

计算机专业大专系列教材

离散数学

(第2版)

耿素云 屈婉玲 张立昂 编著

离散数学
(第2版)

0158147-2

版社



清华大学出版社

计算机专业大专系列教材

离散数学

(第2版)

耿素云 屈婉玲 张立昂 编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书包括以下 6 个方面的内容：(1) 数理逻辑；(2) 集合论；(3) 代数结构；(4) 图论；(5) 组合分析初步；(6) 形式语言与自动机初步。

书中概念论述清楚，讲解详实，通俗易懂，并且着重于概念的应用，而不重于定理的证明。每章后均附有习题。

本书既可以作为计算机专业本科或专科(去掉带 * 的章)的教材，也可以作为计算机软件专业水平考试的参考书。同时还可以供从事计算机软件、硬件研究开发和应用人员使用。另有配套教材《离散数学题解》。

版权所有，翻印必究。

本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签，无标签者不得销售。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/耿素云等编著. —北京：清华大学出版社，1999

计算机专业大专系列教材

ISBN 7-302-03563-6

I. 离… I. 耿… III. 离散数学-高等学校；专业学校-教材 N. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 14411 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

印刷者：北京市通州区大中印刷厂

发行者：新华书店总店北京发行所

开 本：787×1092 1/16 **印张：**15.5 **字数：**362 千字

版 次：1999 年 8 月第 2 版 1999 年 8 月第 1 次印刷

书 号：ISBN 7-302-03563-6/TP·1960

印 数：0001~8000

定 价：17.00 元

序 言

为什么要组织编写这套计算机专业大专使用的教材？根据什么来组织这套教材？这套教材的特点是什么？它能起到哪些作用？这就是我们在这篇序言中，要回答，也必须回答的问题。

计算机专业大专教育发展非常迅速，它满足了社会对这个层次人才的需求。在数量上已经超过了对本科人才的需求。大专这个层次有自己的特殊性，时间只有三年，要学习的内容很多，怎样精选教学内容，就成为十分重要的问题；他们又不同于中专层次，要求既有相当坚实的理论基础，又要运用理论解决实际问题，因此，如何处理好理论和实践的关系就十分重要。

大专这个层次人才的重要性是不言而喻的。但是，在培养大专这个层次人才的过程中，突出的矛盾之一，就是缺乏合适的大专教材。目前，不是用本科教材代用，就是很难及时获得所需教材。这就是组织这套专为大专使用的教材的起因。

那么，我们组织编写这套教材以什么为依据呢？中国计算机学会教育委员会与全国高等学校计算机研究会联合推荐的《计算机学科教学计划 1993》（以下简称“93 计划”）是我们这次组织编写这套教材的主要依据。

“93 计划”所提供的指导思想和学科内容不仅适合大学本科，也适合于大专的需要。

“93 计划”明确规定了计划实施的目标：1. 要为“计算机学科”的毕业生提供一个广泛坚实的基础；2. 在培养人才的过程中，必须反映培养目标的差异；3. 要为学生毕业后，进一步学习新的知识和迎接新的工作挑战，做好理论和实践上的准备；4. 要使学生能够把在校学到的知识，用到解决实际问题的过程中去。

在学科内容方面，“93 计划”概括了九个科目领域。九个科目领域组成《计算机学科》的主科目。每个科目领域都有重要的理论基础、重要的抽象（实验科学）、重要的设计和实践的成就。

这九个科目领域作为教学计划的公共要求，它们是：算法与数据结构、计算机体系结构、人工智能与机器人学、数据库与信息检索、人-机通信、数值与符号计算、操作系统、程序设计语言、软件方法学和工程。

我们根据上述指导思想和学科要求精选了十三门课，作为大专用的主干教材。它们是：《数据结构》、《数字电路逻辑设计》、《计算机组成原理》、《微型计算机原理》、《微型计算机接口技术》、《计算机网络》、《数据库原理及应用》、《操作系统基础》、《汇编语言程序设计》、《C 语言程序设计》、《软件工程概论》、《微机系统应用基础》和《离散数学》。

这十三种教材大体上反映了除人工智能与机器人学和数值与符号计算之外的全部要求，足以满足大专主干课程教学的需求。

这套教材我们都是聘请大专院校有丰富教学实践经验的、工作在第一线的专家、教授编写。在编写过程中,充分考虑了大专的特点,在选材上贯彻少而精的原则,在处理上贯彻理论密切联系实际的原则,力求深入浅出,便于教学。并且在主要章节后均附有适量的习题。

这套教材适合于计算机专业大专生使用,也可作为非计算机专业的本科生使用。

主编 李大友

1996.6

第 1 版前言

本书是根据“计算机专业技术资格和水平考试大纲”的要求编写的,是“全国计算机软
件专业技术资格和水平考试系列教材”之一,它是高级程序员级和系统分析员级的离散数
学教材。离散数学是现代数学的重要分支,是计算机科学理论的基础。本书共含六个方
面的内容:(1)数理逻辑;(2)集合论;(3)代数结构;(4)图论;(5)组合分析初步;(6)形式
语言与自动机初步。

数理逻辑与图论(第一、二、七、八、九章)由耿素云编写;集合论、代数结构、组合分析
初步(第三、四、五、六、十章)由屈婉玲编写;形式语言与自动机初步(第十一章)由张立昂
编写。

根据资格和水平考试的特点,本书着重于基本概念的论述和应用,而不着重于定理的
证明。每章均给出了典型的题例分析,并配置了相当数量的习题,书后给出了大部分习题
的提示或解答。本书不仅是函授的教材,便于考生复习与自学,而且也可供计算机软件人
员学习与参考。

由于作者水平所限,书中难免有不妥或错误之处,恳请读者指正。

编 者

1991 年 4 月于北京大学计算机系

第 2 版前言

计算机的出现和蓬勃发展彻底改变了人类的生活,它必将作为 20 世纪最灿烂辉煌的成就之一载入史册。从科学计算到大型的信息管理系统,从人工智能直至进入家庭,计算机已成为人们生活中密不可分的一个组成部分。当前,人类社会经过农业经济、工业经济,正在进入到知识经济的时代。经济的增长将更多地依赖于知识和信息的生产、扩散和应用,人类社会正在成为名符其实的信息化社会。这既为计算机科学技术的发展提供了前所未有的机遇和动力,也提出了更多的问题和更高的要求。解决这些问题的关键就是知识和技术的创新。因此,作为计算机科学技术的支撑学科之一的离散数学正变得日益重要。离散数学是现代数学的重要分支,是研究离散量的结构及相互关系的学科,它在计算机理论研究及软、硬件开发的各个领域都有着广泛的应用。作为一门重要的专业基础课,通过离散数学的教学,不仅能为学生的专业课学习及将来从事的软、硬件开发和应用研究打下坚实的基础,同时也有助于培养他们的抽象思维、严格的逻辑推理和创新能力。

《离散数学》一书自从 1992 年 2 月由清华大学出版社作为“全国计算机软件专业技术资格(水平)考试系列教材”出版以来,已历经 7 年。由于它取材适度、概念清楚、讲解详实、通俗易懂、既适合教学也便于自学的特点,也由于它“着重于基本概念的论述和应用,而不重于定理证明”的风格而受到读者的欢迎和好评。这本书不仅被广大参加软件水平考试培训的人员使用,同时也被许多高校选作计算机或相关专业本科或专科的教材。目前,清华大学出版社决定将此书列为“计算机专业大专系列教材”之一,以适应新形势下计算机专科教育飞速发展的需求。

作为第 2 版,本书保留了原书的体系、风格和 6 个部分的基本内容,即(1)数理逻辑;(2) 集合论;(3) 代数结构;(4) 图论;(5) 组合分析初步;(6) 形式语言与自动机初步,同时为了适应专科教育的要求,与第 1 版相比,除了对原书中的错误和疏漏之处进行订正以外,还在以下几个方面进行了修订:

1. 为了明确专科与本科教学要求的区别,将第 1 版中超出专科基本要求的内容如第 5,6,10 和第 11 章冠以 * 号,以供不同读者选择使用。

2. 对原书的习题进行了调整和充实。个别章节更新了某些习题,而对大部分章节补充了难度适当、风格多样、覆盖面较广的习题。

3. 删去了原书中关于习题的提示或解答的内容。为了更好地帮助初学者、特别是自学者掌握离散数学的主要概念及解题方法与技巧,与本书配套出版一本《离散数学题解》。在题解中按章给出内容提要、解题要求、习题和解答,并结合习题针对一些普遍性的分析方法、解题技巧、求解步骤和规范,以及应该避免的错误进行了详尽的论述。

在以上的修订工作中,数理逻辑与图论(第 1,2,7,8,9 章)由耿素云完成;集合论、代数结构与组合分析初步(第 3,4,5,6,10 章)由屈婉玲完成;形式语言与自动机初步(第 11 章)由张立昂完成。

本书既可以作为计算机专业本科或专科教材,也可以作为计算机软件专业水平考试的参考教材,同时适合于从事计算机软、硬件开发和应用的科学技术人员使用。根据多年的教学经验,作为本科教材,本书可在 120 学时内讲授完毕。如果去掉加 * 号的章节作为专科教材,可在 80 学时内完成全部教学,而对于其他人员可根据自己的要求自由取舍。

最后,我们诚恳欢迎广大读者对本书批评和指正。

作者

1999 年 2 月

目 录

第 1 章 命题逻辑	1
1.1 命题符号化及联结词	1
1.2 命题公式及分类	5
1.3 等值演算	8
1.4 联结词全功能集.....	12
1.5 对偶与范式.....	14
1.6 推理理论.....	22
1.7 题例分析.....	25
习题	30
第 2 章 一阶逻辑	34
2.1 一阶逻辑基本概念.....	34
2.2 一阶逻辑合式公式及解释.....	38
2.3 一阶逻辑等值式.....	43
2.4 一阶逻辑推理理论.....	46
2.5 题例分析.....	49
习题	52
第 3 章 集合的基本概念和运算	57
3.1 集合的基本概念.....	57
3.2 集合的基本运算.....	59
3.3 集合中元素的计数.....	64
3.4 题例分析.....	67
习题	70
第 4 章 二元关系和函数	75
4.1 集合的笛卡儿积与二元关系.....	75
4.2 关系的运算.....	79
4.3 关系的性质.....	84
4.4 关系的闭包.....	87
4.5 等价关系和偏序关系.....	89
4.6 函数的定义和性质.....	93
4.7 函数的复合和反函数.....	97
4.8 题例分析	100
习题.....	105

第 5 章 代数系统的一般性质	111
5.1 二元运算及其性质	111
5.2 代数系统及其子代数和积代数	117
5.3 代数系统的同态与同构	119
5.4 题例分析	121
习题	124
第 6 章 几个典型的代数系统	128
6.1 半群与群	128
6.2 环与域	135
6.3 格与布尔代数	138
6.4 题例分析	141
习题	143
第 7 章 图的基本概念	147
7.1 无向图及有向图	147
7.2 通路、回路、图的连通性	152
7.3 图的矩阵表示	155
7.4 最短路径及关键路径	158
7.5 题例分析	162
习题	165
第 8 章 一些特殊的图	168
8.1 二部图	168
8.2 欧拉图	170
8.3 哈密尔顿图	171
8.4 平面图	173
8.5 题例分析	178
习题	180
第 9 章 树	183
9.1 无向树及生成树	183
9.2 根树及其应用	185
9.3 题例分析	190
习题	194
第 10 章 组合分析初步	197
10.1 加法法则和乘法法则	197
10.2 基本排列组合的计数方法	198
10.3 题例分析	204
习题	206

第 11 章 形式语言和自动机初步	209
11.1 形式语言和形式文法	209
11.2 有穷自动机	216
11.3 有穷自动机和正则文法的等价性	221
11.4 图灵机	224
习题	230

第1章 命题逻辑

数理逻辑是用数学方法来研究推理的形式结构和推理规律的数学学科. 它与数学的其他分支、计算机科学、人工智能、语言学等学科均有密切的联系, 并且日益显示出它的重要作用和更加广泛的应用前景. 数理逻辑的内容相当丰富, 大体可分为5部分, 即: 逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论. 在本书中, 只介绍命题逻辑和一阶逻辑(谓词逻辑)的逻辑演算. 对数理逻辑感兴趣的读者, 可参阅有关专著.

1.1 命题符号化及联结词

数理逻辑研究的中心问题是推理, 而推理的前提和结论都是表达判断的陈述句. 因而, 表达判断的陈述句构成了推理的基本单位. 于是, 称能判断真假的陈述句为命题. 这种陈述句的判断只有两种可能, 一种是正确的判断, 一种是错误的判断. 称判断为正确的命题的真值(或值)为真, 称判断为错误的命题的真值为假, 因而又可以称命题是具有唯一真值的陈述句.

例 1.1 判断下列句子中哪些是命题.

- (1) 2是素数.
- (2) 雪是黑色的.
- (3) $2+3=5$.
- (4) 明年十月一日是晴天.
- (5) 3能被2整除.
- (6) 这朵花多好看呀!
- (7) 明天下午有会吗?
- (8) 请关上门!
- (9) $x+y>5$.
- (10) 地球外的星球上也有人.

解 在10个句子中, (6)是感叹句, (7)是疑问句, (8)是祈使句, 这3句话都不是陈述句, 当然它们都不是命题. 其余的7个句子都是陈述句, 但(9)不是命题, 因为它没有确定的真值. 当 $x=6, y=7$ 时, $6+7>5$ 正确, 而当 $x=1, y=2$ 时, $1+2>5$ 不正确. 其余的陈述句都是命题. 其中(1), (3)是真命题; (2), (5)为假命题; (4)的真值虽然现在还不知道, 但到明年十月一日就知道了, 因而是命题, 它的真值是唯一的. 句子(10)的真值也是唯一的, 只是我们还不知道而已, 随着科学技术的发展, 其真值会知道的, 因而它也是命题.

从以上的分析可以看出, 判断一个句子是否为命题, 首先要看它是否为陈述句, 然后再看它的真值是否是唯一的. 当然真值是否唯一与我们是否知道它的真值是两回事.

在例 1.1 中给出的6个命题都是简单的陈述句, 都不能分解成更简单的句子了, 称这

样的命题为**简单命题**或**原子命题**. 本书中用小写的英文字母 $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots$ 表示简单命题, 将表示命题的符号放在该命题的前面, 称为命题符号化. 例如,

p : 2 是素数.

q : 雪是黑色的.

此时, p 是真命题, q 是假命题.

对于简单命题来说, 它的真值是确定的, 因而又称为**命题常项**或**命题常元**. 上面的 p, q 都是命题常项.

在例 1.1 中, (9) 不是命题, 但当给定 x 与 y 确定的值后, 它的真值也就定下来了, 这种真值可以变化的简单陈述句称为**命题变项**或**命题变元**, 也用 $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots$ 表示之. 一个符号, 例如 p , 它表示的是命题常项还是命题变项, 一般由上下文来确定. 注意, 命题变项不是命题.

在数理逻辑中, 将命题的真值也符号化. 一般用 1 (或 T) 表示“真”(本书中将用 1 表示真); 用 0 (或 F) 表示“假”(本书中用 0 表示假). 有时也用 1 表示真命题; 用 0 表示假命题.

以上讨论的是简单命题. 在命题逻辑中, 主要是研究由简单命题用联结词联结而成的命题, 这样的命题称为**复合命题**. 下例给出的命题均是复合命题.

例 1.2 将下列命题符号化.

(1) 3 不是偶数.

(2) 2 是素数和偶数.

(3) 林芳学过英语或日语.

(4) 如果角 A 和角 B 是对顶角, 则角 A 等于角 B .

解 上面 4 个句子都是具有唯一真值的陈述句, 因而它们都是命题, 且都是由简单命题经过联结词的联结而形成的复合命题. (1) 中命题也可说成“并非 3 是偶数”, 使用了联结词“并非”. (2) 中命题也可说成“2 是素数并且 2 是偶数”, 使用了联结词“并且”. (3) 中使用了联结词“或”. (4) 中使用了联结词“如果, 则”. 除了以上 4 个联结词外, 常用的, 特别是在数学中常用的联结词还有“当且仅当”. 以上 5 种联结词也是自然语言中常用的联结词, 不过在自然语言中有的联结词具有不精确性. 例如, 联结词“或”, 有时表示相容性析取, 有时表示排斥性的析取. 可是在数理逻辑中不允许这种二义性的存在, 因而对联结词必须给出精确的定义. 另外, 为了书写和推演的方便, 必须将联结词符号化. 下面给出 5 种常用联结词的符号表示及相应复合命题的严格定义.

定义 1.1 设 p 为任一命题. 复合命题“非 p ”(或“ p 的否定”)称为 p 的**否定式**, 记作 $\neg p$. \neg 为**否定联结词**. $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

在例 1.2(1) 中, 设 p 表示“3 是偶数”, 则 $\neg p$ 表示“3 不是偶数”. 显然, 当 p 的真值为 0 时, $\neg p$ 的真值为 1.

定义 1.2 设 p, q 为两命题. 复合命题“ p 并且 q ”(或“ p 和 q ”)称作 p 与 q 的**合取式**, 记作 $p \wedge q$. \wedge 为**合取联结词**. $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真.

在例 1.2(2) 中, 用 p 表示“2 是素数”, q 表示“2 是偶数”, 则 $p \wedge q$ 表示“2 是素数和偶数”, 由于 p, q 的真值均为 1, 所以 $p \wedge q$ 的真值也为 1.

p 与 q 的合取表达的逻辑关系是 p 与 q 两个命题同时成立,因而,自然语言中常用的联结词“既……又……”,“不仅……而且……”,“虽然……但是……”等,都可以符号化为 \wedge ,请看下例.

例 1.3 将下列命题符号化.

- (1) 李平既聪明又用功.
- (2) 李平虽然聪明,但不用功.
- (3) 李平不但聪明,而且用功.
- (4) 李平不是不聪明,而是不用功.

解 用 p 表示“李平聪明”, q 表示“李平用功”,则(1),(2),(3),(4)分别符号化为 $p \wedge q, p \wedge \neg q, p \wedge q$ 和 $\neg(\neg p) \wedge \neg q$. 可见以上 4 个复合命题全用联结词 \wedge 联结. 但不能见到“和”、“与”就用“ \wedge ”. 例如,“李文与李武是兄弟”,“王芳和陈兰是好朋友”,这两个命题中分别有“和”及“与”字,可是它们都是简单命题而不是复合命题,因而,分别符号化为 p, q 即可.

定义 1.3 设 p, q 为两命题. 复合命题“ p 或 q ”称作 p 与 q 的析取式,记作 $p \vee q$. \vee 为析取联结词. $p \vee q$ 为真当且仅当 p 与 q 中至少一个为真.

由定义不难看出,析取式 $p \vee q$ 表示的是一种相容性或,即允许 p 与 q 同时为真. 例如,“王燕学过英语或法语”,可符号化为 $p \vee q$,其中 p 为“王燕学过英语”, q 为“王燕学过法语”,当仅 p 为真,仅 q 为真, p 与 q 同时为真时, $p \vee q$ 均为真.

可是在自然语言中的“或”具有二义性,有时表示的是相容性或,有时表示的是不相容性或(即排斥或). 例如,“派小王或小李中的一人去开会”不能符号化为 $p \vee q$ 的形式,因为这里的“或”表达的是排斥或. 但可以借助于联结词 \neg, \wedge, \vee 共同来表达这种排斥或. 即符号化为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 的形式,或 $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ 的形式,在 1.4 节中,将给出排斥或严格的定义.

定义 1.4 设 p, q 为两命题. 复合命题“如果 p , 则 q ”称作 p 与 q 的蕴涵式,记作 $p \rightarrow q$,称 p 为蕴涵式的前件, q 为蕴涵式的后件. \rightarrow 称作蕴涵联结词. $p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真且 q 为假.

$p \rightarrow q$ 表示的基本逻辑关系是, q 是 p 的必要条件,或 p 是 q 的充分条件. 因此,复合命题“只要 p 就 q ”,“ p 仅当 q ”,“只有 q 才 p ”等,都可以符号化为 $p \rightarrow q$ 的形式.

在使用蕴涵联结词时,除了注意其表示的基本逻辑关系外,还应注意两点:其一,在自然语言中,“如果 p , 则 q ”中的 p 与 q 往往有某种内在的联系,但在数理逻辑中“ $p \rightarrow q$ ”中的 p 与 q 不一定有什么内在联系. 其二,在数学中,“如果 p , 则 q ”往往表示前件 p 为真,后件 q 为真的推理关系,但在数理逻辑中,当前件 p 为假时, $p \rightarrow q$ 为真.

为了掌握蕴涵联结词的逻辑关系及应用中应注意的事项,请看下例.

例 1.4 将下列命题符号化.

- (1) 只要不下雨,我就骑自行车上班. $p \rightarrow q$
- (2) 只有不下雨,我才骑自行车上班. $q \rightarrow p$
- (3) 若 $2+2=4$,则太阳从东方升起. $p \rightarrow q$
- (4) 若 $2+2 \neq 4$,则太阳从东方升起. $\neg p \rightarrow q$

(5) 若 $2+2=4$, 则太阳从西方升起.

(6) 若 $2+2 \neq 4$, 则太阳从西方升起.

解 先分析(1),(2). 令 p : 天下雨; q : 我骑自行车上班.

(1)中, $\neg p$ 是 q 的充分条件, 因而符号化为 $\neg p \rightarrow q$. 在(2)中, $\neg p$ 是 q 的必要条件, 因而应符号化为 $q \rightarrow \neg p$. 在使用蕴涵联结词时, 一定要认真分析蕴涵式的前件与后件, 然后组成蕴涵式. 另外还应注意同一命题的各种等价说法. 例如, “除非下雨, 否则我就骑自行车上班”与(1)是等价的. “如果下雨, 我就不骑自行车上班”与(2)是等价的.

再分析(3)~(6). 设 p : $2+2=4$. q : 太阳从东方升起. r : 太阳从西方升起. 则(3), (4), (5), (6)分别符号化为 $p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q, p \rightarrow r, \neg p \rightarrow r$. 在这些蕴涵式中, 前件与后件之间无内在联系. 由于 p, q, r 的真值均知道, 由定义可知, 上面 4 个蕴涵式的真值分别为 1, 1, 0, 1.

定义 1.5 设 p, q 为两命题. 复合命题“ p 当且仅当 q ”称作 p 与 q 的**等价式**, 记作 $p \leftrightarrow q$. \leftrightarrow 称作**等价联结词**. $p \leftrightarrow q$ 真当且仅当 p, q 真值相同.

等价式 $p \leftrightarrow q$ 所表达的逻辑关系是, p 与 q 互为充分必要条件. 只要 p 与 q 的真值同为真或同为假, $p \leftrightarrow q$ 的真值就为真, 否则 $p \leftrightarrow q$ 的真值为假, 请看下例.

例 1.5 分析下列各命题的真值.

(1) $2+2=4$ 当且仅当 3 是奇数.

(2) $2+2=4$ 当且仅当 3 不是奇数.

(3) $2+2 \neq 4$ 当且仅当 3 是奇数.

(4) $2+2 \neq 4$ 当且仅当 3 不是奇数.

(5) 两圆的面积相等当且仅当它们的半径相等.

(6) 两角相等当且仅当它们是对顶角.

解 设 p : $2+2=4$, q : 3 是奇数, 则 p, q 都是真命题. (1), (2), (3), (4)分别符号化为 $p \leftrightarrow q, p \leftrightarrow \neg q, \neg p \leftrightarrow q, \neg p \leftrightarrow \neg q$. 由定义可知, $p \leftrightarrow q$ 和 $\neg p \leftrightarrow \neg q$ 的真值为 1, 而 $p \leftrightarrow \neg q$ 和 $\neg p \leftrightarrow q$ 的真值为 0.

在(5)中, 由于两圆的面积相等与它们的半径相等同为真或同为假, 所以该命题为真.

在(6)中, 由于相等的两角不一定是对顶角, 所以该命题为假. 其实, (5), (6)中的命题要在一阶逻辑(谓词逻辑)中才能刻画得更精确.

以上介绍的 5 种常用联结词也称**真值联结词**或**逻辑联结词**. 在命题逻辑中, 可用这些联结词将各种各样的复合命题符号化. 基本步骤如下:

(1) 分析出各简单命题, 将它们符号化;

(2) 使用合适的联结词, 把简单命题逐个联结起来, 组成复合命题的符号化表示.

例 1.6 将下列命题符号化.

(1) 小王是游泳冠军或百米赛跑冠军.

(2) 小王现在在宿舍或在图书馆里.

(3) 选小王或小李中的一人当班长.

(4) 如果我上街, 我就去书店看看, 除非我很累.

(5) 王一乐是计算机系的学生, 他生于 1968 年或 1969 年, 他是三好学生.

解 各命题符号化如下:

(1) $p \vee q$, 其中, p : 小王是游泳冠军. q : 小王是百米赛跑冠军.

(2) 这里的“或”是排斥或, 但因小王在宿舍与在图书馆不能同时发生, 因而也可符号化为 $p \vee q$. 其中, p : 小王在宿舍. q : 小王在图书馆.

(3) 这里的“或”也为排斥或. 设 p : 选小王当班长. q : 选小李当班长. 因为 p 与 q 可同时为真, 所以应符号化为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$; 而不应符号化为 $p \vee q$.

在使用析取联结词时, 首先应分析表达的是相容或还是排斥或. 若是相容或, 以及 p, q 不能同时为真的排斥或, 均可直接符号化为 $p \vee q$ 的形式. 如果是排斥或, 并且 p 与 q 可同时为真, 就应符号化为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 的形式. 有的书上, 在基本联结词集中就给出了排斥或联结词. 考虑到简洁性, 本书在基本联结词集中没给出排斥或联结词. 在 1.4 节中给出了它的定义.

(4) $\neg r \rightarrow (p \rightarrow q)$. 其中, p : 我上街. q : 我去书店看看. r : 我很累.

此句中的联结词“除非”相当于“如果不……”的意思, 因而 $\neg r$ 可看成 $p \rightarrow q$ 的前件. 其实, 此命题也可以叙述为“如果我不累并且我上街, 则我就去书店看看”, 因而也可以符号化为 $(\neg r \wedge p) \rightarrow q$.

(5) $p \wedge (q \vee r) \wedge s$. 其中, p : 王一乐是计算机系学生. q : 他生于 1968 年. r : 他生于 1969 年. s : 他是三好学生.

5 种联结词符也称为逻辑运算符. 它们与普通数的运算符一样, 可以规定运算的优先级, 本书中规定优先级的顺序为 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. 如果出现的联结词相同, 又无括号时, 则按从左到右顺序运算. 若遇有括号时, 先进行括号中的运算.

1.2 命题公式及分类

在上节中, 介绍了 5 种常用的联结词及由它们组成的基本复合命题: $\neg p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$, 其中 p, q 为简单命题, 即命题常项. 当然由这 5 种联结词和多个命题常项可以组成更复杂的复合命题. 若在复合命题中, p, q, r 等不仅可以代表命题常项, 还可以代表命题变项, 这样组成的复合命题形式称为命题公式. 抽象地说, 命题公式是由命题常项、命题变项、联结词、括号等组成的符号串. 但并不是由这些符号任意组成的符号串都是命题公式, 因而, 必须给出命题公式的严格定义. 首先给出由命题常项、变项、联结词、圆括号等组成的合式公式的定义, 然后规定一个符号串是命题公式当且仅当它是合式公式.

定义 1.6 (1) 单个命题常项或变项 $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots, 0, 1$ 是合式公式;

(2) 如果 A 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 也是合式公式;

(3) 如果 A, B 是合式公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式;

(4) 只有有限次地应用(1)~(3)组成的符号串才是合式公式.

今后我们将合式公式称为命题公式, 或简称为公式.

为方便起见, 规定 $(\neg A), (A \wedge B)$ 等的外层括号可以省去. 在公式的定义中, 引进了 A, B 等符号, 它们代表任意的命题公式, 在以下的定义中均有类似的情况.

根据定义, $\neg(p \vee q), p \rightarrow (q \rightarrow r), (p \wedge q) \leftrightarrow r$ 等都是命题公式, 但 $pq \rightarrow r, \neg p \vee q) \rightarrow r$

等都不是命题公式.

由定义可看出,命题公式的结构很复杂,为此需要给出命题公式层次的定义,以便于研究和演算.

定义 1.7 (1) 若 A 是单个命题(常项或变项), $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots, 0, 1$, 则称 A 是 0 层公式.

(2) 称 A 是 $n+1$ ($n \geq 0$) 层公式是指 A 符合下列情况之一:

- ① $A = \neg B$, B 是 n 层公式;
- ② $A = B \wedge C$, 其中 B, C 分别为 i 层和 j 层公式, 且 $n = \max(i, j)$;
- ③ $A = B \vee C$, 其中 B, C 的层次同②;
- ④ $A = B \rightarrow C$, 其中 B, C 的层次同②;
- ⑤ $A = B \leftrightarrow C$, 其中 B, C 的层次同②.

(3) 若 A 的最高层次为 k , 则称 A 是 k 层公式.

定义中的符号“=”为通常意义下的等号, 以下再出现时意义相同.

由定义可看出, $\neg p \vee q, p \wedge q \wedge r, \neg(\neg p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ 分别为 2 层、2 层、4 层命题公式.

一个含有命题变项的命题公式的真值是不确定的, 只有对它的每个命题变项用指定的命题常项代替后, 命题公式才变成命题, 其真值也就唯一确定了. 例如, 命题公式 $(p \wedge q) \rightarrow r$ 中, 若指定 p 为“2 是素数”, q 为“3 是奇数”, r 为“4 能被 2 整除”, 则 $(p \wedge q) \rightarrow r$ 变成真命题. 若 p, q 的指定同前, 而 r 为“3 能被 2 整除”, 则 $(p \wedge q) \rightarrow r$ 就变成假命题了.

一般地, 对一个命题公式的解释或赋值定义如下.

定义 1.8 设 A 为一命题公式, p_1, p_2, \dots, p_n 为出现在 A 中的所有的命题变项. 给 p_1, p_2, \dots, p_n 指定一组真值, 称为对 A 的一个赋值或解释. 若指定的一组值使 A 的值为真, 则称这组值为 A 的成真赋值, 若使 A 的值为假, 则称这组值为 A 的成假赋值.

若命题公式 A 中含命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n , 给定一组赋值 a_1, a_2, \dots, a_n (a_i 为 0 或 1), 是指 $p_1 = a_1, p_2 = a_2, \dots, p_n = a_n$. 若命题变项为 p, q, r, \dots , 则 a_1, a_2, \dots 指定给它们的顺序应按字典顺序. 例如, 公式 $A = (p \wedge q) \rightarrow r$, 110 ($p=1, q=1, r=0$) 为 A 的成假赋值, 111, 011, 010 等是 A 的成真赋值.

含 n ($n \geq 1$) 个命题变项的命题公式, 共有 2^n 组赋值. 将命题公式 A 在所有赋值之下取值的情况列成表, 称为 A 的真值表. 构造真值表的具体步骤如下:

(1) 找出命题公式中所含的所有命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n (若无下角标就按字典顺序给出), 列出所有可能的赋值 (2^n 个);

(2) 按从低到高的顺序写出各层次;

(3) 对应每个赋值, 计算命题公式各层次的值, 直到最后计算出命题公式的值.

例 1.7 求下列命题公式的真值表.

(1) $p \wedge (q \vee \neg r)$;

(2) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$;

(3) $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$.