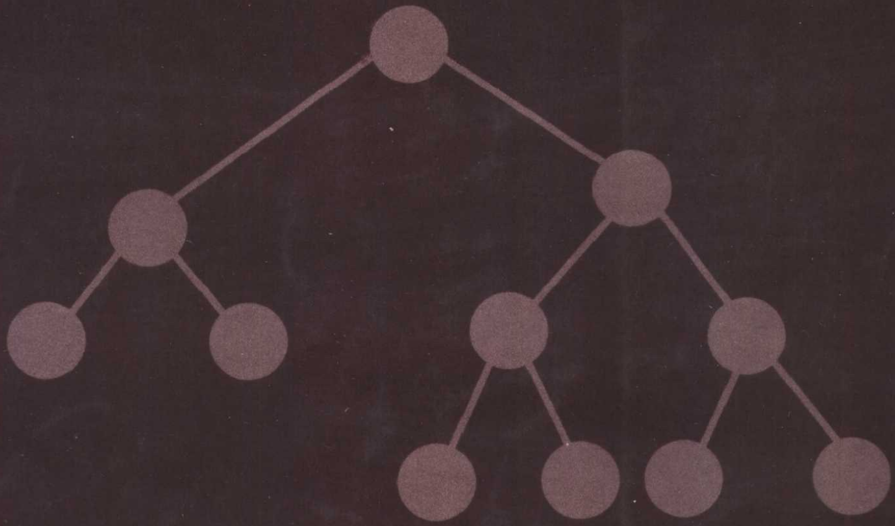
计算机数学基础教程 金一庆 金廷赞 张三元 编

Discrete Mathematics

Discrete Mathematics
Discrete Mathematics
Discrete Mathematics
Discrete Mathematics



Discrete Mathematics

离散数学

阅

浙江大学出版社

离 散 数 学

——计算机数学基础教程

金一庆　金廷赞　张三元　编

浙江大学出版社

离散数学

——计算机数学基础教程

金一庆　金廷赞　张三元编

责任编辑　涂红

*　*　*

浙江大学出版社出版

（杭州玉古路 20 号　邮政编码 310027）

（E-mail：zupress@mail. hz. zj. cn）

浙江大学出版社电脑排版中心排版

杭州金融管理干部学院印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

*　*　*

787×1092　16 开　14 印张　358 千字

1998 年 9 月第 1 版　　1999 年 12 月第 2 次印刷

印数 2001－4000

ISBN 7-308-02026-6/O・223　定价：17.00 元

前　言

自然界广泛地存在着离散事物，离散数学就是用适当的数学工具来描述和研究离散对象以及离散对象(Discrete Objects)之间各种相互关系的数学分支。尤其在计算机科学迅速发展的今天，离散数学的研究就更重要了。离散数学的内容很广，如集合论、组合论、图论、群论、数理逻辑等，由于概率论、算法论等也研究离散对象，有人把它们也归纳到离散数学之中。通常，概率论，算法分析已单独列为一门课，此教材中就不包括这些内容了。作为一门计算机专业的基础课，我们着重介绍集合论(集合，自然数集，二元关系)，组合论(离散函数，计数与生成)，图论(图，树)，群论(群，环，域)以及数理逻辑(命题逻辑，谓词逻辑)中较基本的及与计算机科学有较密切联系的内容。

本教材是按本人上课用的讲稿写的。最早参考的是金廷赞老师的离散数学讲义，素材主要取自 Liu, Chung Laung 在美国 Ellinois 大学计算机科学系任教时的讲义基础上写的课本："Elements of Discrete mathematics"，同时参考了 J. P. Trembley 和 R. Manohar 著的"离散数学结构及其在计算机科学中的应用"，以及 Leon S. Levy 著的"Discrete Structures of Computer Science"，还有 Bobrow 和 Arbib 著的"Discrete Mathematics"等书。后来，又参考左孝凌、张一立、周以铨、洪帆等老师在国内出版的离散数学教材，补充了内容，增加了例子，添上了数理逻辑一章，并在每章后附上了习题。经过 1993 年、1996 年、1997 年三次胶印，每次都作了修改和补充，张三元老师参加了修改工作。

为了引导学生开阔思路，尽量把自己学习的体会贯穿在教材中。例如：把看上去似乎很简单的概念进行深入一些的讲解；增加一些例子以增强感性认识；指出某些常见的错误；加强前后知识之间的联系等。教材自始至终保持数学的严格性，对于如何证明命题的成立，每一章都有一些示范。编入了不少结合计算机应用的启蒙算法，为学生学以致用搭起了桥梁。编此书的愿望是使学生能学到离散数学的思想方法与处理问题的技巧，且希望达到深入浅出，更便于自学的目的。

按讲稿写数学教材是一种尝试，教学效果怎样有待试验，各种缺点在所难免，欢迎大家批评指正。

金一庆于 1998 年 2 月

目　　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一章　集　合

§1　集合

物以类聚，某些离散对象有一种共同的性质，可以把它们看成是具有某种性质的对象的总体，这就是集合的概念。

Δ 集合(Set)：把一些确定的，彼此不同的对象作为一个整体考虑，这个整体称为一个集合。

Δ 元素(Element)：集合里所含的个体称为集合的元素。

通常用大写英文字母表示集合的名称，用小写英文字母，或其后面带上数字表示集合的元素。

$a \in S$，表示 a 是 S 的元素，读作 a 属于 S；$a \notin S$，表示 a 不是 S 的元素，读作 a 不属于 S。$A \subseteq B$，表示 A 的每一个元素都属于 B，读作 A 包含在 B 中，或 B 包含 A；$A \nsubseteq B$，表示 A 中至少有一个元素不属于 B。注意，$\in$ 所表示的是元素与集合的关系，而 $\subseteq$ 则表示两个集合间的关系。

集合的表示法主要有两种：

1. 穷举法(Roster notation)，例如：

$$S = \{2,4,6,8,10\}$$

把所有的元素全罗列出来。

2. 描述法：把集合内元素的性质，特点概括描述出来，如上例：

$$S = \{x \mid x \text{ 是偶数且 } 0 < x \leqslant 10\}$$

集合内元素都满足条件，且凡是满足条件的元素必须全是此集合的元素。

集合里可以没有元素，此集合称为空集，记作 $\varnothing$(Empty)。集合里的元素可以是任何事物，集合本身也是一种事物，当然也可以作为元素属于另一个集合。如：$\varnothing$ 是空集，$\{\varnothing\}$ 不是空集，此集合有一个元素，$\varnothing$ 作为一个元素在此集合里。$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ 有两个元素，这两个元素本身都是集合。

同一集合里不能有相同的元素，同一集合内的元素都是平等的，没有次序先后。但这两个性质在扩充了的集合概念里不一定成立，如：重集里元素可以有若干个相同，有序集里的元素就有次序先后。本章里所讨论的集合没有扩充的概念。

Δ 子集：集合 P 的元素均属于集合 Q，称 P 为 Q 的子集(Subset)。即 $P \subseteq Q$，P 包含在 Q 中。也可以理解成：不属于 Q 的元素也不会属于 P。

Δ 集合相等(相同)(Equal identical)：P 与 Q 包含相同的元素。$P \subseteq Q$，又 $Q \subseteq P$，就得 $P = Q$。

Δ 真子集：若 P 是 Q 的子集，且 Q 的元素中至少有一个不属于 P，称 P 是 Q 的真子集(Proper subset)。$P \subseteq Q$，而 $P \neq Q$，记 $P \subset Q$。

空集 P 是任何集合的子集，因为不属于任何集合的元素也不会属于 $\varnothing$。$\varnothing \subseteq P$，当 P 非空

时，$\varnothing$ 是 P 的真子集，$\varnothing \subset P$。

任何集合 P 总是自身 P 的子集，但不是真子集。

Δ 平凡子集：P 的平凡子集有且只有两个：$\varnothing$ 和 P。

Δ 基数：集合内元素的个数称为此集合的基数(Cardinality)。也称基度，势。记 $|A|$ 为集合 A 的基数，或记为 Card A。并以基数是有限和无限把集合分为两大类：

Δ 有限集：元素个数是有限个的集合。

Δ 无限集：元素个数是无限个的集合。

集合论中，还有一种重要的集合 —— 幂集。

Δ 幂集(Power set)：集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集，记为 $P(A)$。

$\varnothing$ 只有一个子集 $\varnothing$，$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$，Card $P(\varnothing) = 2^0 = 1$；设 $A = \{a\}$，有两个子集 $\varnothing$ 和 $\{a\}$，$P(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$，Card $P(A) = 2^1 = 2$；设 $B = \{a, b\}$，$P(B) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \varnothing\}$，Card $P(B) = 2^2 = 4$；…，若 A 的基数为 n，从 n 个元素中选取 i 个不同元素组合的方法有 C_n^i 种 $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$。A 的不同子集个数为 $$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i$$

由二项式定理： $$(x + y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i y^{n-i}$$

令 $x = y = 1$，$(1 + 1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$

可见 $P(A)$ 的基数 $|P(A)| = 2^n$，这也是幂集名称的来由，有的书上，A 的幂集的记号就写成 2^A。

用计算机对集合进行操作时，虽然集合内元素是无序的，但只能对规定了次序的有限集进行操作。如：$S_n = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 并无先后、大小之分，但 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 已排成一列，便于操作。那么 S_n 的幂集 $P(S_n)$ 中的元素又如何排序呢？以 $S_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ 为例，$P(S_3) = \{B_i | i \in J = \{i | 000 \leqslant i \leqslant 111\}\}$，其中 i 是二进制数，又可向十进制转换，

$$B_0 = B_{000} = \varnothing,\quad B_1 = B_{001} = \{a_3\}$$
$$B_2 = B_{010} = \{a_2\},\quad B_3 = B_{011} = \{a_2, a_3\}$$
$$B_4 = B_{100} = \{a_1\},\quad B_5 = B_{101} = \{a_1, a_3\}$$
$$B_6 = B_{110} = \{a_1, a_2\},\quad B_7 = B_{111} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

这是子集的一种编码方法，每一个子集的编码是二进制的，原集合有多少个元素，二进制编码就有多少位，每位对应一个元素，子集中含有这个元素，编码对应位上应是 1；子集中不含这个元素，对应位上应是 0。这样，2^n 个子集正好有 2^n 个 n 位二进制编码对应，二进制转换成十进制，这 2^n 个子集也就排好了序。有了次序，便于计算机存贮和操作。

§2　集合的运算及文氏图

我们常常需要研究集合之间的关系，或用一些集合来构造另一些集合，这就需要讨论集合的运算。

Δ 全集：包含当前讨论的所有元素的集合称为全集(Complete)，常记为 U。

Δ 并集：把所有 P 与 Q 的元素并在一起组成新的集合，称为 P 与 Q 的并集(Union)，记为 $P \cup Q$。

$P \cup Q = \{x | x \in P \text{ or } x \in Q\}$

由并集定义，$A \cup B = B \cup A$，$A \subseteq A \cup B$，$B \subseteq A \cup B$，当且仅当 $A \subseteq C$，$B \subseteq C$ 时，$A \cup B \subseteq C$，都是显然的。

A 与 B 的公共元素在 $A \cup B$ 中只出现一次，于是 $|A \cup B| \leqslant |A| + |B|$。在有限集的条件下，当 A 与 B 无公共元素时等式成立。

当且仅当 $A \subseteq B$ 时，$A \cup B = B$。若 $A \subseteq B$，任一 $x \in A \cup B$，或 $x \in A$，或 $x \in B$，若 $x \in A$，由 $A \subseteq B$，$x \in B$，于是 $A \cup B \subseteq B$，又 $B \subseteq A \cup B$，由集合相等定义，$A \cup B = B$。若 $A \cup B = B$，必然 $A \subseteq B$，否则，若 $\exists\, x \in A$，而 $x \notin B$，$x \in A \cup B = B$ 矛盾。

Δ交集：把所有既在 P 中又在 Q 中的元素组成一个新的集合，称为 P 与 Q 的交集(Intersection)，记为 $P \cap Q$。

$P \cap Q = \{x | x \in P \text{ and } x \in Q\}$

由交集定义，$A \cap B = B \cap A$，$A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$，当且仅当 $C \subseteq A$，$C \subseteq B$ 时，$C \subseteq A \cap B$，都是显然的。

$|P \cap Q| \leqslant |P|$，$|P \cap Q| \leqslant |Q|$，在有限集的条件下，当 $P = Q$ 时等号成立。

当且仅当 $A \subseteq B$ 时，$A \cap B = A$。若 $A \subseteq B$，任一 $x \in A$，由 $A \subseteq B$，$x \in B$，于是 $x \in A \cap B$，即有 $A \subseteq A \cap B$，又 $A \cap B \subseteq A$，得 $A \cap B = A$。若 $A \cap B = A$，必然 $A \subseteq B$，否则，若 $\exists\, x \in A$，而 $x \notin B$，$x \notin A \cap B = A$ 矛盾。

Δ差集：把所有在 P 中而不在 Q 中的元素组成一个新的集合，称为 P 减 Q 的差集(Difference of P and Q)，记为 $P - Q$。

$P - Q = \{x | x \in P \text{ and } x \notin Q\}$

集合之差与数的减法有很大差别，Q 不一定是 P 的子集，Q 中可以有不是 P 中的元素，事实上，$P - Q$ 只是在 P 中减去了 P 与 Q 有公共元素，$P - Q = P - (P \cap Q)$。当 P，Q 是有限集，且 Q 是 P 的子集时，才有 $|P - Q| = |P| - |Q|$。

Δ余集：U 是全集，$Q \subseteq U$，称差集 $U - Q$ 为 Q 关于 U 的余集，简称 $U - Q$ 为 Q 的余集，记为 $\overline{Q}$。

$$\begin{aligned} P - Q &= \{x | x \in P \text{ and } x \notin Q\} \\ &= \{x | x \in P \text{ and } x \in \overline{Q}\} = P \cap \overline{Q} \end{aligned}$$

这样，我们可用交运算来代替差运算，在集合运算时很有用。

容易明白，$A \subseteq \overline{B}$ 与 $A \cap B = \varnothing$ 是同一回事。

Δ对称差(Symmetric difference)：把 P 与 Q 的所有元素扣除 P 与 Q 的公共元素组成的集合，称为 P 与 Q 的对称差，记为 $P \ominus Q$。也称为布尔和，因此，有的书上记为 $P \oplus Q$。

$P \ominus Q = (P \cup Q) - (P \cap Q)$

显然，$P \ominus Q = Q \ominus P$

英国数学家 John Venn 发明一种图示方法，能把集合间的关系和运算直观形象地描绘出来，称为文氏图。如图 1-1 所示。

从文氏图可见：

$$\begin{aligned} P \ominus Q &= (P - Q) \cup (Q - P) \\ &= (P \cap \overline{Q}) \cup (Q \cap \overline{P}) \end{aligned}$$

对于 $\cup$，$\cap$，$-$，$\ominus$ 运算的一些特殊情况可以进行如下讨论：

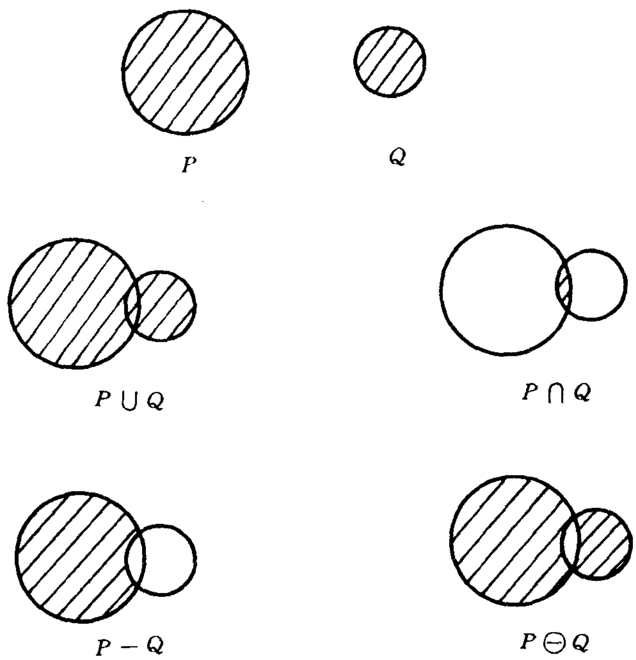


图 1-1

	等式成立	充要条件
①	$P\cup Q=\varnothing$	$P=Q=\varnothing$
②	$P\cup Q=P$	$Q\subseteq P$
③	$P\cap Q=\varnothing$	P 与 Q 无公共元素
④	$P\cap Q=P$	$P\subseteq Q$
⑤	$P-Q=\varnothing$	$P\subseteq Q$
⑥	$P-Q=P$	$P\cap Q=\varnothing$
⑦	$P\ominus Q=\varnothing$	$P=Q$
⑧	$P\ominus Q=P$	$Q=\varnothing$

证明：

$$P\ominus Q=(P\cup Q)-(P\cap Q)=\varnothing\Leftrightarrow P\cup Q\subseteq P\cap Q\Leftrightarrow\begin{matrix}P\subseteq P\cap Q\\Q\subseteq P\cap Q\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}P\subseteq Q\\Q\subseteq P\end{matrix}\Leftrightarrow P=Q$$

集合运算还具有以下性质，利用文氏图可以直观地理解和证实。

设 U 为全集，P,Q,R 为 U 的子集，

1. 交换律：$P\cup Q=Q\cup P$，$P\cap Q=Q\cap P$

$$P\ominus Q=Q\ominus P$$

2. 结合律：$P \cup (Q \cup R) = (P \cup Q) \cup R$

$P \cap (Q \cap R) = (P \cap Q) \cap R$

3. 分配律：(1)$P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$

(2)$P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$

(3)$P \cap (Q \ominus R) = (P \cap Q) \ominus (P \cap R)$

(4)$P \cap (Q - R) = (P \cap Q) - (P \cap R)$

(5)$(P \cup Q) - R = (P - R) \cup (Q - R)$

(6)$(P \cap Q) - R = (P - R) \cap (Q - R)$

但是　$P - (Q \cap R) = (P - Q) \cup (P - R)$

$P - (Q \cup R) = (P - Q) \cap (P - R)$

4. 零一律：$P \cup \varnothing = P, P \cap \varnothing = \varnothing$

$P \cup U = U, P \cap U = P$

5. 互补律：$P \cup \overline{P} = U, P \cap \overline{P} = \varnothing$

6. 对合律：$(\overline{\overline{P}}) = P$

7. 幂等律：$P \cup P = P, P \cap P = P$

8. 吸收律：$P \cup (P \cap Q) = P, P \cap (P \cup Q) = P$

9. 德·摩根定律：

$(\overline{P \cup Q}) = \overline{P} \cap \overline{Q}, (\overline{P \cap Q}) = \overline{P} \cup \overline{Q}$

通常，证明集合相等有两种方法：

(1) 从集合相等定义出发证明

$P \subseteq Q, Q \subseteq P \Leftrightarrow P = Q$

(2) 利用集合运算的定义和性质证明

例 1：证明$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明：$\overline{A \cup B} = \{x \mid x \notin A \cup B\}$

$= \{x \mid x \notin A \text{ and } x \notin B\}$

$= \{x \mid x \in \overline{A} \text{ and } x \in \overline{B}\}$

$= \{x \mid x \in \overline{A} \cap \overline{B}\}$

例 2：证明 $P - (Q \cup R) = (P - Q) \cap (P - R)$

证明：任一 $x \in$ 左，$x \in P, x \notin (Q \cup R), x \notin Q$ 且 $x \notin R$，由 $x \in P, x \notin Q$ 知 $x \in P - Q$，由 $x \in P, x \notin R$ 知 $x \in P - R$，于是 $x \in (P - Q) \cap (P - R)$，得 $P - (Q \cup R) \subseteq (P - Q) \cup (P - R)$；

任一 $x \in$ 右，$x \in (P - Q)$ 且 $x \in (P - R), x \in P, x \notin Q, x \notin R, x \notin Q \cup R, x \in P - (Q \cup R)$，得

$(P - Q) \cap (P - R) \subseteq P - (Q \cup R)$，因此，

$P - (Q \cup R) = (P - Q) \cap (P - R)$

例 3：证明 $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

证明：$A - (B - C) = A \cap (\overline{B - C}) = A \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) = A \cap (\overline{B} \cup C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

例 4：什么情况下$(A - B) \ominus (A - C) = \varnothing$？

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

解：由于 $P = Q$ 时，$P \ominus Q = \varnothing$；$A - B = A - C$ 时，$(A - B) \ominus (A - C) = \varnothing$

$A - B = A - C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$

证明 $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow A \cap B = A \cap C$（反之同理可证）

若 $\exists\, x \in A \cap B$ 而 $x \notin A \cap C$，$x \in A$，$x \notin C$，$x \in A \cap \overline{C} = A \cap \overline{B}$，$x \notin B$ 与 $x \in A \cap B$ 矛盾，由此，$A \cap B \subseteq A \cap C$，同理 $A \cap C \subseteq A \cap B$，只能 $A \cap B = A \cap C$。

§3 笛卡儿积

前面所讲的集合运算有一个特点，即运算得到的新的集合内的元素总还是参加运算集合中的元素。下面介绍另一种运算，称为笛卡儿积，运算结果的元素完全变了。

Δ 有序对：设有两个集合 A 与 B，A 中任取元素 a，B 中任取元素 b，a 与 b 建立一种对应关系，记为 (a,b)，总是把 A 中元素写在前面，B 中元素写在后面，称 (a,b) 为有序对。

Δ 笛卡儿积：所有上述有序对的集合

$$\{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

称为 A 对 B 的直交积，记为 $A \times B$。又称叉积，卡氏积，笛卡儿积等。

显然，$A \times B \neq B \times A$，不满足交换律，也不存在结合律，但笛卡儿积对 $\cup$，$\cap$，$-$，$\ominus$ 都满足分配律，如：

(1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(2) $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

(3) $(B \ominus C) \times A = (B \times A) \ominus (C \times A)$

(4) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

证(4)：任一 $(x,y) \in (A - B) \times C \Rightarrow x \in A - B$ 且 $y \in C \Rightarrow x \in A, y \in C, x \notin B \Rightarrow (x,y) \in A \times C$，$(x,y) \notin B \times C \Rightarrow (x,y) \in (A \times C) - (B \times C)$，即得 $(A - B) \times C \subseteq (A \times C) - (B \times C)$；

任一 $(x,y) \in (A \times C) - (B \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times C$ 而 $(x,y) \notin (B \times C) \Rightarrow x \in A, y \in C$ 而 $x \notin B \Rightarrow x \in A - B, y \in C \Rightarrow (x,y) \in (A - B) \times C$，即得 $(A \times C) - (B \times C) \subseteq (A - B) \times C$，因此，$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$。

$A \times B$ 还有一个几何意义，设 $A = [a,b]$，$B = [c,d]$，均为实闭区间，则有序对 (e,f)，$e \in A$，$f \in B$，是平面上一个点，$A \times B$ 表示平面上一个矩形区域 $[a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d]$，而 $B \times A$ 应为矩形区域 $[c \leqslant x \leqslant d, a \leqslant y \leqslant b]$，这两个区域是不同的，当且仅当 $A = B$ 时才会相同，此时 $A \times B = B \times A$，是正方形区域。

由于 $A \times B$ 也是集合，它应满足集合的一切性质。

§4 集合的基数

4.1 有限集的基数，包含与排斥原理

对有限集，只要数一下元素的个数就知道基数了，空集中的基数 $|\varnothing| = 0$，也归入有限集。

对于两个集合的交集，只能看两个集合有多少个公共元素，作为交集的基数。

对于并集，讨论一个重要的原理，包含与排斥原理，也称容斥原理。

Δ 包含与排斥原理：$|P \cup Q| = |P| + |Q| - |P \cap Q|$

证明：设$P = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

$Q = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$

$P \cap Q = \{c_1, c_2, \cdots, c_k\} \quad k \geqslant 0$

由于$P \cap Q \subseteq P$，$P \cap Q \subseteq Q$，$k \leqslant n$，$k \leqslant m$，由于元素排列的次序是无关紧要的，不妨

$P = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n-k}, c_1, c_2, \cdots, c_k\}$

$Q = \{b_1, b_2, \cdots, b_{m-k}, c_1, c_2, \cdots, c_k\}$

$P \cup Q = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n-k}, b_1, b_2, \cdots, b_{m-k}, c_1, c_2, \cdots, c_k\}$

$$\begin{aligned}|P \cup Q| &= (n-k) + (m-k) + k = n + m - k \\ &= |P| + |Q| - |P \cap Q|\end{aligned}$$

对于三个集合的并$P \cup Q \cup R$，设$P \cup Q = S$，

$$\begin{aligned}|P \cup Q \cup R| &= |S \cup R| = |S| + |R| - |S \cap R| \\ &= |P \cup Q| + |R| - |(P \cup Q) \cap R| \\ &= |P| + |Q| - |P \cap Q| + |R| - |(P \cap R) \cup (Q \cap R)| \\ &= |P| + |Q| + |R| - |P \cap Q| - |P \cap R| - |Q \cap R| \\ &\quad + |(P \cap R) \cap (Q \cap R)| \\ &= |P| + |Q| + |R| - |R \cap P| - |P \cap Q| - |Q \cap R| + |P \cap Q \cap R|\end{aligned}$$

此处$(P \cap R) \cap (Q \cap R) \overset{\text{交换律}}{=} (P \cap R) \cap (R \cap Q) \overset{\text{结合律}}{=} P \cap (R \cap R) \cap Q \overset{\text{等幂律}}{=} P \cap R \cap Q \overset{\text{交换律}}{=} P \cap Q \cap R$

包含与排斥原理可以推广到有限个集合，不难用归纳法可证得

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|\end{aligned}$$

例1：有100个学生，其中60个爱看小说，30个爱下棋，10个既爱看小说，又爱下棋，5个既爱看小说又爱跳舞，没有既爱下棋，又爱跳舞的，三种活动都不爱的有10个，问有几个学生爱跳舞？

解：设爱看小说的学生集合为A_1，

爱下棋的学生集合为A_2，

爱跳舞的学生集合为A_3。

用包含与排斥原理

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

题意是求$|A_3|$，只要设法求出其他的项就行了。

$|A_1| = 60, |A_2| = 30, |A_1 \cap A_2| = 10$

$|A_1 \cap A_3| = 5, |A_2 \cap A_3| = 0, A_2 \cap A_3 = \varnothing$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = A_1 \cap \varnothing = \varnothing$

$|A_1 \cap A_3 \cap A_3| = 0$

三种活动都不爱的学生集合

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \overset{\text{结合律}}{=} (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) \cap \overline{A}_3 \overset{D.M}{=} \overline{(A_1 \cup A_2)} \cap \overline{A}_3 \overset{D.M}{=} \overline{(A_1 \cup A_2) \cup A_3} \overset{\text{结合律}}{=} \overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}$$

事实上，$A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 是凡是喜欢一种活动以上的学生集合，$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}$ 是三种活动都不爱的学生集合了。

$$\overline{|A_1 \cup A_2 \cup A_3|} = 10$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |U| - \overline{|A_1 \cup A_2 \cup A_3|} = 100 - 10 = 90$$

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 60 + 30 + |A_3| - 10 - 0 - 5 + 0 = 90\end{aligned}$$

$$|A_3| = 15$$

有 15 个学生爱跳舞。

例 2：75 个儿童到游乐园去，他们可以玩木马，有轮滑鞋和阜氏转轮，已知他们中有 20 人玩了全部三种玩具，55 人至少玩了两种，每玩一种收费 0.50 元，而游乐园共收入 70 元，确定任一种玩具都没玩过的儿童数。

解： $|A \cap B \cap C| = 20$

$$|(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)| = 55$$

$$|A| + |B| + |C| = 70/0.5 = 140$$

$$\begin{aligned}|(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)| &= |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| \\ &\quad - |A \cap B \cap C| - |B \cap C \cap A| - |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - 2|A \cap B \cap C| \\ &= |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - 2 \times 20 = 55\end{aligned}$$

$$|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| = 95$$

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 140 - 95 + 20 = 65\end{aligned}$$

$$\overline{|A \cup B \cup C|} = |U| - |A \cup B \cup C| = 75\text{-}65 = 10$$

有 10 个儿童一种玩具也没玩过。

例 3：错排问题：对 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，给定一个次序，求每个元素都不在自己原来位置上的排列数。

设 A_i 为 a_i 在第 i 个位置上的排列，$|A_i| = (n-1)!$，$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$，…，每个元素都不在自己位置上

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| = |\overline{(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)}|$$

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i| \\ &= n(n-1)! - C_n^2(n-2)! + C_n^3(n-3)! + \cdots + (-1)^{n-1} \\ &= n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{n!}\end{aligned}$$

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| = n! - n![1 - \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}]$$

$$= n!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

1.2 无限集之间的基数比较

对于无限集，它们的基数是否都是一 ∞ 呢？[0,1] 中的有理数与[0,1] 中的实数一样多吗？正整数比正偶数多一倍吗？那么，如何比较呢？我们设想，如果 P 与 Q 的元素能一一配成对，那么它们的基数应该是一样的，即有 $|P| = |Q|$。

Δ 一一对应：A 的任一元素 a 有 B 的唯一元素 b 与之对应，B 的任一元素 b 有 A 的唯一元素 a 与之对应，称为建立了 A 与 B 的一一对应。

Δ 对等：如果 A 与 B 建立了一一对应，称 A 与 B 对等，A 与 B 等势，记作 $A \sim B$。

注意：对等与相等是两个完全不同的概念，A 与 B 对等，只是说 A 与 B 的基数相等，元素个数相同，而元素不一定是一样的。当然，相等的两个集合总是对等的。

集合之间的对应关系，可以看成是函数关系，看成是映射。

Δ 函数：A,B 是给定非空集合，如果有一种规则 f，对 A 的每一个元素 a，都有 B 的唯一元素 b 与之对应，记作 $b = f(a)$，称 f 是 A 到 B 的函数，或映射。A 为 f 的定义域，记为 $A = \mathrm{dom}\ f$，$f(A) = \{b \in B \mid f(a) = b, \forall\, a \in A\}$ 称为 f 的像域，记为 image f，b 是 a 在 f 下的像，a 是 b 在 f 下的原像，B 称为 f 的值域，记为 range f。

像域是值域的子集，有些书上把像域称为值域，B 称为值域包。

从定义中可见，b 的唯一性已表明了函数的单值性，而且 A 中每一个元素都是 B 中元素的原像，但是 B 中元素不一定都是 A 中元素的像，而且没有强调 A 中不同元素不能对应同一个 b。

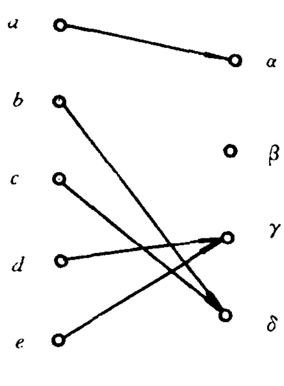
Δ 一对一函数：设 f 是 A 到 B 的函数，如果 $a_1 \neq a_2, a_1, a_2 \in A, b_1 = f(a_1), b_2 = f(a_2)$，必然 $b_1 \neq b_2$，称 f 是 A 到 B 的一对一函数，或称一对一映射，单射。

一对一映射是相对于多对一而言的，若 $f(a_1) = f(a_2)$，必须得出 $a_1 = a_2$。

Δ 满射：设 f 是 A 到 B 的函数，如果对任意 $b \in B$，都有 $a \in A$，使 $f(a) = b$，称 f 是 A 到 B 的满射，或称 f 是 A 到 B 上的映射，也称映满函数。

Δ 双射：f 是 A 到 B 的函数，如果既是一对一的，又是映满的，称 f 是 A 到 B 的双射，也称 f 是 A 到 B 的一一对应的函数。

如果 A 到 B 存在双射，A 与 B 就建立了一一对应。我们可以用建立双射的办法证明两个集合对等。



A	a	b	c	d	e
B	α	δ	δ	γ	γ

图 1-2

注意一对一函数与一一对应函数的区别，一对一函数只是不同原像的像也不同，而像域可

以是 B 的真子集，而一一对应函数还必须是满函数，像域与值域相同。

例 1：用图示法和列表法表示函数 f，$A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$，此函数既不是一对一的，又不是满的。如图 1-2 所示。

例 2：证明 $[a,b]$ 与 $[0,1]$ 是对等的。其中 $a<b$。

$[a,b]$ 的任一 x，有 $[0,1]$ 中唯一 y 与 x 对应，$[0,1]$ 的任一 y，也有 $[a,b]$ 中的唯一 x 与 y 对应。作比例式：

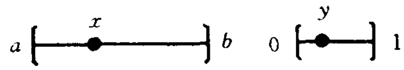


图 1-3

$$\frac{y}{x-a}=\frac{1}{b-a}$$

得

$$y=f(x)=\frac{x-a}{b-a}$$

$$x=g(y)=(b-a)y-a$$

f 是 $[a,b]$ 到 $[0,1]$ 的双射，因此，$[a,b]$ 与 $[0,1]$ 等势。$g(y)$ 是 $[0,1]$ 到 $[a,b]$ 的双射，是 $f(x)$ 的反函数。

事实上，只有双射才存在反函数，因为满射才能保证 B 可作为定义域，一对一才能保证任一个 $b\in B$ 都有唯一 $a\in A$ 来与之对应。

对任给两个集合，如何比较它们基数的大小呢？

定理一：策梅罗(Zermelo)定理：任意两个集合的基数必满足下列条件之一：

Card $A<$ Card B，Card $A=$ Card B，Card $A>$ Card B。

定理二：康托尔－伯恩斯坦定理：设 $|P|=\alpha$，$|Q|=\beta$，若：

(1) $|P|\leqslant|Q|$

(2) $|Q|\leqslant|P|$

则 $|P|=|Q|$ 即 $\alpha=\beta$。

定理三：基数比较定理：设 $|P|=\alpha$，$|Q|=\beta$，

若：(1) Q 中含有一个子集与 P 对等，即 $|P|\leqslant|Q|$

(2) P 与 Q 不对等，即 $|P|\neq|Q|$

则 $|Q|>|P|$，即 $\beta>\alpha$。

如果 A 到 B 存在一个单射，B 中有一子集 B_1 与 A 一一对应，A 的基数不会超过 B 的基数，$|A|\leqslant|B|$。为了证明两个集合基数相等，如果寻找一个双射不容易，可以寻找 A 到 B 的单射和 B 到 A 的单射，由定理二，就可证得 $|A|=|B|$。

这三个定理对有限集当然也是适用的。

自然数集 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$，是无限集，尽管每个元素都是自然数，它们的地位是平等的，但是可以排成序，也就是对这些元素可以一个一个地数下去。如果集合 P 与 $\mathbf{N}$ 能建立一一对应关系，自然 P 中元素也可以数。

Δ 可数无限集：凡与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等的集合都称为可数无限集，又称可列集。基数 $|P|=|\mathbf{N}|$，记作 a。

例 3：整数集合 $\mathbf{I}$ 与 $\mathbf{N}$ 是对等的。

证明：只要把 $\mathbf{I}$ 写成

$\mathbf{I}=\{0,-1,+1,-2,+2,\cdots\}$ 就很清楚了，$0\leftrightarrow1$，$-1\leftrightarrow2$，$+1\leftrightarrow3$，$-2\leftrightarrow4$，$+2\leftrightarrow5$，$\cdots$，

$$n = \begin{cases} 2|i| & i < 0 \\ 1 & i = 0 \\ 2i - 1 & i > 0 \end{cases}$$

是 $\mathbf{I}$ 到 $\mathbf{N}$ 的双射。$\mathbf{I}$ 是可列集。

由于正偶数集 $\mathbf{E} = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$，非负整数集 $\mathbf{z} = \{n - 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$，已经与 $\mathbf{N}$ 构成一一对应，它们也都是可列集。可见，正整数集（自然数集）$\mathbf{N}$ 的基数并不比正偶数集的基数多，正整数与正偶数是一样多的，都有 a 个。

无限集是否都是可数的呢？不是！$(0,1)$ 中的实数比自然数多。很容易在 $A = \{x \mid x \in (0,1)\}$ 中找一个子集与 $\mathbf{N}$ 对等，如：

$$B = \{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

与 $\mathbf{N}$ 是一一对应的，且 $B \subseteq A$。但 A 与 $\mathbf{N}$ 是不对等的，不然，若 A 与 $\mathbf{N}$ 对等，$(0,1)$ 与 $\mathbf{N}$ 可建立一一对应，$(0,1)$ 中的数可列，记为 $C_1, C_2, \cdots$：

$$C_1 = 0.a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\cdots$$
$$C_2 = 0.a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\cdots$$
$$\cdots$$
$$C_i = 0.a_{i1}\,a_{i2}\,a_{i3}\cdots a_{ii}\cdots$$
$$\cdots$$

其中 $a_{ij} \in D = \{0,1,2,\cdots,9\}$，规定 C_i 不以无限个 0 结束，可改为无限个 9 结束，以避免同一个数有两种表示法，如：$0.34 = 0.3399\cdots$。如果 $\{C_i\}$ 可以一个不漏地把 $(0,1)$ 中实数包括进去，则 A 为可列集。可是，我们可构造一个元素 $b, b \in A$，

$$b = 0.b_1\,b_2\cdots b_i\cdots$$

其中

$$b_i = \begin{cases} 1 & a_{ii} = 9 \\ 9 - a_{ii} & a_{ii} = 0,1,2,\cdots,8 \end{cases}.$$

b 的第 i 位 b_i 与 C_i 的 i 位 a_{ii} 总是不同的，b 与 $\{C_i\}$ 中任一个至少有一位不同，b 无法排入 $\{C_i\}$ 中，但 b 是 $(0,1)$ 中元素，因此，$(0,1)$ 与 $\mathbf{N}$ 是不对等的，$(0,1)$ 的基数比 $\mathbf{N}$ 大，常称 $(0,1)$ 具有连续统的势 C。

Δ 连续统的势：如果集合 P 与 $(0,1)$ 建立一一对应，则称 P 具有连续统的势 C。

例 4：$[0,1]$ 与 $(0,1)$ 是对等的。

证一：$B = \{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbf{N}\}$ 是 $[0,1]$ 的子集，也是 $(0,1)$ 的子集，$[0,1]$ 比 $(0,1)$ 只多两个点：0 和 1，把这两个点也排列到可列集 B 中去，$0 \leftrightarrow \frac{1}{1+1}$，$1 \leftrightarrow \frac{1}{2+1}$，$\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{4}$，$\cdots \frac{1}{n-1} \leftrightarrow \frac{1}{n+1}$，$\cdots$，$[0,1]$ 与 $(0,1)$ 中其他点都 $x \leftrightarrow x$，

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{3} & x = 1 \\ \frac{1}{n+1} & x = \frac{1}{n-1}\ (n = 3,4,\cdots) \\ x & x \in (0,1) - B \end{cases}$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com