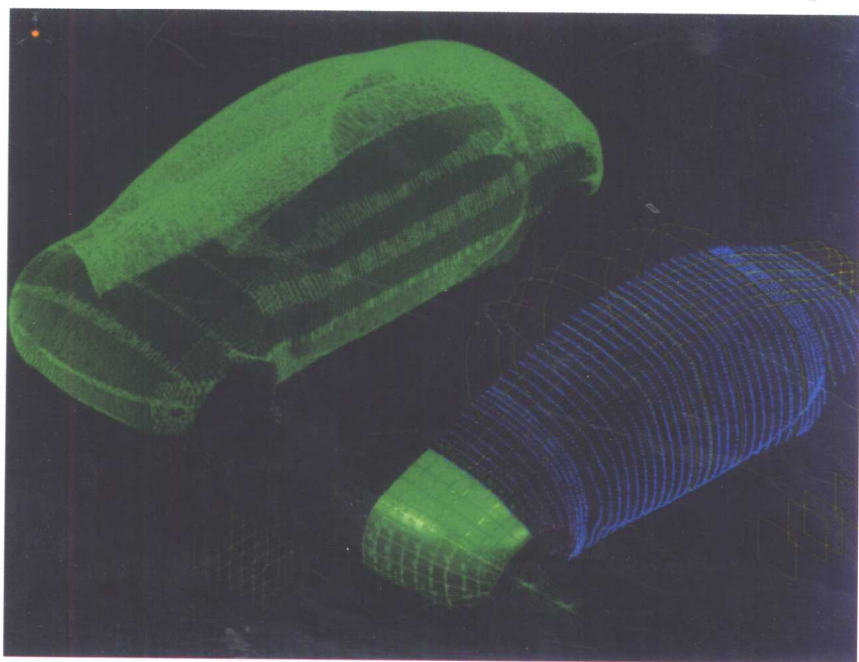


# 曲线与曲面的数学

## 贝济埃模型 B-样条模型 NURBS模型

工程师的助手 CAD的基础



[法] 吉贝·德芒热 著  
让皮尔·晡热

  
商务印书馆

# 曲线与曲面的数学

贝济埃模型

B-样条模型

NURBS 模型

[法] 吉贝·德芒热 让皮尔·晡热 著  
王向东 译

商 务 印 书 馆

2000年·北京

**图书在版编目(CIP)数据**

曲线与曲面的数学 贝济埃模型、B-样条模型、NURBS模型 / (法) 德芒热, (法) 哺热著; 王向东译. —北京: 商务印书馆, 2000

ISBN 7-100-02894-9

I. 曲... II. ①德... ②哺... ③王... III. ①计算机辅助设计-曲线-数学模型 ②计算机辅助设计-曲面-数学模型 ③计算机辅助制造-曲线-数学模型 ④计算机辅助制造-曲面-数学模型 IV. TP391.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 45374 号

本书出版得到法国外交部的资助  
Ouvrage publié avec le concours du  
Ministère français des Affaires Etrangères

所有权利保留。  
未经许可, 不得以任何方式使用。

**曲线与曲面的数学**

贝济埃模型

B-样条模型 /

NURBS 模型

[法] 吉贝·德芒热 让皮尔·哺热 著

王向东 译

---

商务印书馆出版

(北京王府井大街 36 号 邮政编码 100710)

商务印书馆发行

中国科学院印刷厂印刷

ISBN 7-100-02894-9 / TP·2

---

2000 年 11 月第 1 版 开本 787×1092 1/16

2000 年 11 月北京第 1 次印刷 印张 18 1/4

定价: 26.00 元

## 作者简介

吉贝·德芒热：巴黎高师毕业生，高师讲师，大学教授，国家数学教育名誉总监。长期从事贝氏与 B-样条模型的教学。

让皮尔·晡热：巴黎高师毕业生，模型学博士，大学数学教授。在 MAFPEN 和 IREM 数学所从事几何模型化的教学。

## 致谢

首先向皮尔·贝济埃表示感谢。感谢他的关心与帮助，感谢他亲笔为本书写的序言。

感谢高师、巴黎中央理工大学、Dassault Systèmes 与 Matra Datavision 公司对我们的热情接待和提供的高质量的工业图片。

## 封面与封底图片

### 外封面

1) 汽车车身, CATIA 软件-Dassault Systèmes 公司

### 内封面

2) 摩托车, STRIM 软件-Matra Datavision 公司

3) 直升飞机, CATIA 软件-Dassault Systèmes 公司

### 内封底

4) 概念样车, STRIM 软件-Matra Datavision 公司

5) 发动机罩(曲率显示), STRIM 软件-Matra Datavision 公司

### 外封底

6) 发动机罩(等参线图), CATIA 软件-Dassault Systèmes 公司

我不过就像是一个在海滨玩耍的小孩，  
为不时发现比寻常更为光滑的一块卵石或  
比寻常更为美丽的一片贝壳而沾沾自喜，而  
对于展现在我面前的浩瀚的真理的海洋，却  
全然没有发现。

伊萨克·牛顿

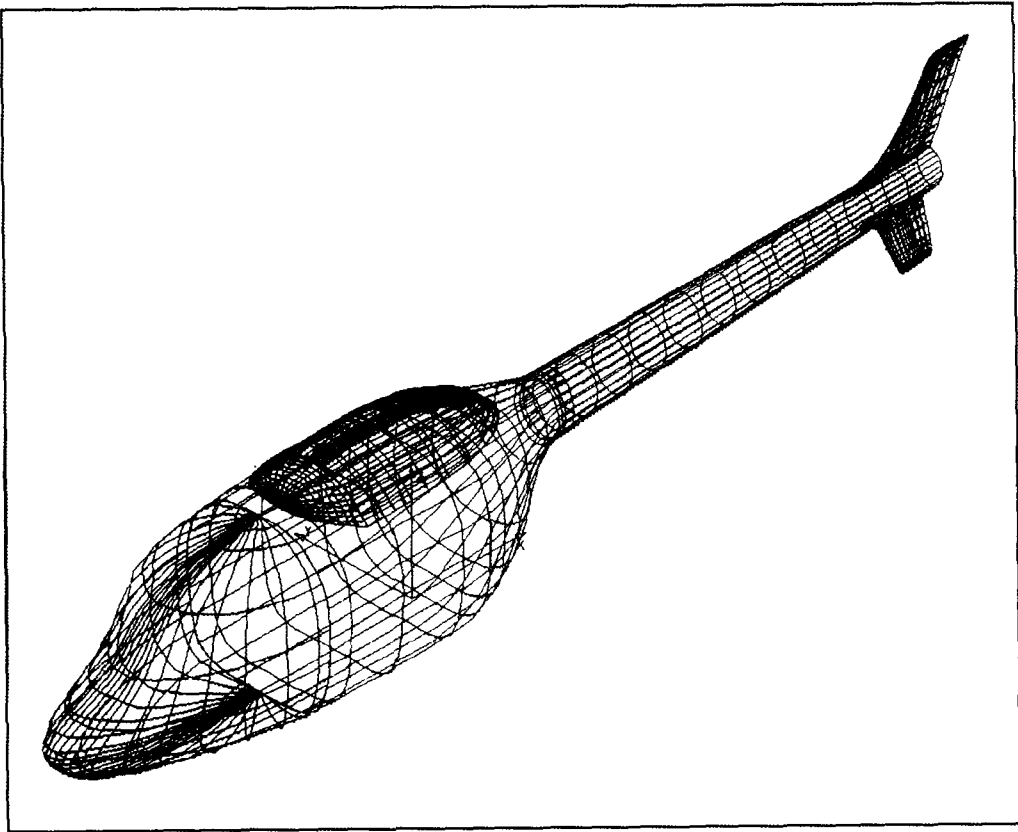
亲爱的读者：

我们邀请你们来发现一片美丽的贝壳。

## 工业实例

(第一片贝壳)

(本图是由巴黎高师力学工程实验室采用 CATIA 软件绘出的。经该院 Bernard Terrée 教授授权引用)



直升飞机机身的整体结构图。设计中既采用了贝氏与 B-样条复合曲面,也采用了由线段、圆弧或圆锥曲线生成的曲面。

(关于贝氏曲面,请阅第 4 章)

# 目 录

序(皮尔·贝济埃) .....	1
绪 言 .....	3
<b>第 1 章 贝济埃曲线的模型</b> .....	<b>5</b>
1 引言 .....	5
1.1 简介 .....	5
1.2 多种面目 .....	5
2 第一种定义:点定义法 .....	5
2.1 Bernstein 多项式 .....	5
2.2 贝济埃曲线的第一种定义 .....	13
2.3 贝济埃曲线的变换 .....	21
2.4 在其它多项式基底上的展开 .....	22
3 贝济埃曲线的局部性质 .....	25
3.1 逐次导向量,切线 .....	25
3.2 贝氏曲线的局部问题 .....	27
4 第二种定义法:向量与制约 .....	30
4.1 $n$ 维空间曲线的定义 .....	30
4.2 多项式 $f_3^1$ 的确定 .....	31
4.3 一般情形 .....	32
4.4 贝济埃曲线的第二种定义 .....	33
5 贝济埃曲线的几何绘制 .....	37
5.1 参数曲线 .....	37
5.2 四个例子 .....	38
6 第三种定义法:“重心”序列法 .....	41
6.1 概要 .....	41
6.2 De Casteljaou 算法 .....	41

6.3	用第一种定义法引进向量序列 .....	45
6.4	导向量的 De Casteljau 算法 .....	48
6.5	用于几何绘制 .....	50
7	矢端曲线 .....	52
7.1	定义 .....	52
7.2	推广 .....	53
8	贝济埃曲线的几何 .....	54
8.1	抛物线情形 .....	55
8.2	三次曲线问题 .....	57
8.3	四次曲线问题 .....	61
8.4	贝济埃曲线的子弧 .....	64
8.5	阶次的增减 .....	65
9	形体设计 .....	70
9.1	几种可能的方法 .....	70
9.2	复合曲线 .....	70
<b>第 2 章 B-样条曲线模型 .....</b>		<b>74</b>
1	均匀 B-样条函数与曲线 .....	74
1.1	贝氏曲线到样条曲线的转换 .....	74
1.2	Riesenfeld 多项式 .....	75
2	均匀 B-样条函数 .....	89
2.1	目的 .....	89
2.2	二次曲线书写形式的第一种整体化 .....	90
2.3	三次曲线书写形式的第一种整体化 .....	92
2.4	二次和三次曲线书写形式的第二种整体化 .....	92
2.5	零次和一次均匀 B-样条函数 .....	94
2.6	均匀 B-样条函数的性质, 导数, 递归性 .....	95
3	均匀 B-样条曲线 .....	98
3.1	均匀 B-样条曲线的矢端曲线 .....	98
3.2	移动点的几何求法 .....	100
4	均匀 B-样条曲线的几何 .....	105
4.1	二次均匀 B-样条曲线 .....	105
4.2	三次均匀 B-样条曲线 .....	105



4.3	四次均匀 B-样条曲线	108
5	广义的 B-样条多项式函数	109
5.1	引言	109
5.2	结点向量	109
5.3	(Cox 与 De Boor)递推定义法	110
5.4	例子	112
5.5	差商的概念	118
5.6	B-样条函数的差商定义法	121
5.7	B-样条函数的性质	123
6	B-样条曲线	126
6.1	定义	126
6.2	与坐标原点的无关性	126
6.3	B-样条曲线的例子	127
6.4	B-样条曲线的性质	129
6.5	重心与算法	130
7	B-样条曲线的矢端曲线	132
7.1	B-样条函数导数的性质	132
7.2	在求曲线的切线上的应用	134
7.3	B-样条曲线的矢端曲线	135
8	曲线及其几何特性的例子	136
8.1	例一(双结点)	137
8.2	例二(三重结点)	139
8.3	例三(四重结点)	141
<b>第 3 章 有理模型</b>		143
1	引言	143
2	“NURBS”的定义	143
2.1	从贝氏曲线到有理贝氏曲线的转换	143
2.2	“NURBS”曲线的定义	144
3	性质	145
3.1	单元划分性	145
3.2	凸包络性	145
3.3	整体的解析规则性	145

3.4	中心投影不变性 .....	145
4	圆锥曲线的模型化与例子 .....	147
4.1	非退化有理贝氏圆锥曲线的通式 .....	148
4.2	标准形式,关于圆锥曲线种类的讨论 .....	148
4.3	圆锥曲线的几何画法 .....	149
4.4	圆锥曲线问题求解 .....	150
5	构造算法 .....	150
5.1	加权系数的重心序列 .....	150
5.2	点的构造算法 .....	151
5.3	实例 .....	152
<b>第4章</b>	<b>贝济埃曲面 .....</b>	<b>157</b>
1	贝氏曲面片的定义 .....	157
1.1	例子 .....	157
1.2	贝氏曲面的定义 .....	159
1.3	重要性质 .....	162
1.4	曲面的例子 .....	163
2	矩阵定义法 .....	165
2.1	网格矩阵定义法 .....	165
2.2	正则定义点 .....	165
3	曲面片上的曲线 .....	166
3.1	例一:( $v=u$ )的情况 .....	166
3.2	例二 .....	169
3.3	一般情况 .....	169
4	曲面片的重心序列 .....	170
4.1	等参算法 .....	170
4.2	双变量算法 .....	171
5	子曲面片的确定 .....	173
5.1	几何研究 .....	173
5.2	重心序列的应用 .....	174
5.3	正则矩阵定义 .....	175
6	贝氏曲面片的偏矢端 .....	175
6.1	相对于 $u$ 的偏矢端 .....	175

6.2	相对于 $v$ 的偏矢端 .....	176
6.3	混合偏矢端 .....	177
6.4	例子 .....	177
7	次数的提升 .....	179
8	一阶局部研究 .....	179
8.1	在曲面片“角点”的偏导 .....	180
8.2	切平面与法向量 .....	181
9	二阶局部研究 .....	186
9.1	曲面曲线的曲率,法曲率 .....	186
9.2	$\mathbb{S}^2$ 上一点处法曲率中心的变化 .....	188
9.3	举例研究指示集 .....	192
9.4	曲面上异常曲线的定义 .....	194
10	曲面片的切向过渡 .....	195
10.1	两曲面片的切向过渡 .....	195
10.2	过渡曲面 .....	196
10.3	三曲面片的过渡 .....	197
11	关于其它模型的几点说明 .....	200
<b>第5章 贝氏三角刻面 .....</b>		<b>206</b>
1	贝氏三角形的定义 .....	206
1.1	三角形内的权重坐标 .....	206
1.2	贝氏曲线的新表达式 .....	207
1.3	贝氏曲面的符号定义式 .....	208
1.4	展开式举例 .....	208
1.5	三变量和三指标的 Bernstein 多项式 .....	209
1.6	贝氏三角刻面的定义 .....	210
2	贝氏刻面的性质 .....	211
2.1	定义与原点选择的无关性 .....	211
2.2	仿射不变性 .....	211
2.3	凸包络性 .....	212
3	方向导数的概念 .....	212
3.1	向量的权重分量 .....	212
3.2	直线的权重方程 .....	212

3.3	沿一个方向的导数	213
4	移动点的构造算法	214
4.1	重心序列	214
4.2	刻面移动点的构造	215
4.3	例子	216
4.4	重心序列的符号公式	216
5	方向导数的计算	217
5.1	方向导数的表达式	217
5.2	切平面	217
5.3	穿边导数,穿边矢端	218
6	次数的提升	220
7	子刻面的概念	221
<b>第6章 插值法</b>		223
1	拉格朗日多项式插值法	223
1.1	单变量问题与概论	223
1.2	Aitken 算法	224
1.3	拉格朗日基底	226
1.4	牛顿基底与差商	227
1.5	在其它基底上的表达式。Bernstein 基底	227
1.6	利用贝氏曲线进行参数插值	228
2	Hermite 多项式插值法	229
2.1	定义	229
2.2	$n=1$ 和 $n=2$ 的例子	230
2.3	Hermite 基底	231
2.4	牛顿基底	232
3	样条函数插值法	233
3.1	分段多项式插值法	233
3.2	样条插值问题简介。记号	233
3.3	样条插值结果	234
4	参数样条插值法	237
4.1	贝氏复合曲线的衔接	237
4.2	二次 $C^1$ 类贝氏复合曲线的研究	239

---

4.3 三次、 $C^2$ 类贝氏复合曲线的研究 .....	240
4.4 三次样条插值法 .....	243
5 逼近与光滑的概念 .....	245
习 题 .....	246
第 1 章习题(1-25) .....	246
第 2 章习题(26-44) .....	251
第 3 章习题(45-51) .....	254
第 4 章和第 5 章习题(52-74) .....	256
第 6 章习题(75-96) .....	260
附 录 .....	266
附 1(二项式系数) .....	266
附 2(向量空间与线性方程组) .....	267
附 3(参数曲线局部性质) .....	270
附 4(逼近与光滑) .....	271
参考文献 .....	273

# 序

图画是人类远祖最早的交流工具,那些绘制令人惊叹的洞穴壁画的人也许只会用喊叫和手势作为另一种交流语言。

大约一万五千年过去后才出现第一个楔形字母或象形文字。更长的时间过去后,这些字形才有了附音。腓尼基语言是更晚以后才出现的。

在西方文化里,图画是从远古以来按一定要求描述与制造物品的必备工具。那些庙宇教堂,那些宽大的船只,都不是随意估计建造的,而是事先画好图样的。从木工石匠到汽车轮船等制造厂,蓝图都是在车间厂房里绘出的。为了满足越来越高的精度要求,图纸上还标出了尺寸与公差。即使对最简单的机械零件,一张图纸胜过千言万语,简单明了,天意也!

一位技工师傅能轻而易举地用直尺角规在图纸上测得尺寸大小。所有一起工作的人,无论相距多远,都被图纸联在一起。“氨熏晒图”(Ozalid)接替了“蓝图”,尺寸标注减小了纸张湿度的缺陷。如有必要,还可用有机物纸张,如聚乙烯纸。

计算机自然解决了信息运输问题,也满足了柏拉图(Platon)用数来表达一切的愿望。

几千年来,机械技工基本上使用的是直线与圆的几何,直尺、三角板、圆规已经够用了。如果说一个园丁工人发明了椭圆规的话,那也是在达芬奇发明圆锥曲线绘图仪很久以后的事了。

从古希腊以来,数学家就对数不胜数的曲线感兴趣,但其目的是体现一些数学表达式的性质。在傅立叶(Fourier)以前,没人问过逆问题,即求出一给定曲线的代数表达式。当流体动力现象变得越来越重要而经验流形已难以推广时,这个逆问题被尖锐地提出来了。1955年左右,当计算机变得比较可靠实用时,CAD很快变成CAD/CAM,并得到空前发展。航空工业敞开了大门,汽车工业紧随其后,且时有超前。正如Rabelais所言,几十年来,人们蜂拥而至,走上了这条光明大道。

直线和圆不再够用,而要考虑空间曲线了。第一步自然就是在事先做好的模型上测点、作线、建面。样条曲线、Nurb模型、Coons曲面片、Delaunay和Voronoi三角刻面,都能很好地满足要求。但自动求得的解常常需要做一些光顺调整,因为是人为主观的,故随意性很强。

从最早的参数多项式的研究至今,人们做了大量工作,积累了十分丰富的文献。显然,只要懂一点粗浅的知识,就能用 CAD/CAM 做出漂亮的工作。就像对热力学一窍不通的人照样能开汽车那样。然而,对于那些想掌握技术并想在实际应用中加以补充和完善的人,国家教育总监的这本书,将是雪中送炭。

请注意:作者时而用几何方法,时而用解析方法进行演绎推理,纯粹数学家可能会不屑一顾,然而技工人员注重的是实用而非纯粹。他们会发现对某种特定的实际情况,某种特别的方法将来得更直接、更快。可惜人们常忘掉这一点。实际上,CAD/CAM 正是为了辅助技术工作才诞生的啊!

皮尔·贝济埃

Pierre Bézier

# 绪 言

这本书是关于什么内容呢？

本书的目的是介绍在 CAD(计算机辅助设计)和 CAM(计算机辅助生产)的应用中曲线和曲面的数学模型,适用范围十分广阔。从汽车、飞机的制造,到字体、图案的设计,等等。本书内容主要包括:贝济埃曲线、B-样条曲线、有理曲线、贝济埃曲面(曲面片和三角刻面)、以及 B-样条曲面。

我们将用不同的方法来介绍这些数学模型,包括向量法、解析法、几何法、代数法、指标法、矩阵法、运算法,等等。每种方法都从不同的特殊角度使人看到它们在形体设计中的威力。

作者特强调以下两点:

——首先,本书对曲线与曲面的几何做了充实的讲解,在大多情形下还介绍了其矢端概念。

——另外,书中的那些定义、证明、求解、说明,大量使用了“符号”公式,这些简洁的公式浓缩了曲线与曲面移动点的总括表达式。

最后一点,就是对每一种模型,整体研究使人联想到曲线或曲面的整体形状,而局部研究则给出了在某点处的切线、切平面、密切平面、曲率、挠率等。我们最关心的是怎样才能使读者更好地理解这些处于 CAD 软件核心部位的模型。一个想法就是使人看到为什么这些模型柔性极强,很适应形体设计。

总之,这本数学书揭去了盖在 CAD 软件中心部位“黑盒子”上的面纱。

这本书的读者是哪些人? 怎样的学历?

本书是关于贝济埃、B-样条等曲线与曲面的数学,其读者范围十分广泛:

——在研究设计院和生产领域里使用 CAD 系统进行各种工业应用的工程师与技术  
员;

——与 CAD 应用软件有关的大学本科三、四年级和高等专科学校高年级的学生;



——也可用于大学本科一、二年级和高等专科学校的数学与科技教程中；

——最后还可供现在和未来的力学与土木工程学的教师参考。

高中毕业后深造一年以上的人,或有等价学历的人都能读此书。书尾附录扼要介绍或回忆了一些基本的数学概念,关于贝济埃曲线的第一章和其它章节有关重要定义与定理的前面几段,除了少数证明以外,都能被高中毕业后深造一年的人所接受。但是关于B-样条函数的精密性质,以及贝济埃曲面片与刻面的研究方法,则需要较深的数学知识。

### 本书采用了什么样的讲解方式?

大部分概念的引入都是尽可能建立在让读者最容易理解的基础上的。先举些简单、低阶的实例,再来谈论定义、特性和证明。这样,读者就能更好地领会证明中推理的实质精髓。

最后,书尾的习题有利于帮助理解讲过的内容,可因人而异,自行解答。习题还介绍了一些特例和书中没谈过的新的方法,对各章节是个补充。

### 本书与计算机和 CAD 有什么关系?

本书所讲的模型在实际应用中必须使用计算机才行。我们不介绍软件程序,但在大多情况下将给出实用中的计算方法(如递归法或迭代法与其树状图)。

本书的目的是对数学模型在应用中的深入完整的理解,我们尽量从工业生产中选择复杂情形的实例,加以简化,作为教学示图与例子。如封页的彩图和各章节节尾的图示。

正如皮尔·贝济埃在序中所言,数学模型加上计算机为形体的设计与创造提供了直接有力的工具。

作 者