北京大学教材

随机微分方程引论

龚光鲁 编著

北京大学出版社

随机微分方程引论

龚 光 鲁 编著

责任编辑 徐信之

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

850×1168 毫米 32 开本 14.5 印张 400 千字

1987 年 6 月第一版 1987 年 6 月第一次印刷

印数：00001—7,000 册

统一书号：13209·159 定价：2.90 元

内 容 提 要

本书着重介绍随机微分方程的强解、弱解及其与扩散和带跳跃的马氏过程间的联系.

第一章讨论 Brown 运动的随机积分. 第二章介绍了随机过程的一般理论的梗概,着重于随机过程的对偶投影理论. 第三章与第四章讨论了连续半鞅的随机微分方程的强解, Ito 方程的弱解, 马氏型 Ito 方程弱解的存在唯一性条件及其与扩散过程的联系. 第五章讨论一维情形, 着重论述边界点的分类、常返性与保守性. 第六章介绍带边界的随机微分方程与扩散, Fichera 边界分类. 第七章给出了一般半鞅的分解及 Ito 公式,拟左连续的 σ 有限点过程的积分. 还讨论了带有平稳点过程积分的随机微分方程, 这种方程是既有连续部分又有跳跃部分的强马氏过程的典型情形. 本书最后还有一个关于连续鞅与 Brown 运动构造的简短附录.

序　　言

近年来，随机微分方程、扩散过程及随机分析有了迅速发展，并广泛应用于系统科学、工程控制、生态学等各个方面．在这个领域中，先后出现了 Gihman-Skorohod，Stroock-Varadhan，Ikeda-Watanabe 等著名概率学家的专著．它们分别各有侧重地总结了这个领域内的最重要的新成果，并且对基本理论作了全面的阐述．这些著作在我国受到了广泛的重视．但是由于它们篇幅过大，论题过多，而且个别地方还不自封，所以对初学者来说，并不容易掌握．编写本书的目的，是力图选择上述著作中的一部分基本知识、概念和典型的方法，作一个较为浅显的阐述，并辅以笔者学习上述名著的体会，加入某些一般理论在具体情况下的实现和应用，以期便于读者理解掌握，铺填初学者走向专门研究的道路上的坑隙沟堑，为有兴趣于学习随机微分方程与扩散过程的初学者提供一个入门的教科书．

随机微积分与随机微分（积分）方程起源于马氏过程的构造，后者起始于 Kolmogorov 的分析方法与 Feller 的半群方法．但是对于扩散过程，更接近物理直观的 Langevin 方程

$$dX_t = \frac{v}{m}dB_t + \alpha dt$$

是很有吸引力的．可惜的是 Brown 运动 B_t 对几乎所有的轨道无处可微，因而从数学上说 dB_t 不能按一般的想法定义积分．Ito 首先给出了积分的定义，并以随机积分（微分）方程

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

的解来表达扩散过程．至今，从 Ito 开始的随机微积分不仅适用于扩散过程，而且适用于一大类非常广泛的随机过程——半鞅，成为随机分析的有力工具．

本书着重介绍随机微分方程的强解、弱解及它们与扩散过程和某些带跳跃的马氏过程之间的联系．本书只假定读者具有测度论，随机过程论基础与离散鞅论方面的基本知识．在这个基础上书中的内容是自封的．本书的主要内容曾在北京大学数学系研究生课中讲授．本书的对象是高年级大学生、研究生及对基本理论及其应用有兴趣的科技人员．

本书第一章讨论 Brown 运动的随机积分． 这是经典随机微积分的主要内容．虽然它们是第二章的特例，这里还是用较多的篇幅叙述并证明．一则对于只需要经典情形的读者，例如不准备专门从事随机过程理论研究的读者，提供必要的知识；再则也可把它们当作现代随机积分理论的背景．此外，读者也可以根据具体情况，可以跳过第二章与第三章的某些节段，也可以跳过第一章直接进入第二章．第二章的前三节介绍了随机过程一般理论的梗概(对于希望更全面学习与了解现代鞅论的读者，笔者向他们推荐一本严加安著的《鞅与随机积分引论》． 这方面的结果也可以参考 Jacod[13]，Dellacherie-Meyer[7])． 然后介绍半鞅的随机积分和连续半鞅的 Ito 公式(我们把不连续情况放到第七章讨论)． 本书第三章讨论连续半鞅的随机微分方程的强解和 Ito 方程的弱解．第四章讨论马氏型 Ito 方程弱解的存在唯一性条件，介绍了著名的 Stroock-Varadhan 定理，并且在存在唯一条件的基础上构造了扩散过程． 第五章讨论一维 Ito 方程与一维扩散，着重论述了边界点的分类，讨论了扩散的常返性与保守性． 第六章是带边界的随机微分方程与扩散，介绍了 Fichera 边界分类．第七章给出了一般半鞅的分解与 Ito 公式、并讨论拟左连续的 σ 有限点过程的随机积分及带有平稳点过程积分的随机微分方程．这种方程的解是既有连续部分又有跳跃部分的强马氏过程的典型情形．

在本书的最后，有一个关于连续时间鞅和 Brown 运动构造的简短的附录．

严加安同志对原稿提出了许多宝贵的意见，笔者在此对他致以深切的感谢．

目　　录

第一章　Brown 运动的随机积分

§1.1　有关 Brown 运动的某些性质

在本节中，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 恒指某个概率空间，其中 Ω 为样本点的全体，$\mathscr{F}$ 为 Ω 上的一个 σ 代数，而 P 是 $\mathscr{F}$ 上的一个概率测度．我们用 d 维列向量 x 记 d 维欧氏空间 R^d 中的元，并用 x^T 表示它的转置，用 $|x|$ 表示它的模．

记

$$R^{[0,\infty)} = \{u: u = (u_t)_{0\leqslant t<\infty}\},$$

$$\mathscr{B}(R^{[0,\infty)}) = \sigma(u_t: 0 \leqslant t < \infty)$$

(由一切 u_t 生成的最小 σ 代数，即使得一切 u_t 均为可测的最小 σ 代数)．

我们称 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到 $(R^{[0,\infty)}, \mathscr{B}(R^{[0,\infty)}))$ 的一个可测变换为随机过程．一般用 $X, Y, Z, \cdots$ 或 $(X_t)_{0\leqslant t<\infty}, (Y_t)_{0\leqslant t<\infty}, \cdots$ 等(有时也用希腊字母，例如 $\xi(t)$) 表示．

定义 1.1　若 U 为完备可分距离空间(即 Polish 空间)，由 U 的全体开子集生成的 σ 代数记为 $\mathscr{B}(U)$，则可测空间 $(U, \mathscr{B}(U))$ 称为距离可测空间．

例 1　设

$$C[0,\infty) = \{w: w = (w_t)_{0\leqslant t<\infty},\ w_t \text{ 为 } t \text{ 的连续函数}\}.$$

在 $C[0,\infty)$ 中定义距离 ρ_C:

$$\rho_C(w^{(1)}, w^{(2)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|w^{(1)} - w^{(2)}\|_n \wedge 1}{2^n}$$

$$(w^{(i)} = (w^{(i)})_{0\leqslant t<\infty},\ i = 1, 2)\text{、} \tag{1.1}$$

其中

$$\|w\|_n = \sup_{0\leqslant t\leqslant n} |w_t|. \tag{1.2}$$

那末 $C[0, \infty)$ 在 ρ_C 下成为完备可分距离空间，$(C[0, \infty),$ $\mathscr{B}(C[0, \infty)))$ 就是一个距离可测空间.

显然，如果用$[0, n]$代替 $[0, \infty)$，那末相应的 $C[0, n]$ 在模 $\| \ \|_n$ 下成为 Banach 空间. 所以实际上 $C[0,\infty)$ 是 Frechet 空间，也就是具有不变距离（即满足 $\rho_C(w^{(1)} + w,\ w^{(2)} + w) = \rho_C(w^{(1)},\ w^{(2)})$）的完备可分距离线性空间. 在这空间中收敛性 $w_t^{(n)} \to w_t$ 等价于 $w_t^{(n)}$ 在$0 \leqslant t < \infty$上局部一致收敛到 w_t，即在 $[0,\infty)$ 的任意紧子集上均为一致收敛.

为了使记号简洁，今后我们记 W^d 为 $C[0, \infty)$ 的 d 次笛卡儿乘积.

我们指出 $\mathscr{B}(W^d)$ 就是在 W^d 上的坐标过程

$$X_t(w) \equiv w_t, \quad w(=(w_t)_{0\leqslant t<\infty}) \in W^d$$

生成的 σ 代数. 为此我们先记后面的 σ 代数为 $\mathscr{B}'$.

首先我们注意在 t 固定时 $X_t(w)$ 是 W^d 上的连续函数（确切地说，是连续泛函）. 于是对这个 t 及任意实数 a，$\{w: w_t < a\}$ 是 W^d 的开集，因此 $\{w:\ w_t < a\} \in \mathscr{B}(W^d)$. 由典型逼近就得到 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}(W^d)$；反之，对于任意 n, m及 $w^0 \in W^d (w^0 = (w_t^0)_{0\leqslant t<\infty})$，我们有

$$\left\{w:\ \|w - w^0\|_n < \frac{1}{m}\right\}$$

$$= \bigcap_{\substack{t_i\text{有理} \\ 0\leqslant t_i\leqslant n}} \left\{w: |w_{t_i} - w_{t_i}^0| < \frac{1}{m}\right\} \in \mathscr{B}',$$

因此 $\mathscr{B}(W^d) \subset \mathscr{B}'$. 这样我们就得到 $\mathscr{B}' = \mathscr{B}(W^d)$.

定义 1.2 由可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到 $(W^d, \mathscr{B}(W^d))$ 的可测变换 $X(\equiv (X_t(w))_{0\leqslant t<\infty})$ 称为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的连续随机过程（显然当 t 固定时 $X_t(w)$ 是取值于 R^d 的随机变量，即 d 维随机向量）.

定义 1.3 概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的连续随机过程

$$B = (B_t)_{0\leqslant t<\infty}$$

称为 d 维 Brown 运动，如果 $B_0 = 0$，B_t 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的独

立增量过程:

$$E(B_t - B_s)(B_u - B_v) = 0 \quad (\forall v < u \leqslant s < t),$$

而且 $B_t - B_s$ 遵从数学期望为 0，方差矩阵为 $(t-s)I$(I 为单位矩阵)的 Gauss 分布(记成 $B_t - B_s \sim \mathscr{N}(0, (t-s)I)$).

如果 $(W^{d'}, \mathscr{B}(W^d), P)$ 上的坐标过程 $X_t(w) \equiv w_t$ 是 Brown 运动,则我们称 P 为 Wiener 测度，$(W^d, \mathscr{B}(W^d), P)$ 为 Wiener 空间. 今后我们专用记号 P^w 表示 Wiener 测度.

定义 1.4 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数族 $(\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t<\infty}$ 称为参考族,如果它对 t 是递增的右连续族. 即

$$\mathscr{F}_{t_1} \subset \mathscr{F}_{t_2} \quad (t_1 < t_2); \qquad \mathscr{F}_t = \bigcap_n \mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}} (\equiv \mathscr{F}_{t+}).$$

对于 $\mathscr{F}$ 的任意子 σ 代数族 $(\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t<\infty}$，其右连续化族 $(\mathscr{F}_{t+})_{0\leqslant t<\infty}$ 总是参考族. 记

$$\mathscr{F}_\infty = \bigvee_t \mathscr{F}_t$$

(这里 $\mathscr{F} \vee \mathscr{G}$ 表示含 σ 代数 $\mathscr{F}$ 及 $\mathscr{G}$ 的最小 σ 代数). 如果在 $(\Omega, \mathscr{F}_\infty)$ 上定义了概率测度 P, σ 代数 $\mathscr{F}_t$ 可以在 P 下完备化(即加进一切 $\mathscr{F}_\infty$ 零测集)，我们把它记成 $\bar{\mathscr{F}}_t^P$，或简记成 $\bar{\mathscr{F}}_t$. 易见

$$\overline{(\mathscr{F}_{t+})} = (\bar{\mathscr{F}})_{t+},$$

我们把它简写成 $\bar{\mathscr{F}}_{t+}$, 并称 $(\bar{\mathscr{F}}_{t+})$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 的完备化参考族.

有时我们也把参考族$(\mathscr{F}_t)$与概率空间$(\Omega, \mathscr{F})$放在一起,记成 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t<\infty})$ (或 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t))$). 随机过程 $X = (X_t)_{0\leqslant t<\infty}$ 称为 $(\mathscr{F}_t)$适应过程,如果对任意 $t \geqslant 0$ 固定, X_t 均为 $\mathscr{F}_t$ 可测(简记成 $X_t \in \mathscr{F}_t$).

定义 1.5 设 $X = (X_t)_{0\leqslant t<\infty}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上随机过程. 记

$$\mathscr{F}_t^0 = \sigma(X_s;\ s \leqslant t)$$

(括号中的随机变量所生成的 σ 代数),

$$\mathscr{F}_t^X = \mathscr{F}_{t+}^0.$$

我们称 $(\mathscr{F}_t^X)$ 为 X 生成的参考族.

我们先指出 Brown 运动的一个等价条件.

命题 1.1 对于 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上零初值的连续随机过程 B 而言,下列三个叙述彼此等价:

1° B 是 Brown 运动;

2° 对任意 $\lambda \in R^d$ 及 $t > s \geqslant 0$ 恒有

$$E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)} | \mathscr{F}_s^0) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)} \quad (\text{a. e. } dP); \tag{1.3}$$

3° 对任意 $\lambda \in R^d$ 及 $t > s \geqslant 0$ 恒有

$$E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)} | \mathscr{F}_s^B) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)} \quad (\text{a.e.} dP). \tag{1.4}$$

证明 1°⇒2°. 由于 B_t 是独立增量过程,对于 $t > s \geqslant 0$ 及任意 $\eta \in \mathscr{F}_s^0$ 有

$$E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}\eta) = E e^{i\lambda^T(B_t-B_s)} E\eta.$$

取 $\eta = I_A$(I_A 为 $\mathscr{F}_s^0$ 中任意一个集合 A 的示性函数),根据条件期望的定义,上面公式等价于

$$E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)} | \mathscr{F}_s^0) = E e^{i\lambda^T(B_t-B_s)} \quad (\text{a. e. } dP).$$

这就是 (1.3).

2°⇒3°. 取 n 使 $s + \frac{1}{n} < t$. 由(1.3)及条件期望的性质

$$\begin{aligned} & E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)} | \mathscr{F}^0_{s+\frac{1}{n}}) \\ & = e^{i\lambda^T\left(B_{s+\frac{1}{n}}-B_s\right)} E(e^{i\lambda^T\left(B_t-B_{s+\frac{1}{n}}\right)} | \mathscr{F}^0_{s+\frac{1}{n}}) \\ & = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2\frac{1}{n}} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2\left(t-s-\frac{1}{n}\right)} \quad (\text{a. e. } dP) \\ & \to e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)} \qquad (n \to \infty). \end{aligned} \tag{1.5}$$

令 $n^* = -n$. 记

$$\tilde{\mathscr{F}}_{n^*} = \mathscr{F}^0_{t-\frac{1}{n^*}} \qquad (n^* = -1, -2, \cdots),$$

$$X_{n^*} = E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)} | \tilde{\mathscr{F}}_{n^*}) = E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)} | \mathscr{F}^0_{s+\frac{1}{n}}).$$

于是 X_{n^*} 是一个复值的逆时鞅列,而且 $E|X_{n^*}| = 1(<\infty)$. 因此 X_{n^*} 存在 L_1 极限. (1.5)就变成

$$E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}|\mathscr{F}^0_{s+\frac{1}{n}}) \xrightarrow{L_1} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)}.$$

同时，逆时鞅列 X_{n^*} 与其 L_1 极限 $X_{-\infty}(\equiv e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)})$ 一起组成 $(\tilde{\mathscr{F}}_{n^*}, \tilde{\mathscr{F}}_{-\infty})$ 逆时闭鞅列，其中

$$\tilde{\mathscr{F}}_{-\infty} \equiv \mathscr{F}^0_{s+}.$$

也就是说

$$E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}|\mathscr{F}^0_{s+}) = E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}|\tilde{\mathscr{F}}_{-\infty})$$
$$= X_{-\infty} = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)} \qquad (\text{a. e. } dP).$$

此即(1.4)。

$3° \Rightarrow 1°$：对于 $\mathscr{F}_s$ 可测的任意 d 维随机变量 η 及 $\lambda, \mu \in R^d$ $t > s \geqslant 0$，利用 $3°$，我们有

$$\begin{aligned} E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}e^{i\mu^T\eta}) &= E[E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}e^{i\mu^T\eta}|\mathscr{F}^B_s)] \\ &= E[e^{i\mu^T\eta}E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}|\mathscr{F}^B_s)] \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)}Ee^{i\mu^T\eta}. \end{aligned}$$

这说明 $B_t - B_s$ 与 η 是相互独立的，而且 $B_t - B_s \sim \mathscr{N}(0, (t-s)I)$。因此 $(B_t)_{0\leqslant t<\infty}$ 是 Brown 运动。

命题 1.1 说明(1.3)可以作为 Brown 运动的特性刻划。由此我们可以把 Brown 运动的定义稍作推广。

定义 1.6 对于 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 及其上的参考族 $(\mathscr{F}_t)$（有时简记为 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$），我们称 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上连续的 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程 $B = (B_t)_{0\leqslant t<\infty}$ 为 (d 维) $(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动，如果 B 满足：对 $\forall\lambda \in R^d$，$t > s \geqslant 0$ 恒有

$$E(e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}|\mathscr{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)} \qquad (\text{a. e. } dP). \qquad (1.6)$$

注意此时 B_0 未必为零。所以有时也称 B 为初值 B_0 的 $(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动。B_0 可以是 $\mathscr{F}_0$ 中的任意随机变量。

仿命题 1.1 证明中 $3° \Rightarrow 1°$ 的部分的证明，我们也有：对 $(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动 B，$B_t - B_s$ 与 $\mathscr{F}_s$ 独立（因而也与 B_0 独立）。

注 1 利用 $\mathscr{F}^B_t \subset \mathscr{F}_t$ 及(1.4)可知：若 B 是$(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动，则 $B_t - B_0$ 是 Brown 运动。

注 2 易见：B 是 $(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动，当且仅当 B 是 $(\bar{\mathscr{F}}_t)$ Brown 运动(记住，$\bar{\mathscr{F}}_t$ 是 $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$ 的完备化)。

注 3 (1.6)中只须假定对有理的 λ 成立就足够了.

注 4 如果 $(\mathscr{F}_t)$ 不是参考族，而只是 $\mathscr{F}$ 的递增子 σ 代数族(不右连续)，那末(1.6)保证了 B 是 $(\mathscr{F}_{t+})$ Brown 运动.

注 5 我们有 $\mathscr{F}^B_{t-}=\mathscr{F}^B_t$，$\bar{\mathscr{F}}^B_{t+}=\bar{\mathscr{F}}^B_t$.

在本章中，我们将定义随机过程对 $(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动的积分.

首先我们指出：沿 $(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动的轨道定义积分一般是行不通的(除非把“可积”函数——随机过程——类限制得很小，这样也就失去了意义). 为此需要回忆 Brown 运动的如下特性：

引理 1.1 (Levy 的振动性质) 设 B 为 Brown 运动，又

$$s_1=t_0<t_1<\cdots<t_n=s_2,$$

$$\Delta t_k=t_{k+1}-t_k,\quad \Delta B_{t_k}=B_{t_{k+1}}-B_{t_k},\quad h=\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\Delta t_k,$$

那末

$$E\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^2-(s_2-s_1)\right|^2\leqslant 2h(s_2-s_1). \tag{1.7}$$

证明

$$\begin{aligned}
左&=E\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[(\Delta B_{t_k})^2-\Delta t_k\right]\right|^2\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}E[(\Delta B_{t_k})^2-\Delta t_k]^2\\
&\quad+\sum_{k\neq j}E[(\Delta B_{t_k})^2-\Delta t_k][(\Delta B_{t_j})^2-\Delta t_j].
\end{aligned}$$

由于 ΔB_{t_k} 与 $\Delta B_{t_j}(k\neq j)$ 相互独立，所以第二项为0，而第一项为

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}E[(\Delta B_{t_k})^2-\Delta t_k]^2\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}[E(\Delta B_{t_k})^4+(\Delta t_k)^2-2E(\Delta B_{t_k})^2\Delta t_k]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} [3[E(\Delta B_{t_k})^2]^2 - (\Delta t_k)^2]$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta t_k)^2 \leqslant 2h(s_2 - s_1).$$

引理 1.2 令 $[s_1, s_2]$ 的 2^n 等分点为

$$s_1 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{2^n}^{(n)} = s_2.$$

那末

$$S_n \equiv \sum_{k=0}^{2^n-1} (\Delta B_{t_k^{(n)}})^2 \xrightarrow{n\to\infty} s_2 - s_1 \quad (\text{a. e. } dP). \quad (1\ 8)$$

证明 对 $\forall \varepsilon_n > 0$，由 Chebyshev 不等式及(1.7)我们有

$$P(|S_n - (s_2 - s_1)| \geqslant \varepsilon_n) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_n^2} E|S_n - (s_2 - s_1)|^2$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon_n^2} 2h(s_2 - s_1)$$

$$= \frac{2}{2^n \varepsilon_n^2} (s_2 - s_1).$$

取 $\varepsilon_n = 1/n$，则 $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n \varepsilon_n^2} < \infty$. 记

$$A_n = \{|S_n - (s_2 - s_1)| \geqslant \varepsilon_n\}.$$

于是 $\sum_1^\infty P(A_n) < \infty$. 用 Borel-Cantelli 引理得到

$$P(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n^c) = 1$$

(A_n^c 为 A_n 的余集). 因此以概率为 1 地存在 $n_0(\omega)$ ($\omega \in \Omega$ 为 Brown 运动 B 所在的概率空间)，当 $n \geqslant n_0(\omega)$ 时恒有 $|S_n - (s_2 - s_1)| < 1/n$. 此即(1.8).

Brown 运动的轨道(即 B_t 的一个样本函数)虽然是连续的，但却"极不规则". 它们以概率为 1 地在任何有限(时间 t)区间内都

不可求长．这就是：

引理 1.3 以概率为 1 地 Brown 运动的样本函数在 t 的任何有限区间都不是有界变差的．

证明 令 $\{t_k^{(n)}\}$ 为引理1.2中的分割．记

$$\lambda_n(\omega) = \max_k |\Delta B_{t_k^{(n)}}|.$$

由 $B_t(\omega)$ 在 $[s_1, s_2]$ 上的一致连续性，当 $\max_k \Delta t_k^{(n)} \to 0$ 时，

$$\lambda_n(\omega) \to 0 \qquad (\text{a. e. } dP).$$

于是对引理 1.2 中的 S_n，我们有

$$|S_n| \leqslant \lambda_n(\omega) \sum_k |\Delta B_{t_k^{(n)}}|.$$

因此由引理 1.2 得到

$$\sum_k |\Delta B_{t_k^{(n)}}| \geqslant \frac{|S_n|}{\lambda_n(\omega)} \to \infty \qquad (\text{a. e. } dP).$$

Brown 运动的以上性质说明不宜对 Brown 运动定义按轨道的积分．

§ 1.2 Ito 积分的可积函数类

在给出 Ito 积分的经典定义之前，我们还需要讨论一下可供为“可积”函数的类．由于维数不起本质作用，下面我们不妨设

$$d=1.$$

定义 1.7 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上随机过程 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 称为可测过程，如果 $X(t,\omega)\equiv X_t(\omega)$ 是 $(\Omega\times[0,\infty), \mathscr{F}\times\mathscr{B}([0,\infty)))$ 可测函数．如果 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上有参考族 $(\mathscr{F}_t)$，而且对 $\forall T>0$，$X(t,\omega)|_{0\leqslant t\leqslant T, \omega\in\Omega}$（指把 t 限于 $[0, T]$ 上）均为 $(\Omega\times[0, T], \mathscr{F}_T\times\mathscr{B}([0, T])$ 可测函数，则我们称 X 为 $(\mathscr{F}_t)$ 循序过程．

法国 Strasbourg 学派在随机过程的一般理论中把随机过程看成 (t, ω) 的二元函数．由此区分出了一些特殊的二元可测类，它们在随机积分理论中起了重要作用．本书中我们假定了 $(\mathscr{F}_t)$ 的右连续性，从而可以把定义叙述得稍为简单．

定义 1.8 给定 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t))$. 考虑 $([0, \infty) \times \Omega, \mathscr{B}([0, \infty)) \times \mathscr{F})$ 的子集类:

$\mathscr{P}_g = \{A: A \in \mathscr{B}([0, \infty) \times \mathscr{F}), I_A$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 循序过程$\}$;

$\mathscr{O} = \sigma$(右连左极 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程);

$\mathscr{O}^* = \sigma$ (右连 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程);

$\mathscr{P} = \sigma$ (左连 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程);

$\mathscr{P}^* = \sigma$ (左连右极 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程);

$\mathscr{P}^{**} = \sigma$ (连续 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程),

$\mathscr{P}_g$ 称为 $(\mathscr{F}_t)$ 循序 σ 代数, $\mathscr{O}$ 称为 $(\mathscr{F}_t)$ 可选 σ 代数, $\mathscr{P}$ 称为 $(\mathscr{F}_t)$ 可料 σ 代数.随机过程 X 分别称为 $(\mathscr{F}_t)$ 可选过程和 $(\mathscr{F}_t)$ 可料过程(在不混淆的情形下还可把"$(\mathscr{F}_t)$"略去),如果 $X(t, \omega)$ 分别为 $\mathscr{O}$ 可测、$\mathscr{P}$ 可测. $\mathscr{O}$, $\mathscr{P}$ 集称可选、可料集.

当概率 P 给定时 $(\Omega, \mathscr{F})$ 可完备化成 $(\Omega, \bar{\mathscr{F}})$. 这时常常考虑 P 完备化了的参考系 $(\bar{\mathscr{F}}_t)$, 此时 $\bar{\mathscr{F}}_t$ 包含一切 P 零测集.

命题 1.2 对于 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t))$ 我们有

1° X 为循序过程,当且仅当 X 为 $\mathscr{P}_g$ 可测(记为 $X \in \mathscr{P}_g$);

2° $\mathscr{P} \subset \mathscr{O} \subset \mathscr{O}^* \subset \mathscr{P}_g$ (将来证明当 $(\mathscr{F}_t)$ 完备参考系时, $\mathscr{O} = \mathscr{O}^*$);

3°
$$\mathscr{P} = ([0, \infty) \times \mathscr{F}_0) \vee \sigma\{(s, u] \times \mathscr{F}_s, 0 \leqslant s < u < \infty\} = ([0, \infty) \times \mathscr{F}_0) \vee \sigma\{[s, u) \times \mathscr{F}_{s-}, 0 \leqslant s < u < \infty\} = \mathscr{P}^* = \mathscr{P}^{**}.$$

因而可料过程必是可选过程,可选过程必是循序过程.

证明 1° 的证明. 若 $X \in \mathscr{P}_g$, 则其正部 X^+ 是形如

$$\sum_1^N \alpha_i I_{A_i} \qquad (A_i \in \mathscr{P}_g)$$

的简单函数的极限. 按 $\mathscr{P}_g$ 的定义可知 I_{A_i} 是循序过程. 于是 X^+ 也是循序过程. 因而 $X = X^+ - X^-$ 是循序过程. 反之, 若 X 为循序过程,则对任意 $\lambda \in R$, $I_{\{X \leqslant \lambda\}} = I_{(-\infty, \lambda]}(X)$ 也是循序过

程. 按定义推得 $\{X \leqslant \lambda\} \in \mathscr{P}_g$, 即 $X \in \mathscr{P}_g$.

$2°$ 的证明. 设 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 是左连续 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程. 令

$$X_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} X_{\frac{k}{2^n}} I_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(t).$$

显然 $X_t^{(n)} \to X_t$.

由 $X^{(n)} \in \mathscr{O}$ 立知 $X \in \mathscr{O}$. 但是 $\mathscr{P}$ 由一切如上类型的 X 所生成,因此 $\mathscr{P} \subset \mathscr{O}$.

再则,设 X 为右连续 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程. 在 $[0, T] \times \Omega$ 上我们定义

$$X_t^{(n)} = X_T I_{\{T\}}(t) + \sum_{k=1}^{2^n} X_{\frac{k}{2^n}T} I_{[\frac{k-1}{2^n}T, \frac{k}{2^n}T)}(t).$$

显见 $X^{(n)} \in \mathscr{B}([0, T]) \times \mathscr{F}_T$, 而且在 $[0, T] \times \Omega$ 上有 $X^{(n)} \to X$. 因此 $X(t, \omega)|_{t\leq T} \in \mathscr{B}([0, T]) \times \mathscr{F}_T$. 即 X 为循序过程. 从而 $X \in \mathscr{P}_g$. 但是 $\mathscr{O}^*$ 由一切如上类型的 X 所生成,所以 $\mathscr{O}^* \subset \mathscr{P}_g$.

$3°$ 的证明. 由于如下的过程

$$X = I_A(\omega) \quad (A \in \mathscr{F}_0),$$

$$Y = I_{(s,u] \times A}(t, \omega) \quad (A \in \mathscr{F}_s)$$

均为左连续 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程,我们得到

$$([0, \infty) \times \mathscr{F}_0) \vee \sigma((s, u] \times \mathscr{F}_s, 0 \leqslant s < u < \infty) \subset \mathscr{P};$$

反之,设 X 为左连续 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程. 令

$$X_t^{(n)} = X_0 + \sum_{1}^{\infty} X_{\frac{k}{2^n}} I_{(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}(t).$$

显然 $X^{(n)} \to X$. 由 $X_{\frac{k}{2^n}} \in \mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}}$ 推出 $X^{(n)} \in [0, \infty) \times \mathscr{F}_0 \vee \sigma((s,u] \times \mathscr{F}_s)$, 因而 $X \in [0,\infty) \times \mathscr{F}_0 \vee \sigma((s, u] \times \mathscr{F}_s)$. 但是 $\mathscr{P}$ 是由一切如上类型的 X 所生成, 所以 $\mathscr{P} \subset [0, \infty) \times \mathscr{F}_0 \vee \sigma((s, u] \times \mathscr{F}_s)$. 第二个等式显然. ▌

由第一个等式推得 $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}^*$. 我们证明 $\mathscr{P}^* \subset \mathscr{P}^{**}$. 事实