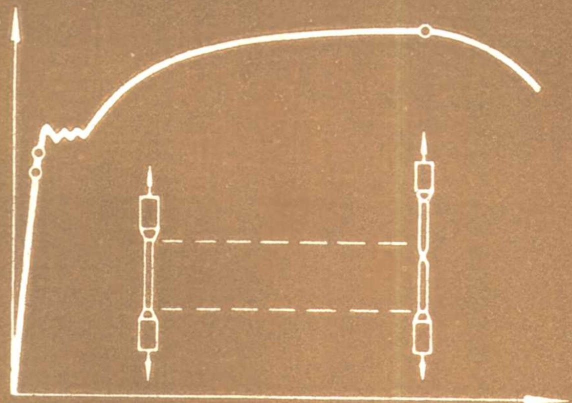
高等学校试用教材

材料力学

下　册

何技宏　主编



华南工学院出版社

高等院校试用教材

材料力学

（下）

何技宏
房腾祥 张裕良 编著

华南工学院出版社

内 容 提 要

本书是根据1985年全国材料力学教材会议订出的基本要求，结合本院教学经验编写而成。全书共十八章，分上、下册。上册主要内容有：拉伸及压缩，剪切，应力和应变分析，强度理论，扭转，梁的平面弯曲，梁中的应力，梁的弯曲变形。下册主要内容包括超静定梁，非弹性弯曲，曲杆平面弯曲的强度计算，组合变形，厚壁圆筒及薄壁容器，压杆稳定计算，能量法，动应力，交变应力等。

本书内容丰富，例题新颖，富有启发性，各章附有习题。可供理工科高等院校作教材使用，也可供有关工程技术人员及自学成才者参考。

材料力学（下）

何政宏 房腾祥 张裕真 编著

责任编辑 林素华

华南工学院出版社出版发行

新华书店经销

华南工学院印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张14.1 316千字

1988年3月第1版 1988年3月第1次印刷

印数1—5000

ISBN7-5623-0022-1/O·5(课)

定价：2.05元

序

材料力学是一门工程技术基础学科，是工程设计的重要基础。本书根据1985年全国材料力学教材会议订出的基本要求，结合华南工学院三十多年来的材料力学教学实践，并吸取了国际上材料力学名著之精华编写而成。

本书内容比较丰富，既有材料力学的基本概念、基本理论和基本方法，又有工程专业人员所关心的专门课题，还有电子计算机在材料力学解题中的应用。书中带星号的内容，教师可以根据各专业的不同要求选择讲授。

本书由何技宏教授主编，分上、下册出版。编者结合自己多年的教学经验，把立足点放在培养读者分析问题和解决问题的能力上。本书力求体现科学性、实用性和启发性，做到由浅入深、循序渐进，便于自学。

本书的出版得到华南工学院材料力学教研组不少老师的支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

最后，敬请读者和同行专家对书中不妥之处，予以批评、指正。

编　者

1986年10月于华工园

目　录

第十章 超静定梁

摘 要

（1）超静定梁计算的基本原则：超静定梁解题的关键是根据梁的变形条件，列出足够的补充方程，连同静力学平衡方程求出超静定梁的反力。当多余反力求得后，其余内力计算与静定梁完全相同。

（2）解静定梁辅助方程的几种方法 ①重积分方法 ②叠加方法 ③弹性曲线通用方程法 ④虚梁法 ⑤力矩—面积法 ⑥有限差分法。

（3）连续梁的三弯矩方程。

$$M_A l_a + 2M_B(l_a + l_b) + M_C l_b = -\frac{6A_a\overline{x_a}}{l_a} - \frac{6A_b\overline{x_b}}{l_b}$$

§10—1 一般性概念和计算的基本原则

当梁的支座约束反力的数目比静力学平衡方程之数目多时，不能用静力学平衡方程去求出支座反力之值，这类梁称为超静定梁。

在超静定梁中，那些超过维持梁的平衡所必须的约束，常被称为多余约束。相应的反力称为多余约束反力。这里所指的“多余”，只是从静力学平衡而言。然而从工程实用的观点来看，这些“多余”约束，不但并非多余，而且往往在实用上是很重要的，它可以减少梁的应力和变形，提高精度，例如为了减少梁的变形，可以在其自由端处加一支座

（图10－1 a 与 b ）；为了减少简支梁的跨度，可增加一个中间支座（图10－2 a 与 b ）。增加了约束，减少了梁的应力和变形，从而可以节省材料，提高精度，达到经济的要求。

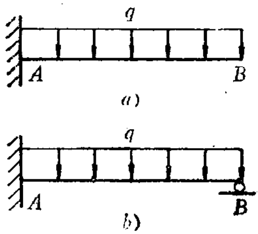


图10－1

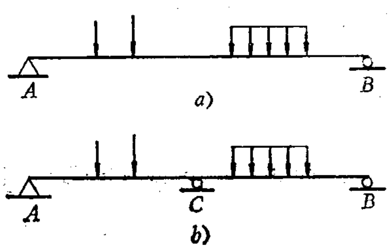


图10－2

图10－3示出几种超静定梁。图 a 中的梁固定于支承 A 处而简支于 B 处，这种梁称为有支承悬臂梁或"固定——简支"梁。该梁的反力包括 A 处的水平和竖直约束反力、A 处的力偶以及 B 处的竖直约束反力。因为该梁只有三个静力学平衡方程，因而不可能用静力学平衡方程计算出这四个反力。超过静力学平衡方程数目的反力个数称为超静定次数（图10－3a 中所示的梁为一次超静定）。超过静定情况下

支承某一结构所需反力数目的反力，称为多余反力，多余反力数目必然与超静定次数相同。

如果梁上所有载荷均为竖直的（图10－3*b*），那末其水平反力为零。这时，梁仍为一次超静定。因为现在有两个独立的静力学平衡方程，反力有三个。

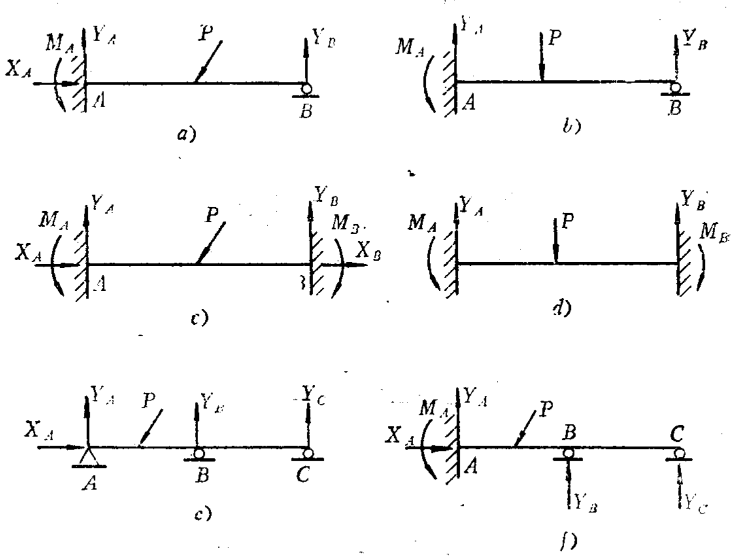


图10－3

固定端梁，有时称为“固定－固定”梁，如图10－3*c*所示。该梁每一支承处有三个反力，因此有六个未知反力，而静力学平衡方程只有三个，所以该梁为三次超静定梁。图10－3*d*是载荷竖直方向作用的情况，此时只有四个反力需要确定。静力学平衡方程的数目二个，所以该梁为二次超静定。

图10－3*e*、*f*所示两根梁的跨数在二跨以上，而且梁在

支承处是连续的，所以称为连续梁。图10－3e为一次超静定梁，图10－3f为两次超静定梁。

解超静定梁的基本原理与解拉压超静定问题的基本原理相同。关键是根据梁的变形条件，列出足够的补充方程，连同静力学平衡方程，以求出超静定梁的支反力。现就图10－4a中的超静定梁AB来说明如何根据梁的变形条件列出补充方程。

图10－4a所示梁AB，是一次超静定梁。如果以B为多

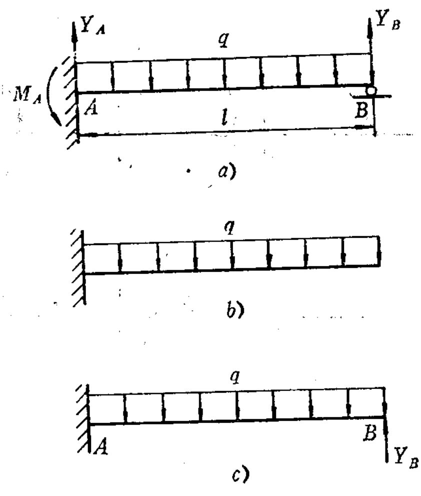


图10－4

余约束，即可认为图a的超静定梁是由图b中的静定梁加上一个附加支座B而形成的。去掉多余约束之后而得到的静定梁，称为原来超静定梁的静定基。如图c在静定基上加上多余约束反力Y_B，以B支座处变形协调条件（此处即$y_B=0$）建立补充方程，从而可求出多余约束反力Y_B，Y_B求出

后，其余的反力则可由静力学平衡方程完全地求出。

§10—2 解辅助方程的几种方法

上一章已讨论过求梁变形的重积分法、弹性曲线通用方程方法、虚梁法、力矩－面积法、叠加法和有限差分法等。超静定梁去掉多余约束后形成静定基，静定基在外载和多余约束反力共同作用下，在多余约束处建立变形协调条件的辅助方程。求静定基的变形时，可以视不同的情况分别采用以上的不同方法。

1. 重积分方法

超静定梁的静定基的变形计算可籍助于弹性曲线微分方程，其本质上与静定梁相同。包括：列出弹性曲线微分方程，用重积分法求出方程之通解，然后应用边界条件求算积分常数。总有足够的边界条件，不仅用以确定积分常数，而且用于求出多余约束反力。但由于需求出大量积分常数，因此出现计算技术上的困难，所以此法实际上只应用于加载比较简单的情况和只有一个跨度的梁。

为了说明此重积分方法，还是以图10－4的超静定梁为例。现选择 B 支座为多余约束，则 Y_B 为多余约束反力。静定基在载荷和多余约束反力作用下，根据静力学平衡方程，以 Y_B 表示的A处的反力为

$$Y_A = ql - Y_B, \quad M_A = \frac{ql^2}{2} - Y_B l \qquad (a)$$

以Y_B表示的弯矩方程为

$$M = Y_A x - M_A - \frac{qx^2}{2} = qlx - Y_B x - \frac{ql^2}{2} + Y_B l - \frac{qx^2}{2}$$

于是弹性曲线的微分方程为

$$EIy'' = M = qlx - Y_B x - \frac{ql^2}{2} + Y_B l - \frac{qx^2}{2}$$

两次连续积分，得出

$$EIy' = \frac{qlx^2}{2} - \frac{Y_B x^2}{2} - \frac{ql^2 x}{2} + Y_B lx - \frac{qx^3}{6} + C$$

$$EIy = \frac{qlx^3}{6} - \frac{Y_B x^3}{6} - \frac{ql^2 x^2}{4} + \frac{Y_B lx^2}{2}$$

$$- \frac{qx^4}{24} + Cx + D$$

这些方程中有三个未知量（C、D 和Y_B），该梁的三个边界条件为：

$$x=0, \quad y=0$$

$$x=0, \quad y'=0$$

$$x=l, \quad y=0$$

将这些边界条件代入以上转角和挠度方程中可得

$$C=0,\ D=0 \ 和 \ Y_B = \frac{3ql}{8}$$

由求得的多余约束反力 Y_B 代入静力学方程（a）中得其余的反力为

$$Y_A = \frac{5ql}{8}, \qquad M_A = \frac{ql^2}{8}$$

将这些量代入挠度方程中可得梁的弹性曲线方程。根据弹性曲线方程可求梁任一截面的挠度和转角值。

2. 叠加法

叠加法是超静定结构分析的最基本的手段。它可以用于许多不同类型的结构，还可以用于本章所涉及的基本的梁。超静定梁去掉多余约束之后的静定基在多余约束反力作用下，其相应的位移可用叠加方法计算出来。由于实际载荷和多余反力同时作用产生的最终位移必须等于分别计算的位移之和，在多余约束的情况下，其相应的位移为零或等于某个已知值，因此我们可以依此写出叠加方程，解此方程即可求得多余反力，然后根据静力学平衡方程确定出其他的反力。

现以例更清楚地说明。仍分析受均匀载荷的有支承悬臂梁（图10－5a）。将反力Y_B选作多余反力，并将相应多余约束解除去，即得到静定基（放松结构的悬臂梁）如图b。此梁因均匀分布载荷所引起的相应于多余约束反力处的挠度以y'_B表示，由多余约束反力引起的挠度以y_B''表示（图c），

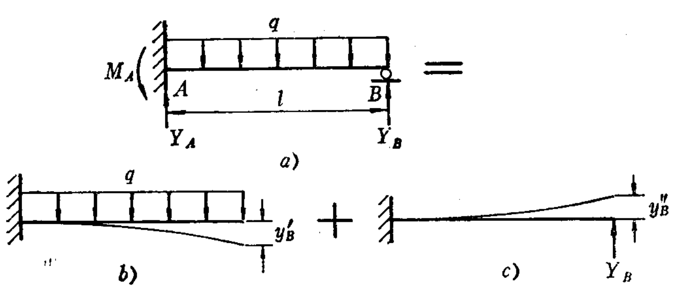


图10－5

藉叠加挠度 y'_B和 y_B''得到原来结构的总挠度y_B，它必须为零（因为多余约束处B挠度为零）。依此变形协调条件可列出辅助方程，即叠加方程为：

$$y_B = y'_B + y_B'' = 0$$

由于载荷 q 和多余约束反力 Y_B 所产生的挠度 y'_B 和 y_B'' 可查上册附表二容易地得到，所以

$$y_B = -\frac{ql^4}{8EI} + \frac{y_B l^3}{3EI} = 0$$

解出
$$Y_B = \frac{3ql}{8}$$

其他反力 Y_A 和 M_A 可以考虑静力平衡条件求出，其结果为：

$$Y_A = \frac{5ql}{8}, \quad M_A = \frac{ql^2}{8}$$

以上计算是以 Y_B 为多余约束反力。也可以选约束反力偶 M_A 为多余约束反力这一不同途径来解此超静定梁，在这情况下，其静定基为一简支梁如图10－6b。

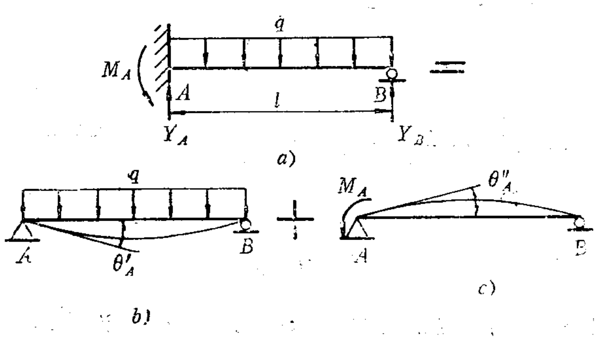


图10－6

由作用于静定基上的均匀分布载荷所产生的转角由附表

二查得：

$$\theta'_A = -\frac{ql^3}{24EI}$$

由多余约束反力偶 M_A 所引起的相应转角由附表二查得：

$$\theta''_A = \frac{M_A l}{3EI}$$

原来梁支承A处的总转角为零（固定端），则叠加方程为

$$\theta_A = \theta'_A + \theta''_A = 0$$

将 θ'_A和 θ''_A代入上式得：

$$-\frac{ql^3}{24EI} + \frac{M_A l}{3EI} = 0$$

求解此方程，得

$$M_A = \frac{ql^2}{8}$$

与前面结果完全相同。

在求出超静定梁的反力之后，所有的内力（轴力，剪力和弯矩）的计算就不再有困难了，其计算与静定梁完全相同。另外，应用重积分方法或应用叠加方法连同附表二中所列的挠度公式也可得到任一截面处的挠度和转角，但都必须先求反力，因为这是求解中的关键步骤。

本节所用的分析方法常常称为结构的柔度法或力法，力法的名称是来源于力值（力或力偶）作为多余反力的缘故；而柔度法的名称则是因为其未知数的系数（如$\frac{l}{3EI}$）是柔

度，亦即是单位载荷所产生的挠度。用以表示挠度的叠加方程，通常称为协调条件或协调方程。

【例10－1】图10－7a两跨连续梁受均匀分布载荷q作用，试用叠加法求梁的反力.

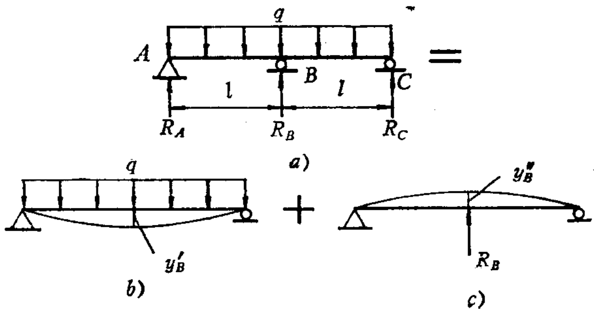


图10－7

解：选择中间支座为多余约束，R_B为多余约束反力，其静定基为图b所示。在均匀分布载荷作用下，静定基B点处的挠度查附表二得

$$y'_B = -\frac{5q(2l)^4}{384EI} = -\frac{5ql^4}{24EI}$$

多余约束反力R_B产生向上的挠度见图c，由附表二查得

$$y''_B = \frac{R_B(2l)^3}{48EI} = \frac{R_B l^3}{6EI}$$

在多余约束B支座处挠度的协调条件为

$$y_B = y'_B + y''_B = 0$$

$$-\frac{5ql^4}{24EI} + \frac{R_B l^3}{6EI} = 0$$