\int f(x) dx$	$f(x)$ 对 x 的不定积分
$\int_a^b f(x) dx$	$f(x)$ 对 x 由 a 到 b 的定积分
$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$	$f(x, y)$ 在域 Ω 上的二重积分
$\widetilde{f}(x)$	$f(x)$ 的近似值
$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$	φ 沿方向 n 的方向导数
$A = (a_{ij})_n$	n 阶矩阵其元素为 a_{ij}
$A \triangleq \left[\begin{array}{c} \\ \end{array} \right]$	用方括号表示矩阵

$[A|b]$

A 的增广矩阵

I_n

n 阶单位矩阵

$$D \triangleq \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

对角矩阵

$$L \triangleq \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角矩阵

$$U \triangleq \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角矩阵

A^H

矩阵 A 的共轭转置矩阵

A^T

矩阵 A 的转置矩阵

A^{-1}

矩阵 A 的逆矩阵

A^+

广义逆矩阵

$\text{adj} A / A^*$

方阵 A 的伴随矩阵

$\text{rank} A$

矩阵 A 的秩

$\{A_k\}$

矩阵序列 $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$

$\{x_k\}$

向量序列 $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$

$$x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$= (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 列向量 x , 其中 T 表示转置

$\mathbf{x}^T \triangleq (x_1, x_2, \dots, x_n)$	行向量
$\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$	对角线元素为 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 的对角阵
$\det A / A $	方阵 A 的行列式
Δ_i	矩阵的顺序主子式
$\text{tr} A$	矩阵 A 的迹
$\rho(A)$	A 的谱半径
$\forall$	对于一切… (全称量词)
$\exists$	存在… (存在量词)
$\in$	属于
$\notin$	不属于
$\supset$	包含
$\subset$	包含于
$\cap$	交运算
$\cup$	并运算
$\setminus$	差运算
N	自然数集合
Z	整数集合
Q	有理数集合
R	实数集合
C	复数集合
R^n	n 维实空间
$R^{n \times m}$	$n \times m$ 维实空间
C^n	n 维复空间
$C^{n \times m}$	$n \times m$ 维复空间
E^n	n 维欧几里德空间
$\text{Span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$	由 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ 生成的空间
Ω	解域
$\partial\Omega$	解域边界
Ω_h	离散解域

$\partial\Omega$	离散边界
$C(\Omega)$	Ω 上全部连续函数的集合
$C^n(\Omega)$	Ω 上 n 阶连续可微函数的集合
Sup	上确界
inf	下确界
$\max$	最大
$\min$	最小
$\sin x, \cos x, \tan x$	三角函数
$\arcsin x, \arccos x$	
$\arctan x,$	反三角函数
$\operatorname{Arcsin} x, \operatorname{Arccos} x,$	
$\operatorname{Arctan} x$	反三角函数主值
$\sinh x, \cosh x, \tanh x$	双曲函数
$\exp x / e^x$	以 e 为底的指数函数
$\ln x / \log x$	以 e 为底的对数
$\lg x$	以10为底的对数
$\delta(x)$	δ -函数
Δf	f 的向前差分
∇f	f 的向后差分
δf	f 的中心差分
$\Delta^n f$	f 的 n 阶向前差分
$\Delta^0 f = f$	f 的零阶向前差分
I	不变算子: $If_k = f_k$
E	移位算子: $Ef_k = f_{k+1}$
$\ \cdot\ _v$	向量或矩阵的范数 $v=1, 2, \infty, \dots$
$\operatorname{Cond}(A)$	矩阵 A 的条件数 $v=1, 2, \infty, \dots$
$(,)$	函数内积或向量点积
$a \leftrightarrow b$	单元 a 和单元 b 交换

$r_i \leftrightarrow r_j$	矩阵的第 <i>i</i> 行与第 <i>j</i> 行交换
$a[1:p]$	<i>p</i> 个元素的一维数组
$a[i, j]/a_{ij}$	矩阵 <i>A</i> 中第 <i>i</i> 行第 <i>j</i> 列的元素
$C[1:n, 1:m]$	
$/C(n, m)$	<i>n</i> 行 <i>m</i> 列矩形数组
O	$f(x) = O(g(x))$ 表示当 $x \rightarrow a$ 时 $f(x)/g(x)$ 有界
o	$f(x) = o(g(x))$ 表示当 $x \rightarrow a$ 时 $f(x)/g(x) \rightarrow 0$
Δ_e	三角形单元 <i>e</i> 的面积
$\sum_{i=0}^n {}'' c_i$	表示在和式中的第一项和最后一项用 $\frac{1}{2}$ 乘
mod	同余, $i = k(\text{mod } n)$ 即 <i>k</i> 除以 <i>n</i> 余 <i>i</i>
dim <i>M</i>	空间 <i>M</i> 的维数
<i>l.i.m</i>	均方收敛
$j = (j_2 j_1 j_0)$	二进制数, 其中 j_2, j_1, j_0 取0或1, $(j_2 j_1 j_0) = j_2 2^2 + j_1 2^1 + j_0 2^0$
$R_n^m[a, b]$	有理多项式集合
	$R_n^m[a, b] = \left\{ \frac{P_m}{Q_n} \mid P_m \in H_m, Q_n \in H_n, \right.$
	$\left. Q_n(x) > 0, \forall x \in [a, b] \right\}$
H_n	<i>n</i> 阶多项式的集合
vert(σ)	单纯形 σ 的顶点
mesh(σ)	单纯形 σ 的格长
dima(σ)	单纯形 σ 的直径
$A = \langle a, r \rangle$	以 <i>a</i> 为中心, <i>r</i> 为半径的球
mid(<i>A</i>)	球 <i>A</i> 的中心
rad(<i>A</i>)	球 <i>A</i> 的半径