21 世纪大学课程辅导丛书

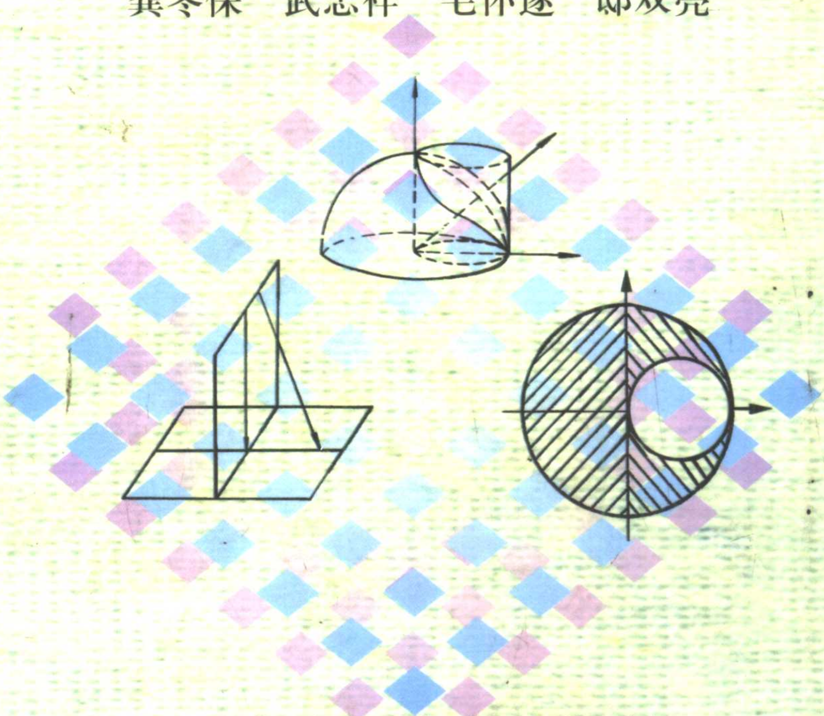
高等数学

典型题

(第2版)

解法·技巧·注释

龚冬保　武忠祥　毛怀遂　邸双亮



西安交通大学出版社

内容提要

作者根据多年的教学经验，收集了千余道高等数学的典型题。题型既有传统的证明题、解析题，又有近年考试中常见的选择题、填空题，即非客观题和客观题。所选的每道题力求有较新颖、独特的解法，并且从分析题意入手，引导出解题的技巧，旨在启发读者学会求解高等数学各类问题的方法和技巧，提高分析问题和解决问题的能力。为了突出一些典型的方法和揭示一些习题的背景，本书几乎对每道题作了注释。

本书可作为大学生学习高等数学的参考书，也可供报考硕士研究生的考生及参加高等数学竞赛的数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型题解法·技巧·注释/ 龚冬保等编 . - 2 版
西安:西安交通大学出版社,2000.1
ISBN 7 - 5605 - 1220 - 8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 龚… Ⅲ. 高等数学-解题 Ⅳ.013 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 76677 号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市咸宁西路 28 号 邮政编码:710049 电话:(029)2668316)
陕西省轻工印刷厂印装
各地新华书店经销

*

开本:787mm×1 092mm 1/16 印张:28.875 字数:709 千字
2000 年 1 月第 2 版 2001 年 1 月第 3 次印刷
印数:18 001~26 000 定价:29.50 元

前　言

为学好高等数学，要做一定数量的习题。在做数学练习题时，不少人采用“套公式”的方法，这样，只有通过大量的练习，才能获得一些数学知识，很难学会分析问题和解决问题的方法，所以，“套公式”的方法是不可取的。本书力图给读者展示另一种解题方法：从分析题目的条件与结论间的逻辑关系入手，理清解题思路，再一步一步地做下去；遇到需用的公式，自然地提取使用，这样能清楚地判断结论的正确性。我们认为坚持这样的解题方法，不但能对所学知识加深理解，还有利于培养数学的思维能力。这就是我们写这本书的目的。为此我们针对本课程的内容精选和编制了近千道典型题目，用上面所述方法作了解答，有些题目的解法独特、新颖，多数题目在书的旁边，对该题解题思路、技巧作了注释。因此，解答的正文步骤较简略，希望读者在阅读本书时能边看边推导，并能用我们介绍的一些方法和技巧，去解答更多的题。最好主动地去想一些更好的解题方法。

本书可作为高等数学的教学参考书，对报考硕士研究生以及准备参加数学竞赛的数学爱好者，本书更有参考价值。

本书的第 1 章、第 2 章、第 7 章由毛怀遂编写；第 3 章和第 8 章由邱双亮编写；第 4 章、第 5 章、第 6 章由武忠祥编写；第 9 章、第 10 章由龚冬保编写，最后由龚冬保统稿。写这样的书，对我们来说也是个尝试，希望对读者有所启发，但限于作者的水平，本书难免有疏漏与不足之处，恳请读者批评指正。

编者衷心感谢陆庆乐教授，他仔细地审校了全书，并提出了许多宝贵的意见，感谢西安交通大学出版社的支持，使本书得以出版问世。

编　者

第 2 版前言

本书第 1 版受到了读者的肯定和欢迎,我们表示衷心地感谢。应广大读者的要求,第 2 版在第 1 版的基础上,为各章增加了考试中常见的所谓“客观题”(即填空题和单项选择题)内容。挑选这些题的原则,一是要覆盖本章的基本内容;二是探讨解“客观题”的特殊方法与技巧。客观题已成为事实上的一类题型,这种题型与传统的“非客观题”对解题的要求不同,只问结果不管过程,由此产生了解客观题的特殊方法与技巧。当然解客观题仍然要依靠解非客观题的基本功。

基于客观题解题的要求,我们尽量做到将基本解法与特殊解法相对比的书写方法,减少答题的盲目性;有的题则在旁注中点出一些特殊技巧,以启发读者自己去思考和练习。这也算作是一种新的尝试吧。

编　者

1999.12

目　　录

第 1 章　函数　极限　连续

1.1　客观题

1.1.1　填空题

1-1　已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)$ 的定义域为 $\underline{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}$.

解　依题意得 $\sin\varphi(x)=1-x^2$，所以

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$$

$$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$$

所以
$$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$$

注意 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$

1-2　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\underline{\dfrac{1}{2}}$

解 1　因为

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$$

$$\leqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$$

所以，原式 $=\dfrac{1}{2}$

解 2　$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{K=1}^{n}\dfrac{K}{n^2+n+K}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{K=1}^{n}\dfrac{K}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{K=1}^{n}\left(\dfrac{K}{n^2+n+K}-\dfrac{K}{n^2}\right)$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{K=1}^{n}\dfrac{K}{n^2}=\dfrac{1}{2}$，及 $\left|\sum\limits_{K=1}^{n}\left(\dfrac{K}{n^2+n+K}-\dfrac{K}{n^2}\right)\right|\leqslant\sum\limits_{K=1}^{n}\dfrac{K(n+K)}{n^2(n^2+n+K)}$

$$\leqslant\sum_{K=1}^{n}\frac{2}{n^2}=\frac{2}{n}\to 0\qquad\left(\frac{K(n+K)}{n^2+n+K}\leqslant 2\right)$$

解 1 是利用夹逼准则.

解 2 则是用无穷小分析法. $\dfrac{K}{n^2+n+K}$ 与 $\dfrac{K}{n^2}$ 是等价无穷小. 故想到用 $\dfrac{K}{n^2}$ 代替 $\dfrac{K}{n^2+n+K}$，而证明它们差之和趋于 0.

1-3　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}+\cdots+\dfrac{1}{9n^2-3n-2}\right)=\underline{\dfrac{1}{3}}$

本题利用的是分拆法. 其目的是求

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$

出前 n 项的和.

1-4、$\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]=$ $\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

先求根号下的和，再将分子有理化.

1-5　$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ $\underline{e^6}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{\frac{6x}{\sin x}}$　6x x

$=e^6$

利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. 注意解中的变形方法.

1-6　设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^{\frac{x}{3}}=8$，则 $a=$ $\underline{3\ln2}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^a\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{a}{3}}$

$=e^a$

所以　$e^a=8$，$a=3\ln2$

此种变形法是求这类极限的有效手段之一.

1-7　$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=$ $\underline{2}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]-\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$=2$

利用等价无穷小代换：当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$.

1-8　$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\ln\cos x}=$ $\underline{-3}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{e^{x^2}-1}{\ln[1+(\cos x-1)]}+\frac{1-\cos x}{\ln[1+(\cos x-1)]}\right]$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\ln[1+(\cos x-1)]}+\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\ln[1+(\cos x-1)]}$

当 $x\to0$ 时 $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-1}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x-1}=-3$$

1-9 已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，则常数 $a=$ $\underline{\frac{3}{2}}$.

解 依题意得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}=1$$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{3}\ln(1+ax^2)}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax^2)}{3(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2ax^2}{3x^2}=\frac{2}{3}a$$

所以 $a=\frac{3}{2}$

本题利用了对数恒等式 $N=e^{\ln N}$. 当 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x$.

1-10 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{1/x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $\underline{e^{-\frac{1}{2}}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{(\ln\cos x)/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}e^{(\cos x-1)/x^2}=e^{-\frac{1}{2}}$

而 $f(0)=a$

所以 $a=e^{-\frac{1}{2}}$

函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

$\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]\sim\cos x-1$.

参见 1-8 题 .

1-11 设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant 0\\ \frac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处间断，则常数 a 与 b 应满足的关系是 $\underline{a\neq b}$.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+bx^2)=a$$

$$f(0)=a$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x}=b$$

所以 $a\neq b$

1.1.2 单项选择题

1-12 设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且它们可以构成复合函数 $f[f(x)]$，$g[f(x)]$，$f[g(x)]$，$g[g(x)]$，则其中为奇函数的是（ ）.

利用奇偶函数的性质可得.

(A) $f[f(x)]$　(B) $g[f(x)]$

(C) $f[g(x)]$　(D) $g[g(x)]$

(A)

$f[f(-x)]$
$=f[-f(x)]$
$=-f[f(x)]$

1-13 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\leqslant 0 \\ \cos x, & x>0 \end{cases}$

则 $f(-x)$等于(　).

(D)

本题主要检查对函数概念掌握的情况.从 $-x\leqslant 0$ 及 $-x>0$ 入手进行讨论.

(A) $f(-x)=\begin{cases} -e^{-x}, & x\leqslant 0 \\ -\cos x, & x>0 \end{cases}$

(B) $f(-x)=\begin{cases} e^{x}, & x\leqslant 0 \\ \cos x, & x>0 \end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases} -\cos x, & x<0 \\ e^{-x}, & x\geqslant 0 \end{cases}$

(D) $f(-x)=\begin{cases} \cos x, & x<0 \\ e^{x}, & x\geqslant 0 \end{cases}$

1-14 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$的定义域为(　).

(C)

(A) $x\in R$,但 $x\neq 0$　(B) $x\in R$,但 $1+\dfrac{1}{x}\neq 0$

(C) $x\in R$,但 $x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$　(D) $x\in R$,但 $x\neq 0,-1$

解 由 $x\neq 0$

分母不能取零.

$$1+\frac{1}{x}\neq 0$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\neq 0$$

得 $x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$

1-15 设 $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\leqslant 0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ -x, & x\geqslant 0 \end{cases}$,

则 $f[g(x)]=$(　).

(D)

复合函数的概念是学习导数和积分的一个重要环节,一定要熟练掌握.本题要从复合函数 $f[g(x)]$的内层 $g(x)$开始讨论.

(A) $\begin{cases} x^2+2, & x<0 \\ 1-x, & x\geqslant 0 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} 1-x^2, & x<0 \\ 2+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 1-x^2, & x<0 \\ 2-x, & x\geqslant 0 \end{cases}$　(D) $\begin{cases} x^2+2, & x<0 \\ 1+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$

解 由 $g(x)\leqslant 0$ 得 $x\geqslant 0$ 时,$g(x)=-x\leqslant 0$.

所以　　$x \geqslant 0$ 时　　$f[g(x)] = 1 + x$

由　　$g(x) > 0$ 得　$x < 0$ 时, $g(x) = x^2 > 0$

所以　　$x < 0$ 时　　$f[g(x)] = x^2 + 2$

1-16　函数 $y = \sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是(　). (B)

(A)　$[-1,1]$　　(B)　$\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

(C)　$[0,1]$　　(D)　$\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

解　因为　$1 + x^2 \geqslant 2|x|$

所以　$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

故选(B)

此题可看作是求函数 $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ 的值域,这样就把问题简化了.

1-17　设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,则 $y = x - [x]$ 是(　). (B)

(A)　无界函数　　(B)　周期为 1 的周期函数

(C)　单调函数　　(D)　偶函数

解　$y = x - [x]$ 的图像如图 1.1 所示

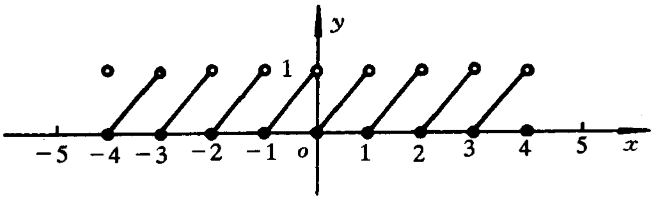


图 1.1

画草图是帮助解题的一种方法.

1-18　设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$,则下列断言正确的是(　). (D)

(A)　若 x_n 发散,则 y_n 必发散

(B)　若 x_n 无界,则 y_n 必有界

(C)　若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小

(D)　若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小

解　$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_n}(x_n y_n)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty}(x_n y_n)$$

$$= 0$$

本题的关键是利用极限的运算法则.

故选(D).

注: 取 $x_n=n, y_n=\frac{1}{n^2}$,知(A)不正确.

取 $x_n=\frac{1-(-1)^n}{2}n, y_n=\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}n$,知(B)不正确.

取 $x_n=\frac{1}{n^2}, y_n=n$,知(C)不正确.

1-19 设 $x\to0$ 时,$e^{x\cos x^2}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 n 为( ). (A)

(A) 5 (B) 4 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 2

解 因为 $e^{x\cos x^2}-e^x=e^x[e^{x(\cos x^2-1)}-1]$

而当 $x\to0$ 时

$$e^{x(\cos x^2-1)}-1\sim x(\cos x^2-1)\sim x\left(-\frac{x^4}{2}\right)$$

所以 $n=5$.

此题主要是利用等价无穷小的代换.也可用洛必达法则解之,但工作量较大.

1-20 当 $x\to0$ 时,下列4个无穷小量中比其它3个更高阶的无穷小量是( ). (C)

(A) $\ln(1+x)$ (B) e^x-1

(C) $\tan x-\sin x$ (D) $1-\cos x$

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\frac{1}{2}$$

故选(C).

本题中给出的(A),(B),(D)三个无穷小量是最常见的无穷小量.一定要熟练掌握,灵活应用.

1-21 设 $x\to0$ 时,$e^{x^2}-(ax^2+bx+c)$ 是比 x^2 高阶的无穷小,其中 a,b,c 是常数,则( ). (B)

(A) $a=1,b=2,c=0$ (B) $a=c=1,b=0$

(C) $a=c=2,b=0$ (D) $a=b=1,c=0$

解 由题意得

$$\lim_{x\to0}[e^{x^2}-(ax^2+bx+c)]=0$$

所以 $c=1$

本题主要利用极限的四则运算定理.也可用洛必达法则解之.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-(ax^2+bx+c)}{x^2}=0$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}-a-\dfrac{b}{x}\right)=0$

所以 $b=0, a=1$

1-22 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中 a,b 是常数,则( ). (C)

(A) $a=b=1$ (B) $a=-1,b=1$

(C) $a=1,b=-1$ (D) $a=b=-1$

解 由题意得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax\right)=b$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-ax^2-ax}{x+1}$存在.所以

$$1-a=0 \text{ 得 } a=1$$

故 $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-x\right)$

$=-1$

利用 b 是常数及极限运算法则确定出 a.然后代回原式再确定出 b.

1-23 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$及 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$均存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$( ). (C)

(A) 存在 (B) 不存在

(C) 不一定存在 (D) 存在但非零

请读者自己举例说明.

1-24 设 $f(x)$和 $g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义.$f(x)$为连续函数,且 $f(x)\neq 0$,$g(x)$有间断点,则( ). (B)

(A) $g[f(x)]$必有间断点 (B) $g(x)/f(x)$必有间断点

(C) $[g(x)]^2$ 必有间断点 (D) $f[g(x)]$必有间断点

解 若 $F(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$为连续函数,则

$$g(x)=f(x)F(x)$$

必为连续函数,矛盾.故选(B).

本题主要利用连续函数的运算法则.

1-25 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$. 讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为（ ）． (B)

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$　　(D) 存在间断点 $x=-1$

解 因为 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$

$$=\begin{cases}1+x, & -1<x<1\\ 1, & x=1\\ 0, & x\leqslant -1 \text{ 或 } x>1\end{cases}$$

故选(B).

先求出函数的表达式，再考查分断点处的左右极限．注意 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$ $(|x|<1)$．$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$ $(|x|>1)$．

1-26 设 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}$，则（ ）． (D)

(A) 有无穷多个第一类间断点　　(B) 只有 1 个可去间断点

(C) 有 2 个跳跃间断点　　(D) 有 3 个可去间断点

解 显然 $x=-1,0,1$ 是 $f(x)$ 的 3 个间断点．因为

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3-x}{\pi x}=-\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}=\lim_{y\to0}\frac{(y-1)(y-2)y}{-\sin\pi y}=-\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}=-\frac{2}{\pi}$$

故选(D).

其余间断点都是第二类的．

作变量代换 $y=x+1$．

1.2 非客观题

1.2.1 函数及其性质

1-27 试求下列函数的定义域

1) $f(x)=\lg(1-\lg x)$；　　2) $f(x)=\arccos\dfrac{x}{[x]}$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．

解 1) 要使 $f(x)$ 有意义，x 应满足

$$x>0 \quad 且 \quad 1-\lg x>0$$

即

$$0<x<10$$

故 $f(x)$ 的定义域为 $(0,10)$．

2) 要使 $f(x)$ 有意义，x 应满足

对应法则和定义域是函数的两个基本要素．应当养成这样的习惯：遇到函数就要注意它的定义域．

$$-1 \leqslant \frac{x}{[x]} \leqslant 1 \quad 且 \quad [x] \neq 0,$$

而 $$x-1<[x] \leqslant x$$

当 $x<0$ 时 $$0<\frac{x}{[x]} \leqslant 1$$

当 $0 \leqslant x<1$ 时， $\frac{x}{[x]}$ 无意义

当 $x \geqslant 1$ 时， $$1 \leqslant \frac{x}{[x]}$$

最后一个不等式的等号仅当 $x \in N$ 时成立，故 $f(x)$ 定义域为 $\{x \mid x<0$ 或 $x=1,2,3,\cdots\}$.

1-28 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域 $(a>0)$.

解 由 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，得

$$\begin{cases}0 \leqslant x+a \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x-a \leqslant 1\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}-a \leqslant x \leqslant 1-a \\ a \leqslant x \leqslant 1+a\end{cases}$$

故 $$a \leqslant x \leqslant 1-a$$

从而当 $a=1-a$ 即 $a=1/2$ 时，函数仅在 $x=1/2$ 一点有定义；当 $0<a<1/2$ 时，函数的定义域为 $[a, 1-a]$；当 $a>1/2$ 时无解. 即定义域为空集.

这些不等式由构成复合函数的原则得到

1-29 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$，求 $f(x-2)$.

本题主要讨论对应法则，且以复合函数为主.

解 为了求 $f(x-2)$，先求 $f(x)$，我们先给出求 $f(x)$ 的两种方法：

配方法

1) $f(x+2)=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2$

所以 $$f(x)=2^{x^2-4}-x+2$$

变量代换法

2) 令 $x=t-2$，代入得

$$f(t)=2^{t^2-4}-t+2$$

所以 $$f(x)=2^{x^2-4}-x+2$$

$$\begin{aligned} f(x-2) &= 2^{(x-2)^2-4}-(x-2)+2 \\ &= 2^{x^2-4x}-x+4 \end{aligned}$$

1-30 设

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x \geqslant 0 \\ -\mathrm{e}^x, & x<0\end{cases} \qquad \varphi(x)=\ln x$$

两个函数是否可以构成复合函数，要根据复合函

1) 求 $f[\varphi(x)]$ 及其定义域；

2) 可以复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数吗？

解 因为 $\varphi(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 所以 $\varphi(x)$ 的值域在 $f(x)$ 的定义域内，故 $f[\varphi(x)]$ 有意义，因而

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\varphi^2(x), & \varphi(x)\geqslant 0\\ -e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<0\end{cases}$$

即
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\ln^2 x, & x\geqslant 1\\ -x, & 0<x<1\end{cases}$$

从上式可看出 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

2) 由于 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,0]$，$\varphi(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，它们无公共的部分，所以不能复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数.

数的法则分别考查这两个函数的定义域及值域.

复合函数中内层函数的值域与外层函数的定义域之交集必须是非空集.

1-31 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}\quad \psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$$

求 1) $\varphi[\varphi(x)]$；2) $\varphi[\psi(x)]$.

解 1) 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$

$$\varphi[\varphi(x)]\equiv 1,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

2) 因为
$$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, |\psi(x)|\leqslant 1\\ 0, |\psi(x)|>1\end{cases}$$

而仅当 $|x|=1$ 时，$\psi(x)=1$

$|x|\neq 1$ 时，$1<\psi(x)\leqslant 2$

故
$$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, & |x|=1\\ 0, & |x|\neq 1\end{cases}$$

易知 $\varphi[\psi(x)]$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

复合函数类似"代入". 但要注意定义域的变化. 复合后最好写下复合函数的定义域.

1-32 试说明 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 是一个初等函数.

解 因为
$$f(x)=1-|x-1|=1-\sqrt{(x-1)^2},\quad x\in[0,2]$$

所以由初等函数的定义知 $f(x)$ 是一个初等函数.

本题说明分段函数也有可能是初等函数.

1-33 求 c 的一个值，使

$$(b+c)\sin(b+c)-(a+c)\sin(a+c)=0,$$

这里 $b>a$，均为常数.

解 令 $f(x)=x\sin x$

此解法巧妙地运用了函数的奇偶性，使问题得以解