现代管理方法普及丛书

线性规划

孙秀娥　宋增民　编

南京工学院出版社

现代管理方法普及丛书

线 性 规 划

孙秀娥 宋增民 编

南京工学院出版社

内容提要

线性规划是运筹学的一个重要分支，是现代管理中的最优化技术之一。本书从实际问题引出线性规划的图解法、单纯形法、人工变量和两阶段法、表上作业法等常用解法，通过典型例子给出线性规划应用的几类常用经济模型。本书还从经济角度较详细地讨论了影子价格，通过具体事例的分析，给出用线性规划解决经济问题的全过程。最后给出了单纯形解法的BASIC程序。

本书注重应用，内容深入浅出，通俗易懂，可供中等以上文化程度的管理干部和经济工作者自学，也可作为各级经济管理部门和工矿企业的培训教材。

线 性 规 划

孙秀娘　宋增民　编

南京工学院出版社出版

南京四牌楼2号

江苏涟水印刷厂印刷　江苏省新华书店发行

开本787×1092毫米　1/32　印张2 5/8　字数60.4千字

1987年2月第1版　1987年12月第2次印刷

印数4001——9000册

书号：4409·6　定价：0.60元

出版前言

现代经济管理正在向定量分析、数理决策方法、电子计算机管理和控制三个方面发展，这就要求每一个经济工作者既要具备经济理论知识，又要具有相应的数学知识。当今任何一个重大的技术经济分析，如果不成功地利用数学分析方法是无法得出正确决策的。

南京工学院出版社应广大管理干部和经济工作者的要求，将现代管理中需要用到数学知识的十多种方法，约编了这套《现代管理方法普及丛书》。丛书内容力求深入浅出，通俗易懂，注重应用，尽可能多举实例，除了可作为各级管理干部、经济工作者的培训教材或参考书外，还可供具有中等以上文化程度的读者自学。

丛书共分十三分册，分别为：量本利分析；市场预测；库存管理；决策技术；投入产出分析；线性规划；目标管理；网络技术；管理中的图论方法；系统工程初步；价值工程；质量工程；计算方法与微机应用。

1986年5月

目　录

绪 论

在经济管理工作中，企业经常会遇到：诸如怎样使产品的成本最低、产量或利润最高、设备利用率最高、流动资金周转最快、原材料消耗最省、零部件周转路线最短、技术引进和设备布局最合理，以及如何合理地利用现有的铁路、公路、水路、航空的运输能力，以缩短运输时间、降低运输费用等一系列的问题。归根结蒂，就是如何才能以最小的消耗获得最大的经济效益。当然要正确解决这些问题，既要有先进的科学技术，又要有现代化科学管理，这是推动经济发展的两个车轮，缺一不可。本书介绍的线性规划就是解决这些经济问题的钥匙。

线性规划是运筹学规划论的重要分支，是研究和解决最优化问题的决策技术。它从整体上研究和解决如何最大限度地发挥人力、物力和财力的作用；研究和解决如何在一切可行的方案中寻求最优方案，从而取得好的经济效益。

随着近代化生产规模的不断扩大，线性规划的应用也日趋广泛深入。早在本世纪30年代末和40年代初，就有康托洛维奇等在组织生产和交通运输方面，开始研究和应用线性规划。自1947年丹捷格提出了求解一般线性规划问题的方法——单纯形法以来，线性规划在理论上趋向成熟，在实际中的应用日益广泛与深入。特别是计算机计算速度的提高和解题规模的扩大，使之涉及领域、适用范围更为广泛。从解决技术问题的最优化，到工业、农业、商业、交通运输业、

军事的计划和管理及决策分析都可以发挥作用。从范围来看，小到一个小组的日常工作和计划的安排，大至整个部门以至国民经济计划的最优化方案的提出，它都有用武之地。据国外有人统计，它占用了世界上计算机运用的大部分时间。

线性规划具有适应性强、应用面广、计算技术比较简便等特点，它是现代企业经济管理的重要基础和手段之一。

第一章　线性规划问题及其数学模型

第一节　线性规划研究的问题

为了提高经济效益，可采取两条途径。一是技术上的改进，二是经济上的合理安排。后者就是线性规划的主要课题。所谓线性规划，就是在满足一定的约束条件下，使目标函数取得最优值的一种数学方法。它研究的问题有两类，一类为资源（人力、物力、财力）是给定的，要求充分利用这些资源，最大限度地实现预期的目标（产量、产值最大、利润最高等）；另一类为任务是给定的，要求以消耗最少的资源（原料、工时、成本）来完成它。前一类问题称为极大问题，后一类问题称为极小问题。

下面通过实际事例来说明。

例1.1　资源利用问题。某工厂生产A、B两种产品，已知生产一吨A产品需耗煤9吨，钢材4吨，木料3立方米和4个劳动日（一人劳动八小时为一劳动日），利润是7万元；生产一吨B产品需耗煤4吨，钢材5吨，木料10立方米和5个劳动日，利润是12万元。该厂在生产上受三方面条件限制，即每月只能提供煤360吨、钢材200吨和木料300立方米。假设两种产品均旺销，试讨论怎样安排生产才能使该厂月利润最大。

［解］先将题中给出的数据整理成表1.1。

表1.1

	A 产品（吨）	B 产品（吨）	资源的利用限度
煤（吨）	9	4	360
钢材（吨）	4	5	200
木材（立方米）	3	10	300
劳动日（个）	4	5	无限制
利润（万元）	7	12	

再作粗略分析：由于B产品的单位销售收入大，所以优先考虑生产B产品。在四种生产能力中，劳动日无限制，因而在制定生产计划时对此不作计较。而对其它三种能力，若全部用于生产B产品，以煤计可生产B产品90吨，以钢材计则是40吨，以木材计只能是30吨。显然，B产品受木材所限最多只能生产30吨，此时利润是$30\times12=360$万元。共消耗煤$30\times4=120$吨；钢材$30\times5=150$吨，煤和钢材尚未得到充分利用。如果少生产一吨B产品，那么虽然少得利润12万元，但省下的10立方米木材可生产3吨A产品，煤和钢材仍能满足需要，这样可得利润21万元，结果总利润可增加9万元。由于煤和钢材还有剩余，仍可继续调整生产的安排。最后得到的结果是：生产20吨A产品和24吨B产品时获得的利润最大，总利润为428万元。

这样用试凑法去调整是很麻烦的事，如果产品种类很多时几乎不可能实现。若用我们将要介绍的现代管理方法——线性规划则很快就能得到理想结果。下面就来讨论建立该问

题的线性规划模型。

设生产A、B产品的数量分别为x_1、x_2吨，则该厂获得的总利润Z应为

$$Z=7x_1+12x_2。$$

由于该厂的目的是寻求最大利润，即使函数$Z=7x_1+12x_2$达到最大值。这可表示为

$$\mathrm{Max}Z=7x_1+12x_2$$

上式称为线性规划的目标函数。

就该厂生产能力，由于生产1吨A、B产品分别需9吨和4吨煤，所以，生产x_1吨A产品和x_2吨B产品需煤$9x_1+4x_2$吨，它当然不能超过所能提供的煤的总数。这样可用下列不等式表示之

$$9x_1+4x_2\leqslant 360$$

类似地可得钢材和木材的限制条件分别为

$$4x_1+5x_2\leqslant 200 \qquad 和\ 3x_1+10x_2\leqslant 300$$

显然，

$$x_1\geqslant 0，\ x_2\geqslant 0$$

以上不等式称为线性规划的约束条件，必然满足。所以，此生产问题可归纳成如下线性规划模型

求目标函数$\mathrm{Max}Z=7x_1+12x_2$　　　　（1-1）

$$满足约束条件\begin{cases}9x_1+4x_2\leqslant 360\\4x_1+5x_2\leqslant 200\\3x_1+10x_2\leqslant 300\\x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{cases}\qquad（1-2）$$

至此，该实际问题转化为一个数学问题：求线性不等式组（1-2）的解，使式（1-1）中的线性函数具有最大值。

从该例可看出使用线性规划方法所应该具备的条件和建立线性规划模型的基本方法和过程。一般来说，具备如下条件者，就可以用线性规划方法：

（1）问题能够定量化，并能将所求目标表示为极大化或极小化的要求。如求最大生产率、最大产量、最大利润或最小成本、最少原材料消耗等。本例是寻求最大利润。

（2）有供选择的不同方案。只有这样，才能有选择最优方案的可能性。如上例中，既可以安排生产30吨B产品而不生产A产品，也可以安排生产20吨A产品和24吨B产品，还有许多其它方案。

（3）要求达到的目标是有限制条件的。如生产能力的限制、产量的限制、能源或资金的限制等。这些限制条件在线性规划中通称为约束条件。

（4）能将约束条件用数学语言表示为线性等式或线性不等式，并将目标函数表示为线性函数，即一次齐式。

从这些条件来看，线性规划可以用来研究大量物资的合理调运问题；合理配料和合理下料问题；劳动力合理调配问题；生产计划合理安排问题；企业地区间的协作问题；工厂和车间的合理设计问题以及工业布局和厂址选择问题等等。所以，线性规划在企业管理和经济管理中都大有用武之地。后面我们将要详细介绍几种应用模型。

第二节　线性规划问题的图解法

线性规划问题的图解法是通过作出几何图形的方法求线性规划问题的解。虽然这种方法只能解决具有两个变量的线性规划问题，但它较为直观，对于深入了解线性规划问题的

实质极有帮助。我们通过例1.1来介绍此方法。

以X_1为横轴、X_2为纵轴建立直角坐标系X_1OX_2（图1.1）。我们知道，一个二元一次方程可用平面直角坐标上的一条直线表示，那么一个二元一次不等式在坐标平面上表示什么呢？先看一元一次不等式，如$x_1 \geqslant 0$就是坐标平面的右半部分，$x_2 \geqslant 0$就是坐标平面的上半部分。对于一般的二元一次不等式，它也确定一个半平面，例如不等式$9x_1 + 4x_2 \leqslant 360$，确定它所表示的半平面的关键是先确定直线$9x_1 + 4x_2 = 360$，而确定该直线只要求出它和两个坐标轴的交点坐标，这可在方程$9x_1 + 4x_2 = 360$中分别令$x_1 = 0$和$x_2 = 0$来求得。这相当于该厂将煤全部用来生产B产品或者全部用于生产A产品。我们得$x_1 = 0$、$x_2 = 90$；$x_1 = 40$，$x_2 = 0$。这样就可把该直线表示在图1.1中。有了该直线，确定该不等式，所对应的半平面只需采用点判别法。即从所作直线的任一侧半平面上取一点，把它的坐标代入不等式，如适合，则这半平面即是该不等式所表示的半平面，否则为另一侧。用此方法把上节中不等式（1-2）所对应的半平面都画在图1.1中，得到阴影部分OABCD，多边形OABCD中的任一点（包括边界上的点）所对应的坐标都满足式（1-2），这样的任一对x_1、x_2值，就是一个可行的生产方案。我们把满足约束条件的每一组解称为线性规划问题的可行解，可行解的全体称为该线性规划问题的可行域。上述多边形OABCD内每一点的坐标所对应的一对x_1、x_2值就是该线性规划问题的可行解，多边形OABCD就是该线性规划问题的可行域。

由于可行域内的解很多，到底那一个解是最优解呢？也就是那一个解使目标函数取最大值呢？为此不妨先给定目标函数值Z某一个参数，例如$Z = Z_0$，则$7x_1 + 12x_2 = Z_0$是

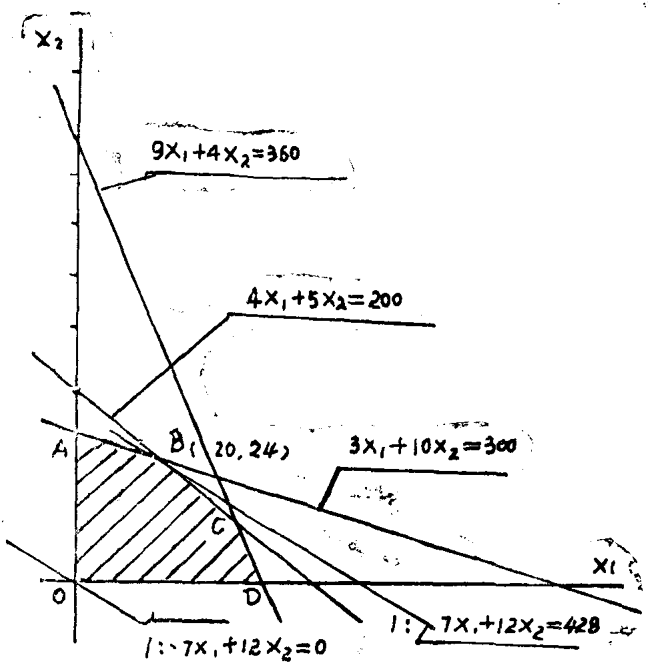

图1.1

坐标平面上一条直线，在这直线上任何一点，其相应坐标值都使目标函数值为Z_0，我们称这样的线为等值线。它的经济意义是，如按直线$Z_0=7x_1+12x_2$上的任一点（在可行解范围内）的坐标所对应的可行解来安排生产计划时，所得利润均为$Z=Z_0$，这条直线亦称为等利润线或利润线。

为具体起见，现先令$Z=0$，则得直线l：$7x_1+12x_2=0$（见图1.1）。此直线上只有一点（0，0）在可行域内，它表示如A、B两产品均不生产时所得利润为0。随着Z值的增加，直线l就在图1.1中向右上方平行移动，它与阴影部分重合的任一点对应的x_1、x_2值都是一个可行的生产方案，

且利润相等。直线l平移到通过B点时（l'的位置），若再往上移就与阴影部分没有公共点了，所以B点就是获得最大收入所对应的生产方案，即B点的坐标值既满足约束条件，又使目标函数取得最大值。由B点的坐标（20，24）得到最优解$x_1=20$，$x_2=24$，总利润是$7\times20+12\times24=428$（万元）。其中B点坐标可以通过几何方法来确定，也可以通过解线性方程组来求得，即解以B点为交点的两条直线方程所组成的线性方程组。

这里我们作两点说明：

（1）若把例1.1中的目标函数改为$Z=4x_1+5x_2$，那末BC边上每一点的坐标都是最优解（因为等值线$Z=4x_1+5x_2$向上平移到$Z=200$时离原点最远，即等值线变为$4x_1+5x_2=200$时与BC边重合）。因此，最优解有无穷多组，而它们对应的目标函数值都是200。

（2）线性规划问题的最优解必定可在可行域的顶点上找到。上面已看到，如果等值线移到离原点最远时只与可行域相交于一点，则该点就是可行域的一个顶点，上例中为B点；否则，等值线与可行域的某边线重合，对应到有无穷组最优解，其中有两个获得最优解的点是可行域的顶点。

最后，我们把线性规划问题的图解法的主要步骤小结如下：

第一步：确定可行域。对每一个约束不等式方程，求出所表示的半平面，其公共部分就是可行域。

第二步：作最优等值线。先作任一目标函数的等值线，然后将此线向上（极大）平移，直至与可行域的最后交点(也可以是一线段）。此交点（或线段上任一点）坐标即为此线性规划问题的最优解。

第三步，求出最优解。这实际上是求出第二步确定的点的坐标。这可以用几何方法得到，也可以解由经过该点的两条直线方程构成的方程组而得到；如果该点是线段上一点，则取该线段的任一点，求出其坐标即为最优解。

第三节　线性规划应用的几类经济模型

企业是一个复杂的系统，要研究它，就必须将其抽象出来形成为模型。例1.1就是将实际问题抽象成线性规划模型的典型例子。本节主要介绍线性规划应用的几类经济模型；用线性规划的形式讨论系统内部因素的相互关系和它们的活动规律；为了介绍线性规划的单纯形解法的需要，最后将给出线性规划问题的标准形式。

1. 线性规划应用的几类经济模型

（1）资源利用问题

通常所说的资源合理利用问题有两类：一类是产品的合理搭配问题，即在一定数量的资源约束条件下，产品合理搭配，使生产的经济效益最大；一类是经济配料问题，即如何合理地将不同成分的原料，混合配制成规定质量要求的产品（或中间产品），使得产品的成本最低。例1.1属于第一类问题，纺织工业的纤维混合，石油工业的原油掺合，畜牧业的饲料最优配方等都属于第二类问题。

例1.2 某工厂生产A、B两种产品，这两种产品的单耗分别为：钢材1吨和2吨，电力各2千度，资金为1万元和6万元。销售一个A产品收入1万元，销售一个B产品收入3万元。根据国家计划，该厂至少生产A产品20个。该厂现有钢材120吨，电力220千度，资金260万元。A、B产品都有

销路，试讨论各生产多少可使总收入最大？

〔解〕 经与例1.1类似的讨论，假设x_1为生产A产品数量，x_2为生产B产品数量。

则得

$$\mathrm{Max}Z = x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 120$$

$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 220$$

$$x_1 + 6x_2 \leqslant 260$$

对于A产品，国家计划至少生产20个，因此有$x_1 \geqslant 20$，对于B产品，显然有$x_2 \geqslant 0$，这样得该问题的线性规划模型为

$$\mathrm{Max}Z = x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 120 \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant 220 \\ x_1 + 6x_2 \leqslant 260 \\ x_1 \geqslant 20,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

一般地， 设某企业有m种不同的资源（如例1.1中煤、钢材、木料；例1.2中钢材、电力、资金）用来生产n种产品，用a_{ij}表示生产一个单位第j种产品所消耗的第i种资源的数量，用c_j表示第j种产品的单位价值，用b_i表示这个企业现有的第i种资源的数量（$i = 1, 2, \cdots, m$；$j = 1, 2, \cdots, n$）。国家计划要求第j种产品至少生产d_j个单位，如果产品都有销路，那么应该怎样安排生产，才能既完成国家计划，又能使总产值最大呢？

设用x_j表示生产第j种产品的数量，由于所消耗的资源不能超过现有的数量，所以x_j必须满足

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i\text{；}\quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

由于必须保证完成国家计划，所以x_j还须满足

$x_j \geqslant d_j$; （j = 1，2，…，n）

我们的目标是在上述约束条件下，使总产值

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

达到最大。以上构成线性规划模型为

$$\mathrm{Max}Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-3}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_1 \geqslant d_1,\ x_2 \geqslant d_2,\ \cdots,\ x_n \geqslant d_n \end{cases} \tag{1-4}$$

例1.3 某集体食堂管理员考虑购买各种食物，应如何调配，才能既保证营养要求，又花钱最少呢？假设人体需要m种营养，如糖、脂肪、蛋白质、维生素甲、乙、丙、丁…，每日需要量至少为b_i（$i = 1, 2, \cdots, m$）；又假设有几种食品，如肉类、蛋类、蔬菜类等，供管理员选购，其单位价格为c_j（$j = 1, 2, \cdots, n$）。根据营养学的分析，各种食品包含的每一种营养的数量是已知的，设每一单位j种食品包含第i种营养为a_{ij}个单位。

〔**解**〕现以x_j表示选购第j种食品的单位数量，由于人体对m种营养的每日需求量至少为b_i，所以x_j必须满足

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i;\quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

由于只有选购和不选购的区别，因此

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \cdots\cdots x_n \geqslant 0$$

我们的目标是在保证营养的条件下，花钱最少。即在上述约束条件下，使

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$$

达到极小。因此，该问题的线性规划模型为