

经营管理的量化与优化方法

张继良 编 著
艾晓华

能

内 容 简 介

本书比较全面地介绍了在企业及经营管理部门的活动中,如何利用阶差判定法、回归分析法等数十种定量分析方法寻求各经济变量间的经验公式,及确定计划、生产、供销、库存、投资、决策、对策、前景预测、市场竞争等方面的最优方案。全书共15章,每章均通过企业例题的剖析和求解,深入浅出地进行阐述。

本书内容翔实、实用性强,既可作为经营管理者提高经营管理水平的工具书,又可作为各类学校管理专业师生的参考书。

经营管理的量化与优化方法

张继良 编著
艾晓华

能源出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
河北省商业厅印刷厂印制

787×1092 1/16开本 19·625印张 468千字
1989年2月第一版 1989年2月第一次印刷

印数 1—3000

ISBN 7-80018-140-5/F·18

定价: 10.50元

序 言

任何事物都是质和量的统一，一定的量是质存在的条件。事物同时具有质和量两种规定性。对事物作恰如其分的数量分析，是认识事物、做好工作的先决条件。

在社会主义现代化建设中，“现代科学技术和现代化管理是提高经济效益的决定性因素，是使我国经济走向新的成长阶段的主要支柱。”^①当今世界科学技术的发展很快，科学成果通过技术科学转化为工程技术的周期缩短，我国近年来从国外引进一些先进技术设备，相应要求现代化的管理加快发展，才能发挥出经济效益。我国经济体制改革，企业逐渐实行经营管理承包，自负盈亏，进入竞争的行列。现代化的管理对参加竞争的企业来说是绝对必要的，否则管理松懈，不科学，靠消耗大量资源来发展经济，不仅不能在竞争中取胜，而且难以存在。现代的市场竞争在很大程度上是科学技术和现代化管理的竞争，而且愈演愈烈。管理的科学化、现代化，是现代经济、企业生死存亡的关键。管理也是一种生产力，在一定意义上，管理在提高劳动生产率的作用比增加设备提高技术的作用还要大。科学技术的进步和管理水平的提高，在根本上决定我国现代化的进程，是关系民族振兴的大事。

现代化管理是一门科学，“一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。”运用数学管理是很必要的。但是由于经济的复杂性，数学运算计算量是很大的，所需时间长，实际上经济管理在过去没有达到完善地步的可能。现在电子计算机开始在经济领域和企业中普及，用于管理。由于它的计算速度快，运用数学管理就成为可能。生产、经营、流通过程中的物质、能量都可以用数据表现其存在以及其相互间的联系和转化。管理数学成为现代化经济、企业的比较普遍的管理工具。管理科学正在向数学化前进，现代化的管理离开数学将寸步难行。

《经营管理的量化与优化方法》一书，就是在经营管理中运用数学理论和方法，建立经济过程的数学模型，进行定量分析，表现经济过程中的联系的数量关系。数学优化方法可以预测经济过程的结局，帮助选择制定最优规划的决策，实际控制调节经济运行进程，获取满意的经济效益。数学优化方法作为管理工具，可以加强管理的各方面、各环节的功能。

“任何一个知识部门只有在它的主要标准和基本规律得到数量表现和数量表达后才是精密的。”相信《经营管理的量化与优化方法》一书将会对经济管理的科学化、现代化起促进普及作用。

龚士其

1988年10月10日

^①《中国共产党第十三次全国代表大会文件汇编》第19页。

目 录

最优化方法篇

第一章 经营管理中经验公式的确定方法	(1)
第一节 管理中的经验公式.....	(1)
第二节 直线型公式的确定方法.....	(5)
第三节 阶差判定法.....	(11)
第四节 抛物线型公式的确定方法.....	(21)
第五节 曲线直线化法.....	(24)
第六节 建立经验公式的一般步骤及应用.....	(31)
第七节 曲线类型判别及直线化法图表.....	(36)
第二章 经营管理中的解析最优化方法	(40)
第一节 极值原理.....	(40)
第二节 边际分析.....	(48)
第三节 弹性理论.....	(53)
第四节 企业经营管理应用举例.....	(56)
第三章 经营管理中的直接最优化方法	(62)
第一节 单因素方法.....	(62)
第二节 多因素方法(一)——降维法.....	(70)
第三节 多因素方法(二)——试验设计法.....	(75)
第四章 经营管理中的预测方法	(83)
第一节 预测的基本概念.....	(83)
第二节 专家预测法与判断预测法.....	(84)
第三节 回归分析法.....	(87)
第四节 其它预测方法.....	(97)
第五章 经营管理中的决策方法	(101)
第一节 决策的基本概念.....	(101)
第二节 矩阵决策.....	(104)
第三节 网络决策.....	(111)
第四节 敏感性分析与效用曲线决策.....	(118)
第五节 多目标决策.....	(122)
第六章 经营管理中的对策方法	(127)
第一节 对策论的基本概念.....	(127)
第二节 矩阵对策.....	(129)

第三节 矩阵对策的解法·····	(134)
第七章 经营管理中的模糊综合评判方法 ·····	(142)
第一节 从普通集到模糊集·····	(142)
第二节 模糊综合评判·····	(147)
第三节 模糊综合评判在管理中的应用·····	(151)

最优化分析篇

第八章 经营管理中的计划评审方法 ·····	(159)
第一节 企业计划评审概念·····	(159)
第二节 网络图的时间计算·····	(162)
第三节 时差和关键线路·····	(168)
第四节 网络计划的优化·····	(170)
第九章 经营管理中的投入产出方法 ·····	(176)
第一节 企业投入产出方法的概念·····	(176)
第二节 企业投入产出模型·····	(178)
第三节 价值型应用举例·····	(183)
第四节 实物型应用举例·····	(187)
第十章 经营管理中的马尔可夫分析方法 ·····	(197)
第一节 概率向量与概率矩阵·····	(197)
第二节 马尔可夫链·····	(201)
第三节 企业经营管理应用举例·····	(204)
第十一章 经营管理中的技术经济分析方法 ·····	(211)
第一节 技术经济分析的概念·····	(211)
第二节 方案比较法·····	(215)
第三节 成本效益分析法·····	(219)

最优化规划篇

第十二章 经营管理中的线性规划 ·····	(223)
第一节 线性规划的基本概念·····	(223)
第二节 线性规划问题的图解法·····	(226)
第三节 单纯形法简介·····	(228)
第四节 单纯形法的计算·····	(232)
第五节 表上作业法·····	(237)
第六节 企业经营管理中的线性规划问题·····	(242)
第十三章 经营管理中的整数规划 ·····	(251)
第一节 整数规划的割平面解法·····	(251)

第二节	整数规划的分支定界解法·····	(256)
第三节	整数规划的隐枚举解法·····	(259)
第四节	0/1规划的管理模型·····	(260)
第五节	指派问题的匈牙利解法·····	(263)
第十四章	经营管理中的非线性规划·····	(270)
第一节	非线性规划的概念·····	(270)
第二节	步长加速法·····	(272)
第三节	无约束极值的最速下降法·····	(278)
第四节	拉格朗日乘数法·····	(283)
第十五章	经营管理中的动态规划·····	(287)
第一节	动态规划的概念·····	(287)
第二节	动态规划的基本方法·····	(289)
第三节	设备能力分配的动态优化·····	(291)
第四节	资源分配的动态优化·····	(294)
第五节	生产与存贮的动态优化·····	(299)

最 优 化 方 法 篇

第一章 经营管理中经验公式的确定方法

在企业的经营管理活动中,经常需要通过一个经济变量与另一个(或几个)经济变量之间的相互依存关系,分析研究企业的经济变化规律,预测经济发展的前景,寻求最优方案等。但是,在实际工作中往往不能直接得到这种依存关系的表达式。本章主要讲述了企业经营管理中的一些经验公式的类型和如何利用实际工作中的一组统计数据,寻求经济变量之间经验公式的方法。主要介绍了直线型确定方法、阶差判定法、抛物线型确定方法、曲线直线化方法等及其管理应用。

第一节 管理中的经验公式

一、什么是经验公式

在生产实践、科学实验、企业管理中,常常需要通过分析、处理大量的数据,以寻求某种物质或事物在一定条件下运动或变化的规律;寻求所研究对象之间的关系。这种关系和规律在数学上都是通过变量之间的函数关系来描述的。在实践中若能顺利地找出这种函数关系,则对生产、科研、管理都能起到很大的作用。这种函数关系的建立一般通过两种方法:

①根据理论推导出完全能够真实地反映出变量之间关系的式子,称为函数式或理论公式。

例如:自由落体公式 $h = \frac{1}{2}gt^2$

圆面积公式 $s = \pi r^2$

②在理论基础尚未摸清之前,从大量常常带有偶然性的实验数据中,通过用数学方法推导出的变量间的关系式。

例如:某企业生产某种产品,获得利润 L 与产量 x 之间的函数关系式为:

$$L(x) = 250x - 0.01x^2 - 2000$$

这种式子不能真实地反映出利润 L 与产量 x 之间的依存规律,它不是函数本身,不服从函数严格的定义,仅是函数的近似表达式。我们把它叫作“函数的外衣”。这种近似表达式从代数上讲,称为经验方程;从几何上讲,称为经验曲线;从应用上讲,称为经验公式,是管理模型中很重要的组成部分。

尽管经验公式不是函数本身,但为了研究问题的方便,经验公式仍然是用人们所熟悉的函数式来表达,尚未做另行规定。

在实际工作中,由于所掌握的实验数据是有限的,因此适合实验数据的经验公式也往往是多种多样的,使得人们凭借一组有限的实验数据难以得到准确的函数形式。例

如，表示饱和蒸气压与温度关系的经验公式，曾经提出过30多种，究竟哪种公式为最佳，很难下结论。这就需要掌握一定的数据处理技术。为此需要研究下面两个重要问题：

第一，选择经验公式的类型。

选择最优的公式类型，就是使公式符合具体情况，能比较真实地反映出变量间的依存关系。例如：要研究货物供给量 S 与单价 p 之间的关系，可以选择幂函数。而若要研究具有周期性的变量间的关系，则应选择三角函数较为合适。函数类型繁多，下面列出几种较简单而常用的函数，可针对不同的问题具体分析、参考。

①直线型 $y = ax + b$

②抛物线型 $y = ax^2 + bx + c$

③幂函数型 $y = ax^b$

④指数型 $y = ac^b$

⑤箕舌线型 $y = \frac{1}{a + bx^2}$

第二，如何确定公式中的常数。

对于公式中常数的确定，一般来说：直线型可采用选点法、平均法、最小二乘法；曲线型可采用平均法、最小二乘法、插值法。

二、企业管理中的经验公式

管理科学中所研究的经济变量间的关系比较复杂，并且常带有一定程度的不确定性。例如：在企业管理中，要考查某个经济变量，若把它作为因变量，却往往会发现有许多经济变量对它的变化有影响，很难找出其真实的变化规律。所以，长期以来，对这类变量只进行定性研究，只是在近代才作了些定量的分析。

在确定管理中的经验公式时，一般先从经济理论上进行分析，考查某个经济变量与另一个（或多个）经济变量的关系，然后采用数理统计的方法来确定参数，找出变量间的关系式。为了简单起见，忽略一些次要的影响因素，以减少变量的个数。下面介绍几个企业管理中常用的关系式。

1. 需求关系式

把消费者在某段时间内对某种商品的需求量作为因变量，把商品的单价看成自变量。这种关系式称为需求关系式，一般写成：

$$D = \phi(p) \quad (1.1)$$

式中 D ——某种商品的需求量；

p ——某种商品的单位价格。

对于不同的商品，关系式 $\phi(\)$ 是不同的，但一般来说，按照经济理论的分析结果，需求量 D 是随着价格 p 的增加而单调减少。也就是说，在一般情况下，某种商品的价格高时，消费者购买的数量（需求量）就要少些；反之，价格低时，购买的数量就要多些。

不同的商品，其单调下降的规律不同，一般可有如下几种：

(1) 直线型

$$D = ap + b \quad (a < 0, b > 0) \quad (1.2)$$

此时需求量与价格成比例（或近似成比例）地下降（图1-1（a））。

(2) 指数型

$$D = ae^{-bp} \quad (a > 0, b > 0) \quad (1.3)$$

此时最大需求量为 a （图1-1（b））。

(3) 幂函数型

$$D = ap^b \quad (a > 0, b < 0) \quad (1.4)$$

如图1-1（c）。

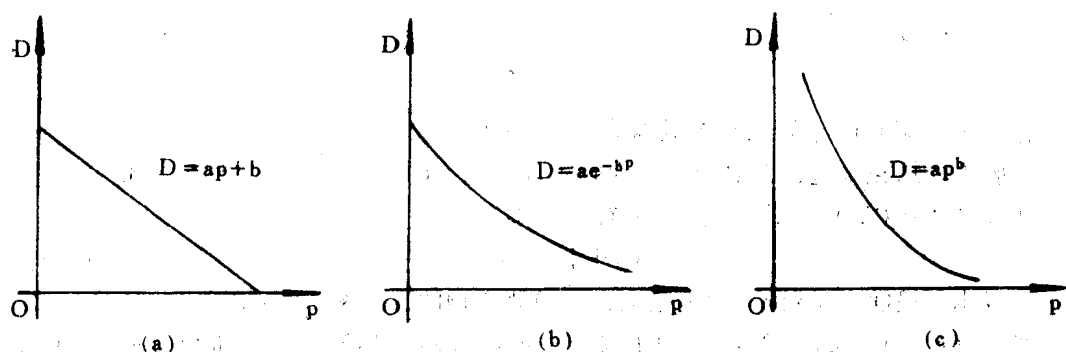


图 1-1

2. 供给关系式

把某种商品的供给量 S 看作因变量，把其单价 p 看成自变量所确定的函数关系：

$$S = f(p) \quad (1.5)$$

同需求函数一样是一个简化了的一元函数，对于不同的商品，函数 $f(\quad)$ 不同。但是总的来说，对于一般商品供给函数是一条单调递增曲线。即价格低时，供给量少；价格高时，供给量多（图1-2（a））。曲线与 p 轴交于某 p_0 点（ $p_0 > 0$ ），它的经济含义为：对于某种商品，只有当价格超过 p_0 时才有供给量 S 。

不同的商品，其单调上升的规律不同，一般可有如下几种：

(1) 直线型

$$S = ap + b \quad (a > 0, b < 0) \quad (1.6)$$

$a > 0$ 表示价格上涨时，供给量增加； $b < 0$ 表示直线在 p 轴上的截距 $-\frac{b}{a}$ 是正数，即只有当价格 $p > -\frac{b}{a}$ 时才有供给量，如图1-2（b）所示。

(2) 幂函数型

$$S = ap^\alpha - b \quad (a > 0, b > 0, \alpha > 0) \quad (1.7)$$

当 $\alpha = 1$ 时，为线性关系；

当 $0 < \alpha < 1$ 时，表示曲线比直线上升得慢；

当 $\alpha > 1$ 时，表示曲线比直线上升得快。

如图1-2（c）所示。

3. 成本关系式

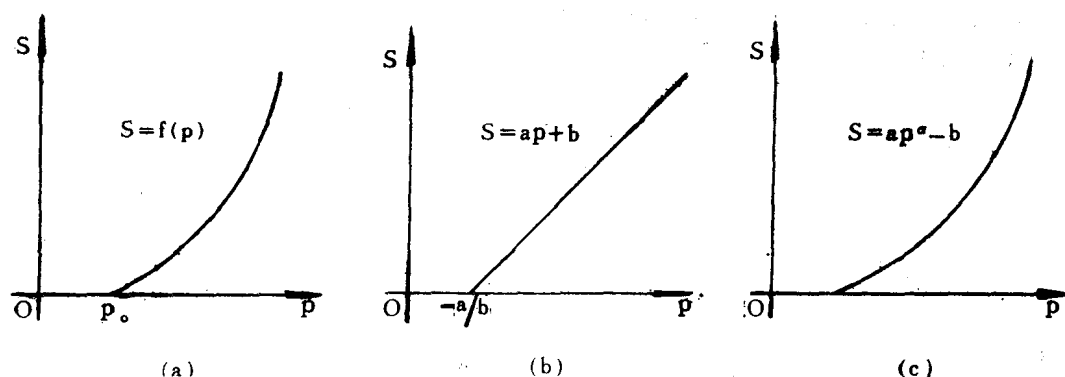


图 1-2

企业生产某种产品的生产总成本 C 与其产量 x 间的关系式。

一般生产总成本包含两部分：一为固定成本 c_0 ($c_0 \geq 0$)，它与产品产量无关；一为可变成本 $\phi(x)$ ，它与产品产量有关。即

$$C = c_0 + \phi(x) \quad (1.8)$$

总成本一般随产量 x 的增大而增大，是单调递增的，如图1-3所示。

当 $x=0$ 时， $C=c_0$ ，产量为 x 时的总成本就是 c_0 与 $\phi(x)$ 之和。通常，成本关系式也有以下几种形式：

(1) 直线型

$$C = c_0 + ax \quad (c_0 \geq 0, a > 0) \quad (1.9)$$

如图1-4所示。

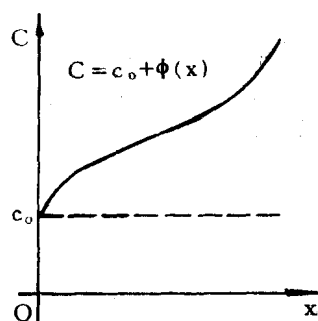


图 1-3

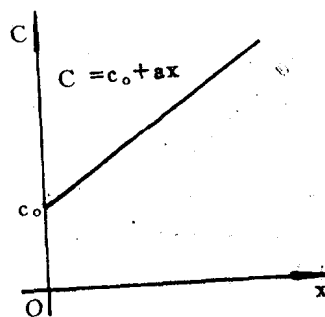


图 1-4

例如已知某工厂生产某种产品，年产量 x 千件，固定成本15万元，又知每生产1千件成本增加5万元，则成本函数为

$$C = 15 + 5x$$

(2) 幂函数型

$$C = c_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (1.10)$$

式中 c_0 表示固定成本， $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ 是可变成本， $a_1 + a_2x + a_3x^2$ 是单位产品的可变成本，又叫平均可变成本。其中 c_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 是常数，对于不同的企业，不同的产品其值不同。

通常 $c_0 \geq 0$ ， $a_1 \geq 0$ ， $a_2 \leq 0$ ， $a_3 \geq 0$ ，其经济含义为：在产量 x 增加的前一个阶段，平均可变成本是递减的，表明扩大生产可以提高经济效益。但是，当产量 x 达到某一数

值时,若再继续增加产量,会导致平均可变成本增加,降低经济效益,这种情况在经济学中叫作“收益递减规律”。

(3) 指数型

$$C = ae^{bx} \quad (a > 0, b > 0) \quad (1.11)$$

在特殊情况下,成本函数还可表示为式(1.11)的形式,其中 a 为固定成本。

上述成本函数均是以产量 x 作为自变量,也有用其它的经济变量作为自变量的。例如:已知某轮船航行时,其每小时的燃料费用与速度 v 的立方成正比,固定费用为每小时 c_0 元,则每小时的总费用为:

$$C = c_0 + kv^3 \quad (k > 0) \quad (1.12)$$

上例中把轮船航行的速度 v 作为自变量,也是一种成本函数。

(4) 平均成本

平均成本等于生产总成本 C 与产量 x 的商,即

$$\bar{C} = \frac{C}{x} = \frac{c_0 + \phi(x)}{x} \quad (1.13)$$

在企业管理中常常要考虑如何使得平均成本最小,以提高经济效益。

4. 收益关系式

收益 R 与产量 x 间的关系式也叫收益函数。一般形式如下:

$$R = p \cdot x \quad (1.14)$$

其中 $p > 0$ 是单价。在特殊情况下,单价可以是 x 的函数,即 $p = p(x)$ 代入式(1.14)得:

$$R = x \cdot p(x) \quad (1.15)$$

5. 利润关系式

利润 $L(x)$ 是收益 $R(x)$ 与成本 $C(x)$ 之差,即

$$L(x) = R(x) - C(x) \quad (1.16)$$

下面着重介绍一些获得经验公式的方法。

第二节 直线型公式的确定方法

直线型公式是所有经验公式中最简单的一种。

把一组观测数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$)当作坐标,在 xoy 平面上描出点,点的分布从整体上看若类似一条直线,就可设所求公式为:

$$y = ax + b \quad (1.17)$$

a 和 b 的确定,通常采用三种方法,下面引用实例分别说明。

〔例1〕 设某化工厂生产某种化工产品需要消耗酒精,统计得生产 x 吨该种化工产品需 y 吨酒精的对应数据如表1-1所示,试确定酒精消耗量 y 与产品产量 x 之间的经验公式。

表1-1

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y	3.25	4.875	6.25	7.50	9.00	10.50	12.25	13.75	15.00	16.50

一、选点法

1. 描点

按每对数据 (x_i, y_i) $i=1, 2, \dots, 10$ 描点, 如图 1-5。从图上看大致是一条直线, 设为式 (1.17)。

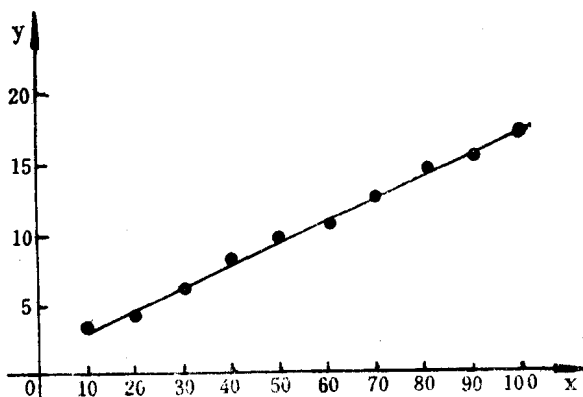


图 1-5

2. 选点

用直尺比着找适中两点, 联成一条线, 使其余的点在直线上或离直线较近, 比如选 A (30, 6.25) 及 B (100, 16.5) 两点。将 A、B 两点的坐标代入式 (1.17) 得:

$$\begin{cases} 6.25 = 30a + b \\ 16.50 = 100a + b \end{cases}$$

3. 确定经验公式

解上面的联立方程得: $a=0.14643$, $b=1.857$ 将 a 、 b 代入式 (1.17) 得经验公式

$$y = 0.14643x + 1.857 \quad (1.18)$$

4. 检验

顺序把 x 的测值代入经验公式 (1.18), 得对应的 y 值叫做计值, 记作 $\hat{y}$ 。由测值 y 减去对应的计值 $\hat{y}$ 所得之差叫偏差, 用 δ 表示。将 x 、 y 、 $\hat{y}$ 、 δ 之值列入表 1-2。

表1-2

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	Σ
y	3.250	4.875	6.250	7.500	9.000	10.500	12.250	13.750	15.000	16.500	
$\hat{y}$	3.321	4.788	6.250	7.714	9.158	10.643	12.107	13.571	15.036	16.500	
δ	-0.071	0.089	0.000	0.214	-0.158	-0.143	0.143	0.179	-0.036	0.000	0.217

5. 分析

从表 1-2 中可以看出, 偏差之值: 四正、四负、两零。偏差为正表示测点在直线上侧, 偏差为负表示测点在直线下侧, 为零表示测点在直线上。按一般常识, 测点均匀分布在直线两侧, 最合实际情况。但是从偏差的总和 $\Sigma\delta=0.217$ 来看, 直线位置不算适中, 式 (1.18) 不是最好的答案。为使答案比较合理, 应注意以下几点:

- ①两轴所用单位可以不同, 否则往往浪费纸面。
- ②测值要用小数表示, 取几位小数由问题而定。

③所选两点不宜过近，否则会使偏差增大影响可靠性。

④直线位置以适中为佳。

选点法的优点是简单易算，缺点是限于选点水平难以确定最优答案。

二、平均法

1. 分组

将观测数据分别代入式 (1.17) 得10个方程，称为观测方程。分为两组。

$$\left. \begin{array}{l} 3.250=10a+b \\ 4.875=20a+b \\ 6.250=30a+b \\ 7.500=40a+b \\ 9.000=50a+b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{第} \\ \\ \\ \\ \text{组} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 10.500=60a+b \\ 12.250=70a+b \\ 13.750=80a+b \\ 15.000=90a+b \\ 16.500=100a+b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{第} \\ \\ \\ \\ \text{组} \end{array}$$

2. 求a、b

将每组方程相加（如果方程数为奇数，可将最后一个方程多添一个）得：

$$\begin{cases} 30.875=150a+5b \\ 68.000=400a+5b \end{cases}$$

解得 $a=0.1485$ $b=1.720$

3. 确定经验公式

将a、b代入式 (1.17) 得

$$y=0.1485x+1.720 \quad (1.19)$$

4. 检验

将测值、计值及偏差别列入表1-3。

表1-3

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	Σ
y	3.250	4.875	6.250	7.500	9.000	10.500	12.250	13.750	15.000	16.500	
$\hat{y}$	3.205	4.690	6.175	7.660	9.148	10.630	12.115	13.600	15.085	16.570	
δ	0.045	0.185	0.075	-0.160	-0.145	-0.130	0.135	0.150	-0.085	-0.070	0

5. 分析

从表1-3中可以看出每一个δ都不是零，说明每一个点都不在直线上，但偏差δ之值正负各半，又说明测点均匀分布于直线两侧。再以偏差总和上看，选点法 $\Sigma\delta=0.217$ ，平均法 $\Sigma\delta=0$ ，平均法比选点法要可靠些。但只就偏差之和为零，尚不能充分地反映出所得公式的可靠性，因为其一：可能有每一个δ都很大，如12、-8、6、-10，而其和都为零；其二：平均法中偏差之和为零并非偶然，是有理论根据的。

定理一：凡用平均法求出的经验公式，其偏差之和必为零。

下面用5对观测值为例，证明定理一的正确性。

设观测数据为 (x_i, y_i) $i=1, 2, 3, 4, 5$ ，将5个观测方程分为3:2两组，解

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b \\ y_2 &= ax_2 + b \\ y_3 &= ax_3 + b \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y_4 &= ax_4 + b \\ y_5 &= ax_5 + b \end{aligned}$$

其和

$$\begin{cases} (y_1 + y_2 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3)a + 3b \\ (y_4 + y_5) = (x_4 + x_5)a + 2b \end{cases}$$

设解上面关于a、b的联立方程为：

$$a = a_0 \quad b = b_0$$

代入方程求和得

$$\sum_{i=1}^5 y_i = \sum_{i=1}^5 (a_0 x_i + b_0) \quad (1.20)$$

移项

$$\sum_{i=1}^5 [y_i - (a_0 x_i + b_0)] = 0$$

而

$$a_0 x_i + b_0 = \hat{y}_i$$

所以

$$\sum_{i=1}^5 [y_i - \hat{y}_i] = \sum_{i=1}^5 \delta = 0 \quad (1.21)$$

可见，用平均法偏差之和均为零，将观测方程按不同的比例分组，可得不同答案，无法确定哪个答案最优，为了弥补这个缺陷，还应该掌握最小二乘法。

三、最小二乘法

对于一个直线型问题，应该每一个点都在直线上，但由于观测数据有不可避免的误差，所有观测点不可能都在直线上，因此这就要求我们把尽量靠近的含义，化为数学概念。

1. 基本原理

设测得一组数据为 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$)，用最小二乘法来确定线性经验公式

$$y = ax + b$$

就是求使偏差的平方和

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 \quad (1.22)$$

取得最小值的a、b。

2. 确定a、b

按求二元函数最小值的方法, 对式 (1.22) 求偏导数 $\frac{\partial S}{\partial a}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n 2[y_i - (ax_i + b)](-x_i) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (-x_i y_i + ax_i^2 + bx_i) \\ &= 2 \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right] \quad (1.23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial b} &= \sum_{i=1}^n 2[y_i - (ax_i + b)](-1) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (-y_i + ax_i + b) \\ &= 2 \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb - \sum_{i=1}^n y_i \right] \quad (1.24)\end{aligned}$$

令

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \text{得}$$

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (1.25)$$

解联立方程组 (1.25) 可得 a 、 b 。为了计算方便引用高斯记号:

$$\left[x \right] = \sum_{i=1}^n x_i, \quad \left[y \right] = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\left[x^2 \right] = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \left[y^2 \right] = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$\left[x \cdot y \right] = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

代入式 (1.25) 得式 (1.26)

$$\begin{cases} [x^2]a + [x]b = [xy] \\ [x]a + nb = [y] \end{cases} \quad (1.26)$$

称方程组 (1.26) 为正规方程。解式 (1.26) 可得系数 a 、 b 的值。

3. 仍以例1的数据求经验公式

(1) 列表求 $[x]$ 、 $[y]$ 、 $[x^2]$ 、 $[y^2]$ 、 $[x \cdot y]$

表1-4

x	y	x^2	xy
10	3.250	100	32.50
20	4.875	400	97.5
30	6.250	900	187.5
40	7.500	1600	300.0
50	9.000	2500	450.0
60	10.500	3600	630.0
70	12.250	4900	857.5
80	13.750	6400	1100.0
90	15.000	8100	1350.0
100	16.500	10000	1650.0
$[x] = 550$	$[y] = 98.875$	$[x^2] = 38500$	$[xy] = 6655$

(2) 确定 a 、 b 的值

将求得的 $[x]$ 、 $[y]$ 、 $[x^2]$ 、 $[xy]$ 值代入式 (1.26) 得：

$$\begin{cases} 38500a + 550b = 6655 \\ 550a + 10b = 98.875 \end{cases} \quad (1.27)$$

解方程组 (1.27) 得

$$a = 0.1475 \quad b = 1.775$$

于是获得经验公式

$$y = 0.1475x + 1.775 \quad (1.28)$$

四、比 较

为了对三种方法进行比较，列成表1-5。从表1-5可以看出，以 δ_i 的正负号均等作评价时，则三个方法无法分出优劣；以 $\sum \delta_i$ 作评价时，则选点法稍差一些，但平均法和最小二乘法却分不出优劣。以 $\sum \delta_i^2$ 作评价，则以最小二乘法为最优。但当观测数据愈多时，平均法的可信赖性愈高，而且运算简便；最小二乘法则相反，观测数据愈多，则运算愈加繁杂。因此在要求不很高的问题上，还以平均法为宜。当然在有计算机的条件下，可采用计算机进行计算。

定理二：凡用最小二乘法求出的经验公式，其偏差之和必为零。

证：由式 (1.25) 的第二式

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i$$

表1-5

x	y	最小二乘法			平均法			选点法		
		$\hat{y}$	δ	δ^2	$\hat{y}$	δ	δ^2	$\hat{y}$	δ	δ^2
10	3.25	3.250	0	0	3.205	0.045	0.0020	3.321	-0.071	0.0050
20	4.875	4.725	0.150	0.0225	4.690	0.185	0.0342	4.786	0.089	0.0079
30	6.25	6.200	0.050	0.0025	6.175	0.075	0.0056	6.250	0	0
40	7.50	7.675	-0.175	0.0306	7.660	-0.160	0.0256	7.714	0.241	0.0458
50	9.00	9.150	-0.150	0.0225	9.145	-0.145	0.0210	9.158	-0.158	0.0250
60	10.50	10.625	-0.125	0.0156	10.630	-0.130	0.0169	10.643	-0.143	0.0204
70	12.25	12.100	0.150	0.0225	12.115	0.135	0.0182	12.107	-0.143	0.0204
80	13.75	13.575	0.175	0.0306	13.600	0.150	0.0225	13.571	0.179	0.0320
90	15.00	15.050	-0.050	0.0025	15.085	-0.085	0.0072	15.036	-0.036	0.0013
100	16.50	16.525	-0.025	0.0006	16.570	-0.070	0.0049	16.500	0	0
Σ			0	0.1499		0	0.1581		0.217	0.1695

移项得

$$\sum_{i=1}^n y_i - \left[\sum_{i=1}^n ax_i + \sum_{i=1}^n b \right] = 0 \quad (1.29)$$

即

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] = 0 \quad (1.30)$$

而

$$y_i - (ax_i + b) = \delta_i$$

所以得

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = 0 \quad (1.31)$$

第三节 阶差判定法

上一节对直线型经验公式中常数的确定,作了理论上的简述,显见以最小二乘法为最优。但是,在根据一组观测数据寻求经验公式时,首先必须确定经验公式的类型。前面介绍了通过直观作图法来确定经验公式的类型,显然这个方法是不太准确的,比如在某些问题中可能是曲线的一部分而类似直线,用直观作图法很难区分。所以,还应当掌握一些其它较好的判定方法,本节介绍阶差判定法。

一、差分判定法

定义1. 差分定义

设有一组观测值 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$), 称其相邻两数之差 $y_{i+1} - y_i$ 为一阶差分, 记为

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (1.31)$$