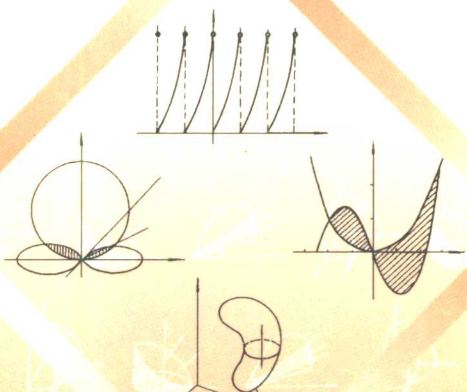
数学分析

龚怀云 主编
刘跃武 陈红斌 向淑晃



西安交通大学出版社

数学分析

龚怀云　主编

刘跃武　陈红斌　向淑晃

西安交通大学出版社

内 容 简 介

数学分析是数学专业主要的基础课程.本书是为数学专业以及对数学要求较高的物理、力学、计算机等专业的学生编写的.

全书共17章.1～7章讲述一元函数微积分学,8～13章讲述多元函数微积分学,14～17章讲述广义积分、无穷级数、傅里叶级数等内容.

本书强调启发性与教学内容的统一性,注意学生数学素质与基本技能的培养,注意分析学与几何、代数的相互渗透,重视数学分析在物理、力学中的应用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析 / 龚怀云等编著 .—西安:西安交通大学出版社,2000.11
ISBN 7-5605-1146-5

Ⅰ.数… Ⅱ.龚… Ⅲ.数学分析 Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第13104号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市咸宁西路28号 邮政编码:710049 电话:(029)2668316)
陕西省轻工印刷厂印装
各地新华书店经销

*

开本:850mm×1 168mm 1/32 印张:15 字数:378千字
2000年11月第1版 2000年11月第1次印刷
印数:0 001～1 000 定价:19.00元

前　言

数学分析是数学专业的主要基础课程，也是物理、力学、计算机等对数学有较高要求的专业的重要基础课程.

本书主要的特色是：它不是单纯为数学专业的学生编写的，而同时是为物理、力学、计算机等对数学要求较高的专业的学生编写的. 实践表明，这些专业只学高等数学是不够的. 我们的设想是，这些专业与数学专业在一年级共同开设数学分析，互相交流，集思广益，对教与学都有好处. 就数学专业的学生而言，这本书在深度、广度上有一些欠缺，这些将在第三学期数学分析(Ⅱ)中弥补，这更符合认识论与学习的规律. 最近几年，西安交通大学数学专业就是这样做的.

本书强调启发性与教学内容的统一性，注意学生数学素质与基本技能的培养，注意分析与几何、代数的相互渗透，重视分析在物理、力学中的应用. 在引入分析的概念与定理时，着重阐明思想方法与几何直观的感性认识，由浅入深，由表及里，然后给出分析的语言表达，而不刻意追求行文的简洁与抽象性.

目前国内数学分析教材甚多，有的内容丰富，有的简洁通俗，但都是为数学专业学生编写的. 至今还没有见到一本如我们的目的编写的书，这是编写这本教材的原因之一.

这本书由我主编，参加编写工作的有刘跃武(硕士、副教授)、陈红斌(博士、副教授)、向淑晃(博士，博士后). 他们几位共同的特点是：年纪较轻，都不到 40 岁；有高的学位；有雄厚的数学基础知识、很强的科研能力、丰富的教学经验. 这使得他们在教学过程中可以敏锐地发现问题，富有想像力地提出改革意见，这在书中多处可见.

西安交通大学龚冬保教授主审此书，认真、负责地提出了不少宝贵的修改意见，编者对他表示衷心的感谢.

书中存在这样或那样的问题，恳请专家、读者不吝指正.

龚怀云

1999 年 10 月

目　　录

第1章　集合、映射与函数

1.1　集合

1.1.1　集合

数学科学来自现实世界，升华为理论，然后又服务于社会实践．因此，最基本的数学语言源于生活．集合是一类特定对象的全体，特定对象被称为集合中的元素．在本书中我们通常用大写字母 $A,B,C,A_1,\cdots$ 来表示集合，用小写字母 $a,b,x,y_3,\cdots$ 来表示元素．若元素 a 为集合 A 中的元素，记为 $a\in A$；若 a 不在集合 A 中，通常用 $a\notin A$ 或 $a\overline{\in}A$ 来表示．

不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$．

对于两个集合 A,B 而言，若 A 中的任一元素均在 B 中，称 A 为 B 的子集，记作 $A\subseteq B$．若 $A\subseteq B$，又 B 中有元素 $y_0\notin A$，称 A 为 B 的真子集，记作 $A\subset B$．

例如：$A=\{1,2,3,\cdots\}$，$B=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，则 $A\subset B$ 且 A 为 B 的真子集．

在集合之间，我们还可以定义并、交、差等运算关系，这一些中学里已有所交待，此处不再赘述．

1.1.2　数集

在本书中，我们暂不引入实数的构造理论，而是利用过去对实数的感性认识，给出实数集的定义及常用性质．

定义1　所有实数组成的集合称为实数集，记为 $\mathbf{R}$．实数集的子集称为数集．

例如：$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$，$(a,b)=$

$\{x|a<x<b\}$,$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$均为数集,并依次被称为闭区间、左开右闭区间、开区间、左闭右开区间,其中“开”的端点可以为$-\infty$或$+\infty$.特别,我们将$(a-\delta,a+\delta)$称为a的δ邻域.

由于实数集和数轴上的点构成一一对应,所以,我们常常不加区别且相互代用.

定义 2 对于数集 E 来说,若存在实数 M,使任意 x 属于 E 都有$|x|\leqslant M$ 成立,称 E 为有界集.特别,若存在实数 M_1,使对于任意 x 属于 E,有 $x\leqslant M_1$ 成立,称 E 上有界或 E 有上界,并称 M_1 为 E 的上界.若存在实数 m_1,使对于任意 x 属于 E,有 $x\geqslant m_1$ 成立,称 E 下有界或 E 有下界,并称 m_1 为 E 的下界.

显然,数集 E 有界的充分必要条件为既有上界又有下界.

从数集 E 上(下)有界的定义来看,一个数集若有上(下)界,则其上(下)界不唯一.

例如:$E_1=\{n^{(-1)^n}\mid n=1,2,\cdots\}$,$E_2=\{\frac{1}{n}\mid n=\pm1,\pm2,\cdots\}$,则 E_1 为下有界集,但无上界,所有小于或等于 0 的数均可作为 E_1 的下界.E_2 为有界集,所有小于或等于 -1 的数均为 E_2 的下界,所有大于或等于 1 的数均为 E_2 的上界.

在后面的讨论中我们常常面临上有界集的最小上界,下有界集的最大下界问题.为此,我们引入数集的上、下确界的概念.

定义 3 上有界集合 E 的最小上界称为 E 的上确界,记为 $\sup E$.下有界集合 E 的最大下界称为 E 的下确界,记为 $\inf E$.

从上、下确界的定义可知:

命题 1 若数集的上(下)确界存在,则唯一.

命题 2 $M_0=\sup E\Leftrightarrow(1)\ \forall x\in E\Rightarrow x\leqslant M_0$;$(2)\ \forall\varepsilon>0$,$\exists x\in E$,使 $M_0-x<\varepsilon$.

证 (必要性)由上确界的定义,(1)成立.若(2)不成立,则:$\exists x_0>0$,对 $\forall x\in E$,有 $M_0-x\geqslant\varepsilon_0$,即 $M_0-\varepsilon_0\geqslant x$.由 x 的任意性知,$M_0-\varepsilon_0$为 E 的上界,与 M_0 为最小上界矛盾.

(充分性)从(1),M_0 为 E 的上界,假设有上界 $M'(M'<M_0)$,则 $M_0-M'>0$.对于 $\varepsilon_0=\dfrac{M_0-M'}{2}>0$,由(2),$\exists\, x\in E$,使 $M_0-x<\dfrac{M_0-M'}{2}$成立,可得 $x>\dfrac{M_0+M'}{2}>M'$,与 M'为E 的上界矛盾. ▌[①]

例 1 证明 $E=\left\{\dfrac{(-1)^n n}{n+1}\,\middle|\, n=1,2,\cdots\right\}$的上确界为 1 .

证 (1) 由$\left|\dfrac{(-1)^n n}{n+1}\right|\leqslant 1$,知 1 为 E 的上界.

(2) [分析] 对 $\forall\varepsilon>0$,欲找 n_0,使

$$\left|\frac{(-1)^{n_0}n_0}{n_0+1}-1\right|=1-\frac{(-1)^{n_0}n_0}{n_0+1}<\varepsilon$$

考虑 n_0 为偶数,上式变形为

$$\frac{1}{n_0+1}<\varepsilon$$

因此,只须 $n_0>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$.取 $n_0=2\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$($\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$表示不超过$\dfrac{1}{\varepsilon}$的整数部分,如$[3.7]=3,[-2.2]=-3$)可满足要求.

即对 $\forall\varepsilon>0$,只需取 $n_0=2\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,则有

$$\left|\frac{(-1)^{n_0}n_0}{n_0+1}-1\right|<\varepsilon$$

由(1),(2)可知,1 为 E 的上确界. ▌

在初等微积分中,我们常用实数及实数集的如下性质:

(1) 有(无)理数在实数中是稠密的,也就是说在任意两个不同实数之间存在有(无)理数.

(2) 任意有界数集必有上、下确界.

上述性质(2)是后面极限理论的最基本原理.

---

① ▌称为 Halmos 竖记号,表示证明结束.