1985

中国青年出版社

中国数学会普及工作委员会编

第26届国际数学奥林匹克

第 26 届国际数学奥林匹克

中国数学会普及工作委员会编

中国青年出版社

封面设计：蓝 橙

第26届国际数学奥林匹克

中国数学会普及工作委员会 编

*

中国青年出版社出版 发行

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店经销

*

787×1092 1/32 4.5印张 89千字

1987年10月北京第1版 1987年10月北京第1次印刷

印数1—15,000册 定价0.90元

内容提要

本书介绍了我国第一次参加国际数学奥林匹克竞赛的情况，以及第26届国际数学奥林匹克竞赛的试题和解答，并且给出了各国提供的全部候选试题和解答。另外，对有关国际数学奥林匹克的规则，历史和评述也作了一些介绍，并附有各国历年参加竞赛的成绩统计表。

本书适合广大中学生、中学数学教师以及从事数学专业工作的读者阅读。

目　　录

参加第26届国际数学奥林匹克情况介绍

第26届国际数学奥林匹克（IMO）在芬兰举行。共有38个国家的209名中学生参加。我国代表队由王寿仁同志任领队，裘宗沪同志任副领队，队员是北大附中高三王锋同学，上海向明中学高二吴思皓同学.

6月25日晚由北京起程，于6月26日下午三时到达芬兰首都赫尔辛基. 27日林蔼丽大使来住处看望，并帮助我们与东道国组委会秘书长麦第·莱提尼（Matti Lehtinen）建立了联系. 当天，我们拜访了莱提尼，他发给我们一份整个竞赛的日程安排.

29日，组委会把王寿仁同志接到汗俄拉（Heinola）参加主试委员会.

6月30日至7月2日，主试委员会连续开了三天会，研究这次竞赛的试题. 组委会从参加国提供的九十七道试题中，先初选出十八道试题供主试委员会挑选，经反复讨论，又从初选余下的试题中选出四题，多次斟酌，最后确定了六道试题. 讨论中，各国领队（主试委员）结合本国的情况和个人见解，对每道试题加以评论，表示取舍. 这使我们了解到各参加国的高中数学教学的内容和水平，对我们的教学改革有一定的参考作用. 决定试题后，先用英、法、德、俄四种

文字写出定稿，再由各国领队译成本国的文字付印.

6 月 30 日晚饭后，组委会把裘宗沪同志和两位同学接往约差(Joutsa)兰脱西帕旅馆，这一旅馆是乡村别墅式的，周围景色十分秀丽，各代表队都在这一旅馆居住. 为了使参加竞赛的同学试前能放松愉快，7 月 1 日和 2 日，组委会安排了一些游览和集体文娱活动.

7 月 3 日在约差学校中心举行开幕式.

7 月 4 日和 5 日两天进行两场考试.每天考三道题，考试时间是上午 9 时至下午 1 时半. 每场考试开始一小时，主试委员集中于一个房间，等候应试者对试题所提出的疑问(书面提问)，然后由主试委员会讨论如何答复.

7 月 5 日，主试委员会成员也搬到兰脱西帕旅馆，此时副领队和学生才能与他们的领队见面交谈. 6 日和 7 日两天，各国领队对本国的学生的试卷进行评分.由东道国组成协调委员会，协调各国的评分标准. 每道题有四个协调委员，各国正、副领队依次到协调委员处，把学生的答案讲给协调委员听，共同商量判定分数，最后由协调委员给分，领队签字.

7 月 7 日总成绩公布完毕. 主试委员会开会研究划定一、二、三等奖的分数线，并委托一个专门委员会研究是否设特别奖（奖给对某一道试题作出特别出色的解答者）. 7 月 8 日又召开会议，决定各个等级奖的人数，并决定本届竞赛不设特别奖. 在 6、7、8 日三天中穿插进行野餐、游览和联欢活动.

7 月 9 日返回赫尔辛基，下午乘游艇观赏芬兰海湾的景色. 7 月 10 日主试委员会举行最后一次会议、讨论国际数学奥林匹克今后的办法. 多数与会者认为按以往习惯办就很好. 也有人建议，希望向国际组织和各国政府部门呼吁能给

予更多的财政支持，进一步推动这一公认的国际竞赛活动.

会上公布了1986年IMO 由波兰举办，1987年由古巴举办，1988年由澳大利亚举办，西德希望1989年在他们国家举办.

7月10日下午举行闭幕发奖大会. 芬兰教育部长出席，波兰领队代表客人致答辞. 会上，给14名一等奖（34分以上）、35名二等奖（22分以上）和52名三等奖（15分以上）分别授予金质、银质、铜质奖章和证书. 我国学生吴思皓获三等奖（17分）.

会后，芬兰教育部长举行招待会，招待各国正、副领队. 晚上由银行团举行招待餐，席间，各国学生表演了一些小节目.

7月11日各国代表队离芬兰回国.

这次试题涉及面较广，要求的技巧也较高，比前几届试题难度明显增大. 将84年和85年的总分（满分252分）前五名以及一、二、三等奖的分数线作对比：

总　分	第一名	第二名	第三名	第四名	第五名	一等奖	二等奖	三等奖
1984年	235苏	203保	199罗	195美匈		40以上	26以上	17以上
1985年	201罗	180美	168匈	165保	144越南	34以上	22以上	15以上

由此可以看出，今年试题难度增大，各队成绩普遍下降，估计按人平均分要下降5分左右. 某些试题的难度还体现在要求利用综合知识（第二、三、六题）和层次多（第五题）. 另外，每道试题都不易下手，应试者必须有充分的机智才能找到问题的突破口.

这次试题每道题都有一定特色：

第一题　需要用几何的基本知识和技巧，发现线段和角度之间的联系．

第二题　有现代数学背景，看来对中学生较陌生，但是可以开展的思路很多，只要抓住关键就可迎刃而解，解法很多，但要求较强的表达能力．

第三题　本题必须逐次列出一些具体情况，发现其中的规律，归纳成一个简单结论，才能找到问题的突破口．在解题时，要会灵活运用数学归纳法，这种归纳并非教材中平铺直叙的简单归纳，而是一种分段跳跃式的．

第四题　要求的知识不多，但很容易引人误入岐途．应试者必须处理好从简单到复杂的过程．

第五题　要求较强的几何直观能力，图较复杂不易画，解题时层次较多，要把一些简单的几何定理巧妙使用．

第六题，涉及的知识和技巧是初等数学过渡到高等数学所必需的，有利于中学到大学数学教学的衔接和沟通，在数学分析（微积分）中，这一题目是比较典型的．许多国家（包括我国）虽然在中学数学中有“微积分初步”的内容，但是偏于运算，不太注意基本概念和技巧，学生就不具备解这道题的能力．

因此，这六道题多方面的综合地考察了应试者的数学能力．

在这份试卷中，有适量的传统数学内容．例如：平面几何、初等数论等，而多数试题都有近代和现代数学的背景，对探索中学数学教育现代化是有益的．

这次共有 208 名中学生参加，各国代表队按人平均分数排列是：

罗马尼亚	33.5 分	美国	30 分
匈牙利	28 分	伊朗（1 人）	28 分
保加利亚	27.5 分	越南	24 分
苏联	23.3 分	联邦德国	23.2 分
民主德国	22.7 分	法国	20.8 分
英国	20.2 分	澳大利亚	19.5 分
加拿大	17.5 分	捷克斯洛伐克	17.5 分
波兰	16.8 分	以色列	13.5 分
中国（2 人）	13.5 分	奥地利	12.8 分
古巴	12.3 分	荷兰	12 分
希腊	11.5 分	南斯拉夫	11.3 分

（未注明人的国家都是六人参加，还有十八个国家未列入）

我国代表队成绩不理想的原因，除了仓促上阵、准备不足和缺乏经验等客观原因外，主要是平时的教育只注重大量重复做题，学生思路狭窄，分析归纳总结及灵活运用、现场应变能力都较差.

国际数学奥林匹克是世界上影响最大、水平最高的数学竞赛，自 1959 年开始举办以来，每年举办一次，参加国家和人数逐年增加．和体育运动的奥林匹克一样，这一活动也得到各国政府、国际学术组织及社会各界人士广泛的重视和支持．它既有如此强的生命力，又有如此兴旺的局面，足见有其重大意义；既能在很大程度上激发青年人的数学才能和引起对数学的兴趣，也可以使数学深化，同时培养了一批新一代的研究工作者．正如专家们指出的：IMO 的重大意义之一是促进创造性的思维训练，对于科学技术迅速发展的今天尤为重要．中等数学教育之所以受到重视，正是因为数学

不仅是教会学生运算技巧，更重要的是培养学生有严密的思维逻辑，有灵活的分析和解决问题的方法，是青少年进一步学习其他学科的基本功.

通过这次竞赛与交流，我们感到我国中等数学教育与世界先进国家之间还存在着一定差距，深感要加快我国中学教育改革的步伐. 同时要大力开辟第二课堂，补充课堂教学的足. 此不外，应广泛地动员社会力量，多出版一些精彩的课外读物，培养学生自己去掌握知识的能力. 同时应配合有针对性的思想教育，让我们的中学生不仅能在国际竞赛中取得好成绩，同时也体现出我国年轻一代朝气蓬勃的精神面貌.

第26届国际数学奥林匹克规则

总　　则

第26届国际数学奥林匹克于1985年6月29日至7月11日在芬兰的汗俄拉、约差和赫尔辛基举行，芬兰数学全国委员会下属的数学教育委员会和芬兰数理化教师协会是这次数学奥林匹克的组织者，经费除了由芬兰教育部提供外，还来自民间资助.

参加者与经费负担

参加者是应邀的，每个被邀请国家可以派出六名学生组成代表队，以及正、副领队各一人，参加的学生应是1984-1985学年就读的中学生，并且必须是1964年7月5日以后出生的.

组织者将负担各代表队的食宿费用，对正领队从6月29日开始，副领队和学生从7月1日开始，直到7月11日离开赫尔辛基为止.

此外，观察员及家属可随队参加，但费用自理，若有需要，组织者有权限止随队参加的人数.

在5月15日以前，各队应将正、副领队的姓名通知组织者. 在6月10日以前，将参加学生的姓名通知组织者.

推 荐 试 题

希望每一参加国，在4月15日以前，推荐三至五道试题，并附上解答，如果可能的话，所推荐的试题，要包括大学以前的数学各个领域，而且有难易不同的题目，试题用英、法、德、俄文书写.

参加队的到达及离开时间

希望正领队在6月29日抵达赫尔辛基，副领队及学生在7月1日抵达赫尔辛基，全队在7月11日离开赫尔辛基，各队要在6月10日前将他们的交通工具和到达时间通知组织者.

主 试 委 员 会

主试委员会由各国的正领队和组织者指定的一位主席组成，在主席的允许下，副领队、观察员、协调员和主席的助手可以参加主试委员会，并有发言权. 正领队可以由他（她）的副领队代表出席会议.

主试委员会的职责：

1．选择试题. 由组织者从各国推荐的题目中初步筛选一些试题，然后从中选择.

2．对每题的正确解答确定满分的分数，若有必要，对不完全解答确定评分准则.

3．决定用英、法、俄、德文字准确地表达的试题.

4．准备而且批准译成参加国文字的试题.

5．在比赛日，决定如何回答学生用书面提出的试题中的疑问.

6. 解决个别领队和协调员的不同意见.

7. 决定奖的分配.

在开会期间，主席和领队都有一票表决权，在票数相同时，主席的票有决定权.

主试委员会可以下设特别委员会，来解决特殊问题.

考　　试

竞赛分两场笔试，每场为4小时30分钟，考试在7月4日和5日两天举行。每场考三个题目，每个参加者必须单独做题，可用本国文字解题. 解答写在组织者提供的试卷上. 试场只准带笔和作图工具，不准用计算器和数学表.

在每场考试的前30分钟，允许考生对试题中不明确之处书写在专用的纸上，向主试委员会提问.

评分和协调

试卷先由正、副领队评判，然后与组织者推荐的协调员协商，对评分取得一致，如有分歧，可请主试委员会仲裁.

对每个试题，对芬兰队的解答和协调结果，必须经过提供该试题国家的领队认可.

奖和文凭

设有一、二、三等奖，对个别试题给出特别漂亮或有创新的解答，设立特别奖. 一、二、三等奖的获得者总人数不超过所有参加人数的一半. 一、二、三等奖人数的比例约为1：2：3.

7月10日在赫尔辛基发奖.

每个参加者发一个文凭.

第26届国际数学奥林匹克试题及解答

试　　题

下面每题的满分为7分.

第一天（7月4日　9:00～13:30）

1. 设四边形$ABCD$的顶点在一个圆周上. 另一个圆，它的圆心在边AB上，且与四边形的其余三边相切. 证明：$AD+BC=AB$.（英国）

2. n为正整数，整数k与n互素，$0<k<n$，数1，2，…，$(n-1)$组成的集合记为M，M中的每一个数染上蓝、白两色中的一种，染法如下：

（i）对M中的每个i，i和$(n-i)$同色；

（ii）对M中的每个i，$i\neq k$，i和$|i-k|$同色.

证明：M中所有的数必为同色.（澳大利亚）

3. 对任意整系数多项式$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k$，令$W(P)$表示$P(x)$中系数为奇数的个数. 考虑多项式

$$Q_i(x)=(1+x)^i,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

若i_1，i_2，…，i_n都是整数，且

$$0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n,$$

证明：$W(Q_{i_1}+Q_{i_2}+\cdots+Q_{i_n})\geqslant W(Q_{i_1})$.

第二天（7月5日　9:00～13:30）

4. 设M是由1985个不同的正整数组成的集合，其中每个元素的素数因子不大于26. 证明：M中有四个互不相同的元素，它们的乘积是某个整数的四次方.

5. 一个以O为圆心的圆经过$\triangle ABC$的顶点A和C，又和边AB与BC分别相交于点K与N. $\triangle ABC$与$\triangle KBN$的外接圆相交于两个不同的点B与M. 证明：$\angle OMB=90°$.

6. 实数序列x_1，x_2，x_3，…，由递推关系

$$x_{n+1}=x_n\left(x_n+\frac{1}{n}\right)\qquad n\geqslant 1$$

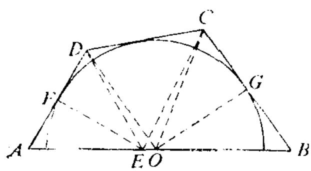
确定. 证明：存在一个唯一的x_1，使得

$$0<x_n<x_{n+1}<1$$

对一切$n\geqslant 1$都成立.

解　　答

1. 解法一　如右图，在AB上截取$AE=AD$.



$\angle A+\angle C=\pi\Longrightarrow$

$\angle ADE=\angle AED=$

$=\frac{1}{2}\angle C=\angle DCO.$

$\Longrightarrow O,E,D,C$四点共圆.

$\Longrightarrow\angle EDO=\angle ECO,$

$\angle CEB=\angle CDO.$

$\Longrightarrow\angle CEB=\angle ADO=\angle ADE+\angle EDO$

$$= \frac{1}{2}\angle C + \angle ECO = \angle ECB.$$

$$\Longrightarrow BE = BC \Longrightarrow AB = AE + BE = AD + BC.$$

解法二　设圆O的半径为r，从O作AD与BC的垂线，垂足分别是F与G（也就是切点），则

$$AF = r\operatorname{ctg} A,\ \ FD = r\operatorname{ctg}\frac{D}{2},$$

$$BG = r\operatorname{ctg} B,\ \ GC = r\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

$$AO = \frac{r}{\sin A},\ \ OB = \frac{r}{\sin B}.$$

$$AO - AF = r\left(\frac{1-\cos A}{\sin A}\right)$$

$$= r\operatorname{tg}\frac{A}{2} = r\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = GC,$$

即　　$AO = AF + GC.$

类似可得　　$OB = BG + FD.$

故　　$AB = AO + OB$

$$= AF + GC + BG + FD$$

$$= AD + BC.$$

2．在本题证明中，用记号$i\sim j$表示i与j同色．

解法一　我们用数学归纳法证明命题："对$a\in M$，$a>1$，必存在$b<a$，$b\in M$，使得$b\sim a$，"由此推得，M中每一个数与1同色．

当$n=3$，$M=\{1,\ 2\}$，由（i），$1\sim 2=3-1$，命题成