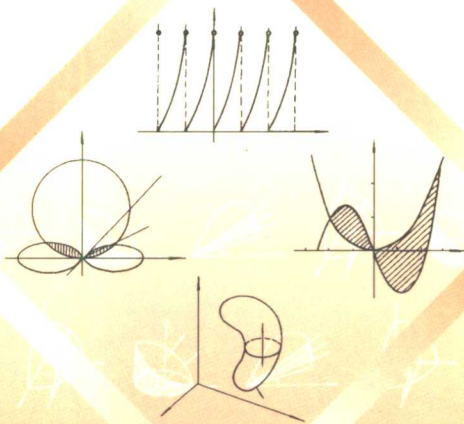


数学分析

龚怀云 主 编

刘跃武 陈红斌 向淑晃



西安交通大学出版社

数 学 分 析

龚怀云 主编

刘跃武 陈红斌 向淑晃

西安交通大学出版社

内 容 简 介

数学分析是数学专业主要的基础课程.本书是为数学专业以及对数学要求较高的物理、力学、计算机等专业的学生编写的.

全书共 17 章.1~7 章讲述一元函数微积分学,8~13 章讲述多元函数微积分学,14~17 章讲述广义积分、无穷级数、傅里叶级数等内容.

本书强调启发性与教学内容的统一性,注意学生数学素质与基本技能的培养,注意分析学与几何、代数的相互渗透,重视数学分析在物理、力学中的应用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析 / 龚怀云等编著. — 西安:西安交通大学出版社,2000.11

ISBN 7-5605-1146-5

I. 数… II. 龚… III. 数学分析 IV. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 13104 号

*

西安交通大学出版社出版发行

(西安市咸宁西路 28 号 邮政编码:710049 电话:(029)2668316)

陕西省轻工印刷厂印装

各地新华书店经销

*

开本:850mm×1168mm 1/32 印张:15 字数:378 千字

2000 年 11 月第 1 版 2000 年 11 月第 1 次印刷

印数:0 001~1 000 定价:19.00 元

若发现本社图书有倒页、白页、少页及影响阅读的质量问题,请去当地销售部门调换或与我社发行科联系调换.发行科电话:(029)2668357,2667874

前 言

数学分析是数学专业的主要基础课程,也是物理、力学、计算机等对数学有较高要求的专业的重要基础课程。

本书主要的特色是:它不是单纯为数学专业的学生编写的,而同时是为物理、力学、计算机等对数学要求较高的专业的学生编写的。实践表明,这些专业只学高等数学是不够的。我们的设想是,这些专业与数学专业在一年级共同开设数学分析,互相交流,集思广益,对教与学都有好处。就数学专业的学生而言,这本书在深度、广度上有一些欠缺,这些将在第三学期数学分析(Ⅱ)中弥补,这更符合认识论与学习的规律。最近几年,西安交通大学数学专业就是这样做的。

本书强调启发性与教学内容的统一性,注意学生数学素质与基本技能的培养,注意分析与几何、代数的相互渗透,重视分析在物理、力学中的应用。在引入分析的概念与定理时,着重阐明思想方法与几何直观的感性认识,由浅入深,由表及里,然后给出分析的语言表达,而不刻意追求行文的简洁与抽象性。

目前国内数学分析教材甚多,有的内容丰富,有的简洁通俗,但都是为数学专业学生编写的。至今还没有见到一本如我们的目的编写的书,这是编写这本教材的原因之一。

这本书由我主编,参加编写工作的有刘跃武(硕士、副教授)、陈红斌(博士、副教授)、向淑晃(博士,博士后)。他们几位共同的特点是:年纪较轻,都不到40岁;有高的学位;有雄厚的数学基础知识、很强的科研能力、丰富的教学经验。这使得他们在教学过程中可以敏锐地发现问题,富有想像力地提出改革意见,这在书中多处可见。

西安交通大学龚冬保教授主审此书,认真、负责地提出了不少宝贵的修改意见,编者对他表示衷心的感谢.

书中存在这样或那样的问题,恳请专家、读者不吝指正.

龚怀云

1999 年 10 月

目 录

第 1 章 集合、映射与函数

1.1 集合	(1)
1.1.1 集合	(1)
1.1.2 数集	(1)
1.2 映射	(4)
1.2.1 映射的概念	(4)
1.2.2 映射的复合	(5)
1.3 函数	(7)
1.3.1 函数的概念	(7)
1.3.2 函数的表示	(7)
1.3.3 函数的运算	(9)
1.3.4 函数的几何特性	(10)

第 2 章 序列极限

2.1 序列极限的概念	(12)
2.1.1 序列	(12)
2.1.2 序列极限定义	(13)
2.2 序列极限性质	(17)
2.2.1 几何性质	(17)
2.2.2 极限的运算性质	(20)
2.3 敛散性判定定理及相关结论	(23)
2.3.1 单调有界原理	(24)
2.3.2 区间套原理	(27)
2.3.3 有限覆盖定理	(28)
2.3.4 致密性定理	(29)

2.3.5 柯西收敛准则·····	(30)
第3章 函数极限与连续	
3.1 函数极限的定义·····	(34)
3.1.1 当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x) \rightarrow A$ 的定义·····	(34)
3.1.2 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) \rightarrow A$ 的定义·····	(35)
3.1.3 左、右极限·····	(37)
3.1.4 函数极限的两个等价定义·····	(40)
3.2 函数极限性质·····	(42)
3.2.1 函数极限的几何性质·····	(42)
3.2.2 函数极限的运算性质·····	(44)
3.3 两个重要极限·····	(47)
3.3.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ ·····	(47)
3.3.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ ·····	(48)
3.4 函数连续与间断·····	(50)
3.4.1 函数连续的定义·····	(50)
3.4.2 在 x_0 处连续的函数的性质·····	(53)
3.4.3 初等函数的连续性·····	(54)
3.4.4 间断点的类型·····	(57)
3.5 闭区间上连续函数的性质·····	(59)
3.5.1 有界性定理、最大(小)值定理·····	(59)
3.5.2 介值定理、零点定理·····	(60)
3.5.3 一致连续·····	(62)
3.6 无穷小(大)量及阶·····	(65)
3.6.1 无穷小(大)量定义及性质·····	(65)
3.6.2 阶的概念·····	(67)
第4章 微分、导数	
4.1 微分、导数的定义·····	(70)
4.1.1 微分、导数的定义·····	(70)

4.1.2	导数的物理、几何意义	(75)
4.2	微分、导数运算	(77)
4.2.1	导数、微分的四则运算	(77)
4.2.2	一阶微分形式不变性(复合函数求导法则).....	(80)
4.2.3	基本初等函数求导公式.....	(83)
4.2.4	隐函数求导法.....	(87)
4.2.5	参数方程所表示函数的求导法.....	(88)
4.3	一阶导数、微分的应用	(88)
4.3.1	变化率(速度).....	(88)
4.3.2	曲线的切线、法线	(90)
4.3.3	微分的应用.....	(91)
4.4	高阶导数与高阶微分.....	(93)
4.4.1	高阶微分、高阶导数的概念	(93)
4.4.2	高阶微分、高阶导数的运算	(95)
4.4.3	参数方程、隐函数所表示函数的高阶导数	(99)
第5章 利用导数研究函数		
5.1	微分中值定理	(102)
5.1.1	费马定理、罗尔中值定理.....	(102)
5.1.2	拉格朗日中值定理	(104)
5.1.3	柯西中值定理	(107)
5.2	洛比达法则	(109)
5.2.1	$\frac{0}{0}$ 型	(109)
5.2.2	$\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式	(113)
5.2.3	其他的不定型	(116)
5.3	泰勒公式	(118)
5.3.1	具有佩亚诺余项的泰勒展开式	(118)
5.3.2	带有拉格朗日余项的泰勒展开式	(121)
5.3.3	基本初等函数的马克劳林展开式	(124)

5.4 函数图像分析	(127)
5.4.1 函数的上升、下降	(127)
5.4.2 函数的极植、最值	(130)
5.4.3 函数的凸性与拐点	(134)
5.4.4 渐近线	(137)
5.4.5 函数作图	(138)
第6章 不定积分	
6.1 不定积分的概念	(140)
6.1.1 不定积分的定义	(140)
6.1.2 积分公式	(141)
6.1.3 不定积分的线性性质	(143)
6.2 不定积分计算	(144)
6.2.1 第一变量替换	(144)
6.2.2 分部积分法	(152)
6.2.3 两类能用初等函数表示的积分	(154)
第7章 定积分及其应用	
7.1 定积分的概念	(160)
7.1.1 定积分的定义	(160)
7.1.2 定积分存在的条件	(163)
7.1.3 几类可积函数	(167)
7.2 定积分的性质	(169)
7.3 定积分的计算	(173)
7.3.1 牛顿-莱布尼茨公式	(173)
7.3.2 定积分的换元公式	(176)
7.3.3 定积分的分部积分公式	(177)
7.4 定积分的应用	(178)
7.4.1 平面图形的面积	(178)
7.4.2 曲线的弧长	(182)
7.4.3 微元法	(186)

第8章 欧氏空间与多元函数

8.1 n 维欧氏空间	(196)
8.1.1 n 维欧氏空间	(196)
8.1.2 $\mathbf{R}^n$ 中点列的收敛性	(198)
8.2 $\mathbf{R}^n$ 中点集的拓扑	(201)
8.2.1 概念	(201)
8.2.2 开集与闭集	(202)
8.2.3 开集与闭集的基本性质	(203)
8.3 $\mathbf{R}^n$ 的基本性质	(205)
8.3.1 完备性	(205)
8.3.2 聚点原理	(206)
8.3.3 有限覆盖定理	(206)
8.4 多元函数与向量函数	(208)
8.4.1 映射	(208)
8.4.2 向量值函数	(210)
8.4.3 多元函数的几何表示	(211)
8.5 多元函数的极限	(212)
8.5.1 多元函数的极限	(212)
8.5.2 向量函数的极限	(215)
8.5.3 累次极限	(215)
8.6 多元函数的连续性	(217)
8.6.1 多元连续函数的概念	(217)
8.6.2 连续的等价命题	(218)
8.6.3 连续与紧性	(220)
8.6.4 连续与连通性	(222)

第9章 多元函数的微分学

9.1 偏导数与全微分的概念	(224)
9.1.1 偏导数	(224)
9.1.2 偏导数的求法	(226)

9.1.3 全微分的定义	(226)
9.2 复合函数偏导数的链式法则	(230)
9.2.1 复合函数	(230)
9.2.2 一阶微分形式的不变性	(232)
9.2.3 微分的运算法则	(233)
9.3 高阶偏导数和高阶全微分	(233)
9.3.1 高阶偏导数	(233)
9.3.2 高阶全微分	(238)
9.4 泰勒公式	(239)
第 10 章 多元函数微分学的应用	
10.1 方向导数与梯度	(242)
10.1.1 引言	(242)
10.1.2 方向导数	(243)
10.1.3 梯度	(244)
10.2 曲线的切线与曲面的切平面	(246)
10.2.1 参数曲线的切线	(246)
10.2.2 参数曲面的切平面	(247)
10.2.3 隐式曲面的切面方程	(247)
10.2.4 隐式曲线的切线方程	(248)
10.3 普通极值	(249)
10.3.1 极值的定义	(249)
10.3.2 极值的必要条件	(250)
10.3.3 极值的充分条件	(251)
10.3.4 二维情形	(252)
10.4 条件极值问题	(254)
10.4.1 引言	(254)
10.4.2 条件极值的必要条件——拉格朗日乘子法 ...	(255)
10.4.3 条件极值的充分条件	(257)
10.5 隐函数存在定理	(260)

10.5.1	提法	(260)
10.5.2	隐函数存在定理	(263)
10.5.3	多变量与方程组的情形	(267)
10.5.4	函数行列式的性质	(271)
第 11 章 多元函数的重积分		
11.1	重积分的概念	(274)
11.1.1	物理背景	(274)
11.1.2	几何背景	(275)
11.1.3	几何形体 Ω 上的黎曼积分	(276)
11.2	积分的性质	(278)
11.3	二重积分的计算	(279)
11.3.1	化二重积分为累次积分	(279)
11.4	二重积分的变量替换	(288)
11.4.1	用极坐标计算二重积分	(289)
11.4.2	二重积分的一般变量替换	(292)
11.5	三重积分的计算	(298)
11.5.1	化三重积分为累次积分	(298)
11.5.2	三重积分的变量替换	(302)
11.5.3	柱面坐标	(303)
11.5.4	球面坐标	(306)
第 12 章 曲线积分与曲面积分		
12.1	第一类型曲线积分	(309)
12.1.1	线密度与质量	(309)
12.1.2	第一类曲线积分的定义与计算	(310)
12.2	第一类曲面积分	(312)
12.2.1	曲面面积	(312)
12.2.2	面密度与质量	(318)
12.2.3	第一类曲面积分的计算	(318)
12.3	第二类曲线积分	(320)

12.3.1	功	(320)
12.3.2	第二类曲线积分的计算	(321)
12.4	第二类曲面积分	(324)
12.4.1	双侧曲面	(324)
12.4.2	流量	(327)
12.4.3	第二类曲面积分的计算	(328)
第 13 章 各种积分间的联系		
13.1	格林公式	(335)
13.2	曲线积分和路径的无关性	(340)
13.3	高斯公式	(345)
13.4	斯托克司公式	(352)
第 14 章 广义积分		
14.1	无穷区间的广义积分	(357)
14.2	无穷区间广义积分收敛性判别法	(363)
14.3	无界函数的广义积分	(367)
14.4	无界函数积分收敛性的判别法	(370)
第 15 章 数值级数		
15.1	上极限与下极限	(375)
15.2	无穷级数	(378)
15.3	正项级数	(383)
15.4	任意项级数	(389)
15.4.1	交错级数	(389)
15.4.2	绝对收敛级数	(391)
15.4.3	阿贝尔判别法和狄利克雷判别法	(392)
15.5	绝对收敛级数与条件收敛级数的性质	(396)
15.5.1	更序级数	(397)
15.5.2	级数的乘法	(402)
15.6	广义积分与级数的关系	(404)

第 16 章 函数项级数 幂级数

16.1 函数项级数的一致收敛·····	(407)
16.1.1 函数项级数的概念·····	(407)
16.1.2 一致收敛的定义·····	(409)
16.1.3 一致收敛级数的性质·····	(417)
16.2 幂级数·····	(420)
16.2.1 收敛半径·····	(420)
16.2.2 幂级数的性质·····	(424)
16.2.3 函数的幂级数展开·····	(428)
16.3 逼近定理·····	(438)
第 17 章 傅里叶级数	
17.1 傅里叶级数·····	(443)
17.1.1 基本三角函数系·····	(443)
17.1.2 傅里叶系数·····	(444)
17.2 傅里叶级数的收敛性·····	(451)
17.2.1 狄利克雷积分·····	(451)
17.2.2 黎曼引理·····	(453)
17.2.3 傅里叶级数的收敛性判别法·····	(456)
17.3 任意周期的傅里叶展开及其复数形式·····	(462)

第 1 章 集合、映射与函数

1.1 集合

1.1.1 集合

数学科学来自现实世界,升华为理论,然后又服务于社会实践.因此,最基本的数学语言源于生活.集合是一类特定对象的全体,特定对象被称为集合中的元素.在本书中我们通常用大写字母 $A, B, C, A_1, \dots$ 来表示集合,用小写字母 $a, b, x, y_3, \dots$ 来表示元素.若元素 a 为集合 A 中的元素,记为 $a \in A$;若 a 不在集合 A 中,通常用 $a \notin A$ 或 $a \bar{\in} A$ 来表示.

不含任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$.

对于两个集合 A, B 而言,若 A 中的任一元素均在 B 中,称 A 为 B 的子集,记作 $A \subseteq B$.若 $A \subseteq B$,又 B 中有元素 $y_0 \notin A$,称 A 为 B 的真子集,记作 $A \subset B$.

例如: $A = \{1, 2, 3, \dots\}, B = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$,则 $A \subset B$ 且 A 为 B 的真子集.

在集合之间,我们还可以定义并、交、差等运算关系,这一些中学里已有所交待,此处不再赘述.

1.1.2 数集

在本书中,我们暂不引入实数的构造理论,而是利用过去对实数的感性认识,给出实数集的定义及常用性质.

定义 1 所有实数组成的集合称为实数集,记为 $\mathbf{R}$.实数集的子集称为数集.

例如: $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}, (a, b] = \{x | a < x \leq b\}, (a, b) =$

$\{x|a < x < b\}$, $[a, b) = \{x|a \leq x < b\}$ 均为数集, 并依次被称为闭区间、左开右闭区间、开区间、左闭右开区间, 其中“开”的端点可以为 $-\infty$ 或 $+\infty$. 特别, 我们将 $(a - \delta, a + \delta)$ 称为 a 的 δ 邻域.

由于实数集和数轴上的点构成一一对应, 所以, 我们常常不加区别且相互代用.

定义 2 对于数集 E 来说, 若存在实数 M , 使任意 x 属于 E 都有 $|x| \leq M$ 成立, 称 E 为有界集. 特别, 若存在实数 M_1 , 使对于任意 x 属于 E , 有 $x \leq M_1$ 成立, 称 E 上有界或 E 有上界, 并称 M_1 为 E 的上界. 若存在实数 m_1 , 使对于任意 x 属于 E , 有 $x \geq m_1$ 成立, 称 E 下有界或 E 有下界, 并称 m_1 为 E 的下界.

显然, 数集 E 有界的充分必要条件为既有上界又有下界.

从数集 E 上(下)有界的定义来看, 一个数集若有上(下)界, 则其上(下)界不唯一.

例如: $E_1 = \{n^{(-1)^n} | n = 1, 2, \dots\}$, $E_2 = \{\frac{1}{n} | n = \pm 1, \pm 2, \dots\}$, 则 E_1 为下有界集, 但无上界, 所有小于或等于 0 的数均可作为 E_1 的下界. E_2 为有界集, 所有小于或等于 -1 的数均为 E_2 的下界, 所有大于或等于 1 的数均为 E_2 的上界.

在后面的讨论中我们常常面临上有界集的最小上界, 下有界集的最大下界问题. 为此, 我们引入数集的上、下确界的概念.

定义 3 上有界集合 E 的最小上界称为 E 的上确界, 记为 $\sup E$. 下有界集合 E 的最大下界称为 E 的下确界, 记为 $\inf E$.

从上、下确界的定义可知:

命题 1 若数集的上(下)确界存在, 则唯一.

命题 2 $M_0 = \sup E \Leftrightarrow (1) \forall x \in E \Rightarrow x \leq M_0; (2) \forall \epsilon > 0, \exists x \in E, \text{使 } M_0 - x < \epsilon.$

证 (必要性) 由上确界的定义, (1) 成立. 若 (2) 不成立, 则: $\exists x_0 > 0$, 对 $\forall x \in E$, 有 $M_0 - x \geq \epsilon_0$, 即 $M_0 - \epsilon_0 \geq x$. 由 x 的任意性知, $M_0 - \epsilon_0$ 为 E 的上界, 与 M_0 为最小上界矛盾.

(充分性)从(1), M_0 为 E 的上界, 假设有上界 M' ($M' < M_0$), 则 $M_0 - M' > 0$. 对于 $\epsilon_0 = \frac{M_0 - M'}{2} > 0$, 由(2), $\exists x \in E$, 使 $M_0 - x < \frac{M_0 - M'}{2}$ 成立, 可得 $x > \frac{M_0 + M'}{2} > M'$, 与 M' 为 E 的上界矛盾. $\blacksquare$ ^①

例 1 证明 $E = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$ 的上确界为 1.

证 (1) 由 $\left| \frac{(-1)^n n}{n+1} \right| \leq 1$, 知 1 为 E 的上界.

(2) [分析] 对 $\forall \epsilon > 0$, 欲找 n_0 , 使

$$\left| \frac{(-1)^{n_0} n_0}{n_0 + 1} - 1 \right| = 1 - \frac{(-1)^{n_0} n_0}{n_0 + 1} < \epsilon$$

考虑 n_0 为偶数, 上式变形为

$$\frac{1}{n_0 + 1} < \epsilon$$

因此, 只须 $n_0 > \frac{1}{\epsilon} - 1$. 取 $n_0 = 2 \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$ ($\left[\frac{1}{\epsilon} \right]$ 表示不超过 $\frac{1}{\epsilon}$ 的整数部分, 如 $[3.7] = 3$, $[-2.2] = -3$) 可满足要求.

即对 $\forall \epsilon > 0$, 只需取 $n_0 = 2 \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则有

$$\left| \frac{(-1)^{n_0} n_0}{n_0 + 1} - 1 \right| < \epsilon$$

由(1), (2)可知, 1 为 E 的上确界. $\blacksquare$

在初等微积分中, 我们常用实数及实数集的如下性质:

(1) 有(无)理数在实数中是稠密的, 也就是说在任意两个不同实数之间存在有(无)理数.

(2) 任意有界数集必有上、下确界.

上述性质(2)是后面极限理论的最基本原理.

① $\blacksquare$ 称为 Halmos 竖记号, 表示证明结束.