

材料力学

10 殷有泉 邓成光 编
北京大学出版社

104



新登字（京）159号

材 料 力 学

殷有泉 邓成光 编

责任编辑：邱淑清

*

北京大学出版社出版发行

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店经售

*

850×1168毫米 32开本 9.5印张 237千字

1992年8月第一版 1992年11月第二次印刷

印数：1000—5000册

ISBN7-301-01576-3/O·253

定价：6.40元

前 言

这是一本为北京大学力学系材料力学课写的教材。由于理科大学力学专业的培养目标和课程设置与工科院校不同，材料力学课从内容到体系上都应具有自己的特点。

北京大学力学专业材料力学课仅有70余学时，这比工科院校要少得多，因而在内容安排上不能面面俱到。在本书中，动力学和塑性分析以及材料力学实验等方面的内容几乎没有涉及到。这是因为在力学专业的课程设置上，还有一系列的后续课，它们包括力学实验(包括材料力学实验内容)、高等材料力学、弹性力学和塑性力学等。这些后续课的某些内容就没有必要一定在材料力学课内不深不透地重复。因此，本书略去了一般材料力学繁杂的体系，突出重点，以一维结构为纲，以弹性变形为主展开讨论，力求建立一个在内容上少而精的材料力学体系框架。

理科大学力学专业的毕业生除了到生产设计的第一线工作外，还有相当数量的学生进一步攻读硕士学位，他们将充实到科研单位进行科学研究工作，或到高等院校做教学工作。因而在理科大学设置材料力学课程应有双重目的。一方面，理科力学专业学生通过材料力学的基本内容和处理问题方法的学习，了解到工程设计的一些基础知识，学到一些他们将来与工程技术人员协作和交流中必要的共同语言以及解决工程实际问题时所需的最基本的能力；另一方面，学生可以通过材料力学学习建立和了解固体力学的一些基本概念和研究方法，这些概念和方法对以后进一步学习其它力学后续课是十分重要的。在一定意义上讲，理科材料力学是力学专业学生的一个启蒙课，它具有固体力学引论的特性。本书在内容的选择上考虑了材料力学教学中这种双重目的，

其主要内容可以从目录上看到。本书不仅介绍了弹性杆件和杆系在强度、刚度和稳定性方面的概念和计算方法等基础知识，还增加了某些现代的内容。例如弹性变形的热力学、压杆稳定的过临界性质。在材料力学一般原理讨论中引用了勒让德变换，对偶地介绍了广义力和广义位移空间的能量原理和应用等。这些内容都是一般材料力学教材所没有的，同时它们也是更深入、更准确地掌握某些基本概念和方法从而为今后进一步学习后续课所必需的。

要学好材料力学课，不仅要求学生掌握正确的概念，熟悉理论公式的建立和推导过程以及它们的适用范围，还要求学生做一定数量的练习。清华大学编的《材料力学解题指导及习题集》是一本很好的书，建议学习本课的学生在此书中适当选些题目来做。

北京大学武际可教授阅读了本书原稿，并提出不少改进意见，在此表示感谢。

殷有泉 邓成光

1990年3月于

北京大学力学系

内 容 简 介

本书按照综合性大学力学专业的教学要求，分九章系统讲授了材料力学的基本内容。全书以一维结构为纲，以弹性变形为主线展开讨论，重点突出，层次清楚，基础概念叙述严格，理论推导严谨简练，建立了一个在内容上少而精的材料力学教学体系。

本书是作者在北京大学力学系多年教学基础上写成的。对读者掌握材料力学的基本知识并进而学习固体力学的有关课程是一本极为有益的启蒙教材。

目 录

第一章 基本概念	(1)
1-1 材料力学的任务、对象和方法	(1)
1-2 外力	(3)
1-3 内力	(4)
1-4 用自由体方法求支反力和内力	(6)
1-5 应力	(9)
1-6 变形和应变	(12)
1-7 材料性质, 应力-应变曲线	(14)
1-8 弹性介质, 胡克定律	(16)
1-9 理想塑性介质	(18)
第二章 拉伸和压缩	(21)
2-1 直杆的拉伸和压缩, 圣维南原理	(21)
2-2 拉伸和压缩时杆内的应力和变形	(23)
2-3 拉伸和压缩时的简单静不定问题	(34)
2-4 简单桁架	(44)
2-5 拉伸和压缩时的强度计算和刚度计算	(52)
2-6 弹性变形势能	(55)
2-7 弹性变形的热力学	(58)
2-8 弹性波在杆内的传播	(63)
2-9 冲击应力	(66)
第三章 扭转	(70)
3-1 圆截面直杆的扭转	(70)
3-2 截面的翘曲和刚周边假设	(79)
3-3 闭口薄壁截面直杆的扭转	(80)
3-4 开口薄壁截面直杆的扭转	(85)
3-5 直杆扭转的强度和刚度计算	(89)

第四章 复杂应力状态	(93)
4-1 平面应力状态.....	(93)
4-2 应力圆.....	(100)
4-3 空间应力状态.....	(103)
4-4 对于主轴的胡克定律.....	(111)
4-5 一般情况单元体的变形.....	(116)
4-6 弹性变形能.....	(117)
4-7 强度理论.....	(121)
第五章 弯曲应力	(131)
5-1 弯曲内力-剪力和弯矩.....	(131)
5-2 弯曲应力.....	(146)
5-3 梁的强度条件和梁的合理截面.....	(153)
5-4 两种材料的组合梁.....	(161)
5-5 非对称弯曲.....	(165)
5-6 偏心压缩和截面核心.....	(169)
第六章 弯曲变形	(175)
6-1 挠曲轴的微分方程.....	(175)
6-2 弯曲方程的积分.....	(180)
6-3 简单的静不定问题.....	(188)
6-4 梁的刚度计算.....	(192)
6-5 常系数线性微分方程的初参数解法.....	(195)
6-6 纵-横弯曲	(199)
6-7 弹性基础上梁的弯曲.....	(203)
第七章 薄壁杆件的弯曲和扭转	(210)
7-1 弯曲正应力和弯曲剪应力.....	(210)
7-2 弯曲中心.....	(214)
7-3 扭转时的附加应力.....	(217)
7-4 约束扭转方程.....	(222)
7-5 承受双力矩的杆件.....	(228)
7-6 约束扭转的某些例子.....	(233)
第八章 压杆的稳定性	(236)
8-1 稳定性问题的提法.....	(238)

8-2	按欧拉方法给出的压杆临界力.....	(239)
8-3	欧拉弹性线.....	(243)
8-4	压杆直线形态的稳定性.....	(246)
8-5	弹性系统的过临界性质.....	(249)
8-6	压杆在其它支承条件下的临界力.....	(254)
8-7	压杆的稳定性计算.....	(257)
第九章	弹性杆系的一般性质	(264)
9-1	弹性系统, 广义力和广义位移.....	(264)
9-2	拉格朗日定理和卡斯蒂利亚诺定理.....	(266)
9-3	线性弹性系统.....	(269)
9-4	位移积分.....	(273)
9-5	静不定杆系, 极值原理.....	(277)
9-6	杆系结构力学中的力法和位移法.....	(284)
主要参考资料		(292)

第一章 基本概念

1-1 材料力学的任务、对象和方法

材料力学是固体力学的一个分支，是研究结构构件和机械零件承载能力的基础科学。它的基本任务是：将工程结构和机械中的简单构件简化为一维杆件，计算杆中的应力、变形并研究杆的稳定性，以保证结构能承受预定的载荷；选择适当的材料、截面形状和尺寸，以便设计出既安全又经济的结构构件和机械零件。因而对机械和结构设计人员来说，材料力学是不可缺少的重要基础知识之一。对于力学工作者来说，在解决实际问题与工程师们共事中，掌握了材料力学才会有最基本的共同语言。

材料力学所采用的概念和方法是属于变形固体力学范围的，它是固体力学中最早发展起来的一个分支。材料力学中采用的最基本的假设是连续介质假设。它假设真实物体(构件和零件)是由连续介质构成，就是认为物体在变形前后整个体积被组成该结构的介质所填满，结构内部原来相邻近的点在外界作用下仍保持相邻近，不产生新的裂缝和孔洞。在这样的假设下，物体内部的各种力学量都是连续变化的，以致能用坐标的连续函数来描述，能用无限小分析的数学方法来研究。

连续介质仅仅是一个模型。物质结构理论指出，物质是由分子构成的，分子是由原子构成的，在分子之间和在原子之间都存在空隙。而在连续介质模型中，我们说的一个点应该是一个物质点，即是一个含有足够数量的分子或原子的体积微元，这个微元在宏观上是一个点，在微观上它包含很多分子和原子，以致使材

料性质和各种力学量能有一个稳定的统计平均值。用这个统计值来代表物体上相应点的宏观性质，而且认为物体就是由这些质点组成的连续介质。

材料力学的主要研究对象是杆件，有时也研究简单的杆系。杆件和杆系都是由实际构件和结构简化而成的力学模型。所谓杆件是指轴向尺寸远大于横向尺寸的物体。例如，若用 l 表示轴向尺度，用 h 和 h' 表示两个横向特征尺寸，对于杆件应有 $l \gg h, l \gg h'$ (图1-1-1)。在大多数情况中， h 和 h' 有相同的数量级，也就

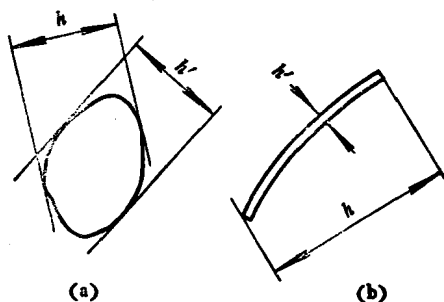


图 1-1-1

是， $h/h' \sim 1$ (如图1-1-1(a))。这时比值 h/l 是一个小参数， $h/l \ll 1$ 在估价理论精度时是一个重要依据。如果杆件的两个横向尺寸明显不同，比值 h'/h 构成另一个小参数，当 $h'/h \ll 1$ 时，这种杆件称为薄壁杆件 (如图1-1-1(b))。杆系是由若干杆件组成的系统，在杆系 (有时也称为杆系结构) 中，数根杆件的汇交联结处称为节点 (又称结点)。在每一个节点处，各杆端之间都不得有相对位移。节点分为铰节点和刚节点。在铰节点处，各杆之间的夹角可以自由改变，故铰节点不能传递力矩；在刚节点，各杆件之间的夹角保持不变，刚节点能传递力矩。

由于材料力学研究对象的特殊几何性质，可以对它的变形特征做某些假设 (例如平截面假设)。采用这些假设可使理论的表述和计算大为简化。于是，材料力学成为固体力学中在数学上最为

简单的一个分支。正由于数学工具简单，在材料力学中能够突出固体力学概念和方法的物理本质。当学生学习固体力学时，材料力学将成为一门具有启蒙性质的课程。

1-2 外 力

对于一个我们所研究的具体物体(构件和零件，或者结构和机械)来说，外力与内力的区别是很明显的。外力是指其它物体的质点对所研究物质点的作用，内力是物体内部质点间的相互作用。

外力可以施加在物体的表面上，这时称为表面力。表面力是一种接触力。例如，水坝表面承受的水压力，烟筒承受的风压力，其它物体与所研究物体之间的接触压力和摩擦力等。表面力用施加在物体单位面积上的力的大小和方向来表征，这种单位面积上的力也称为表面力的集度，其单位是 Pa (帕)。外力也可以施加在物体的体积上或质量上，这类外力叫体积力。例如重力、磁力和惯性力等。体积力用单位体积上所受力的大小和方向来表征，单位是 N/m^3 。(当然，在定义表面力和体积力时所谓单位面积和单位体积等术语都是在极限意义下使用的。)表面力和体积力都是矢量。

当两个物体通过接触而相互作用时，相接触的部位不是一个点而是一个面。然而，当接触面面积的大小与物体表面的尺寸相比非常小时，我们可以不考虑接触面面积的值，而以接触面上作用力(是一种表面力)的合力的形式作用在物体表面的相应点上。这种作用在一点上的力称为集中力。集中力的概念最初是在刚体力学中求物体的重心时引入的，在那里用一个假想的作用在重心上的集中力代替按体积分布的真实重力。在材料力学中采用了连续介质模型，因而连续分布的分布力概念才是更基本的，而集中力则是作用在某一小面积(或者小体积)上分布力的合力，当这个面

积(或体积)不断缩小至某一点时合力的大小保持不变,面积(或体积)收缩到的点就是集中力的作用点,合力的大小就是集中力的大小。集中力的单位是N。集中力是一个矢量。集中力的引用为材料力学的理论计算带来了方便。

所研究的物体在空间位置上受到其它物体的限制称为约束。约束物体与被约束物体之间通过接触面和接触点相互作用有力,我们把施加于被约束物体上的这种作用力叫做约束力或支反力。我们将那些与约束无关的外力叫做载荷。载荷是事先已知的外力,因此有时称为主动力。相应的有表面力载荷、体积力载荷和集中力载荷。约束力的性质不仅与约束的类型有关,还与载荷的形式有关。一般地说,当载荷不存在时,相应的约束力也不存在。因而约束力带有被动的性质。约束力可以是表面力,也可以是集中力和集中力矩。在材料力学中最常见的约束是简支、活动简支和固支。简支是使物体上某点保持不动的一种约束,相应的支反力作用于铰链销中心(就是那个不动点)上,其大小和方向都是未知的。活动简支是使物体上某点在某一方向上保持不动的约束,相应的支反力的方向是已知的,大小是未知的。固支是使物体上某点的邻域既不能移动也不能绕这点转动,相应的约束力是一个未知的力矢量和一个未知的力矩矢量。

如果所研究的物体处于平衡状态,根据硬化原理,它承受外力(载荷和约束力)的平衡条件与刚体一样,即合力矢量和合力矩矢量都等于零。

1-3 内 力

未变形的物体之所以有一定的形状,是由于物体内部原子之间存在着相互作用,在这种作用下每个原子处于平衡状态。外力引起物体的变形,使原子的间距改变了,原子间的相互位置改变了,原子间的相互作用也改变了。由于变形引起原子间相互作用

力的变化，就是我们所说的内力。

由于我们已经采用了连续介质模型，自然要放弃物质的原子结构的概念。因此对于物体引用内约束的概念。我们认为物体的整体性和相对变形都是由物体的这种内约束所保证。同时，按照约束公理，将内约束用内力代替，并且用形式上的方法来求内力。

为了显示内力，可用一假想的平面将物体截开分为两部分，也就是破坏物体的内约束，同时用内力代替这种内约束。这样，内力就是物体两部分之间的相互作用力(图1-3-1)。这种阐明物体内部相互作用(内力)的方法叫做截面法。这种方法不仅在材料力学中使用，也在任何连续介质力学中使用。

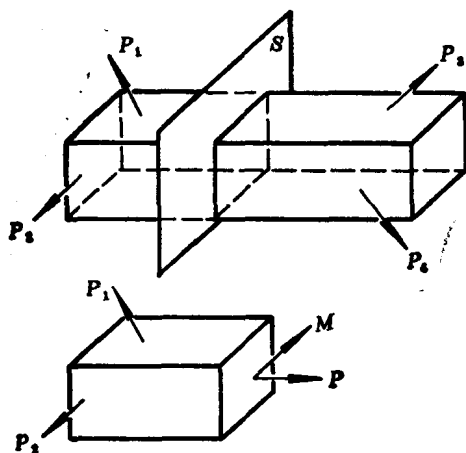


图 1-3-1

实际上，物体的两部分在假想截面上的相互作用是某种连续分布的力。在材料力学中，我们将这种面内分布力的合力定义为内力。因此，一般来说，截面上的内力是由一个力矢量和一个力矩矢量构成。或者说由三个力分量和三个力矩分量构成。

1-4 用自由体方法求支反力和内力

用一个假想的平面将物体剖分成两部分，去掉一部分，保留另一部分。在保留的这一部分上，用作用在剖面上的内力代替原来的内约束。同时将这部分物体受到的外部约束用相应的约束力标明，这种内力和外力清楚地标明出来的物体保留部分叫做自由体。根据自由体的平衡条件确定内力的方法叫做自由体方法。自由体方法是材料力学中研究内力的最基本方法。下面我们将用这种方法确定某些结构的内力和支反力。

例1-4-1 桁架分析。

桁架是由一些用直杆组成的三角形框构成的杆系。桁架的节点都是光滑的铰节点，而外载荷和支座约束力都集中作用于各节点上。由于桁架中每一杆件都是只在端点受力的二力杆，所以杆件仅承受沿杆轴的拉力或压力。桁架可以用来建造像桥梁、升降机、电视塔等常见的工程结构。在图 1-4-1 中表示的是一个小的铁路桥的典型桁架。整个桁架支承于 a, l 两点。在 a 点是固定铰支，

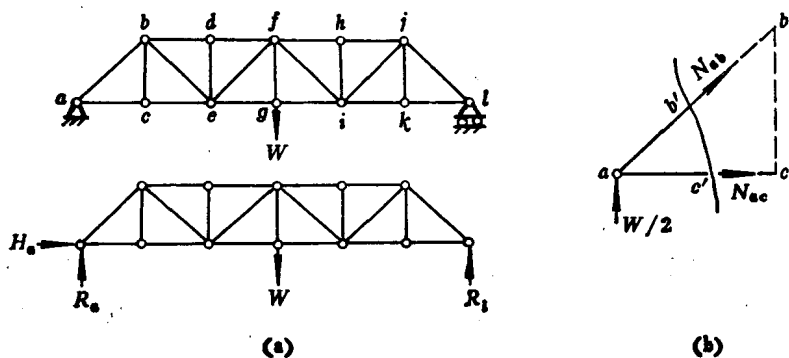


图 1-4-1

在 l 点是滑动铰支。桁架的上弦、下弦及竖杆的长度均为 L ，因此斜杆长为 $\sqrt{2}L$ 。

现在设在桁架中心的节点 g 上作用集中力 W 。我们要确定的是桁架各杆的内力。

首先计算两个支点处的支反力。将整个桁架作为一个自由体。它的三个支反力分别记为 R_a 、 H_a 和 R_l 。它们与载荷 W 共同作用使自由体平衡。水平合力为零，铅直合力为零以及关于 a 点的力矩总和为零的条件分别是

$$H_a = 0, \quad W - R_a - R_l = 0,$$

$$W \cdot 3L - R_l \cdot 6L = 0.$$

从而得
$$H_a = 0, \quad R_a = R_l = W/2.$$

其次，我们求杆件 ab 和 ac 中的内力。为此，用一个假想的平面切开 ab 和 ac ，并将 $ab'c'$ 视为自由体。在切口 b' 处用内力 N_{ab} 代替内约束，在 c' 处用内力 N_{ac} 代替内约束，在支点 a 作用有力 $W/2$ 。考虑自由体在铅直方向的平衡，

$$\frac{W}{2} + N_{ab} \sin 45^\circ = 0$$

因而 $N_{ab} = -W/\sqrt{2}$ 。再考虑自由体在水平方向的平衡，

$$N_{ab} \cos 45^\circ + N_{ac} = 0$$

因而 $N_{ac} = W/2$ 。对桁架的其它杆件可做类似的计算，这里不再细说了。

杆 ab 的内力为负值，这表明力的实际作用方向与图中假设的相反，即实际上是轴向压力，这样的杆称为压杆。杆 ac 的内力为正值，表明力的实际作用方向与图设的一致，承受的是轴向拉力，这样的杆称为拉杆。可以一般地认为，力的方向与截面外法向一致的杆为拉杆，内力取正值，不一致的杆为压杆，内力取负值。

例 1-4-2 悬臂梁。

梁是以弯曲来抵抗横向载荷的元件。图 1-4-2 表示一个左端为固支约束、右端自由的梁，称为悬臂梁。它所承受的横向载荷

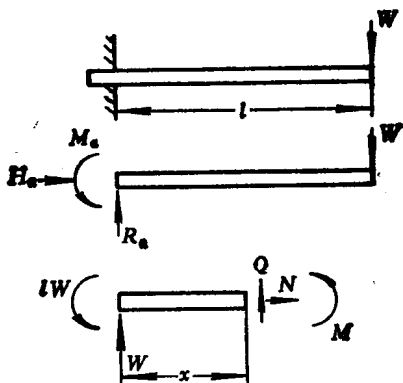


图 1-4-2

是右端的集中力 W 。

首先求支反力。固支约束既限制平动也限制转动，因而在平面力系情况中，支反力有两个分量 H_a 和 R_a ，以及一个反作用力矩 M_a 。把整个梁当作一个自由体，平衡条件是

$$H_a = 0, \quad R_a - W = 0, \quad M_a - lW = 0.$$

因而得 $H_a = 0, \quad R_a = W, \quad M_a = lW$ 。

其次求内力。在距梁左端面为 x 处用一假设截面将梁剖分为两部分，把左半部分作为自由体，代替内约束的内力是 N, Q, M ，其中 N 是截面外法向方向的合力，称为轴力， Q 是截面内的合力，称为剪力， M 是截面内的合力矩，称为弯矩。现在，由自由体的平衡条件得

$$N = 0, \quad Q = -W, \quad M = lW - Wx = W(l - x).$$

假想截面的选取是任意的，随着 x 的变化，所有截面的内力（指广义的内力，包括内力矩）都确定了。

在上面的几个例题中，无论是求支反力还是求内力，所列的平衡方程的个数恰好与未知数的个数相同，仅用静力平衡条件，便可确定支反力或内力。这类问题称为静定问题。在某些问题中，支反力或内力的个数大于平衡方程的个数，这时仅用平衡条件不

能确定支反力和内力，这类问题称为静不定问题或超静定问题。图 1-4-3(a) 所示的桁架，支反力数为 4，而平衡方程数为 3，求支反力是静不定的。图 1-4-3(b) 所示的桁架，对于求支反力是静定的，但求内力时则是静不定的，因为内力个数多于平衡方程个数。有时将求支反力的静不定问题称为外静不定问题，将求内力的静不定问题称为内静不定问题。静不定问题的研究是材料力学的重要内容之一。

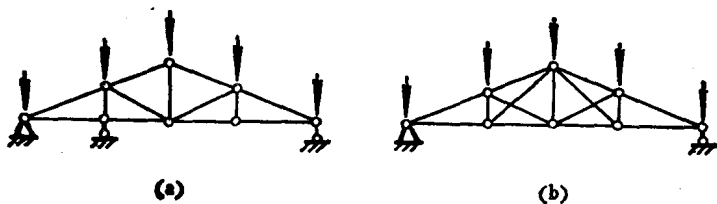


图 1-4-3

1-5 应 力

如上所述，内力是物体某一截面上合力和合力矩的总称，它还不能表征截面内不同点受力的差别，为此需要引进应力的概念。所谓应力是对截面上某点而言的。被假想截面剖分为两部分的物体，在截面上某点邻域内，这两部分相互作用力的集度就是这一点的应力。研究一点的应力仍采用截面法。为此，通过所研究的点做一假想平面，将物体剖分为两部分，如图 1-5-1 所示，舍去右侧部分，并以内力来代替它对左侧部分的作用。在截面内取一面积元 ΔF ，所研究的点记为 M ， M 点处于面积元 ΔF 内。以向量元 ΔP 代表作用在该面积元上的合力。用 ΔP 除以 ΔF 定义了一个新的矢量 σ^* ，其方向与 ΔP 一致。我们称 σ^* 是在面积元 ΔF 上的平均应力。现在令面积元 ΔF 不断缩小，但要使 M 点始终包含在 ΔF 内，也就是面积元将收缩到 M 点。在这过程中，矢量 σ^* 的大小和方向