第二卷

数学名著译丛

数学与猜想

合情推理模式

〔美〕G. 波利亚 著

科学出版社

数学名著译丛

数学与猜想

第二卷

合情推理模式

〔美〕G. 波利亚 著

李志尧 王日爽 李心灿 译

杨禄荣 张理京 校

内 容 简 介

本书是《数学与猜想》的第二卷.这一卷系统地论述了合情推理的模式,评述它们彼此之间以及与概率计算的关系,并扼要地讨论了它们与数学发现及教学的关系.

本书将数学中的推理模式与生活中的实例相联系,论述深入浅出,读来令人兴味盎然.全书有大量习题,书末附有习题解答.

本书可供大学数学系师生、中学教师、数学研究人员及数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

数学与猜想:合情推理模式(第二卷)/(美)波利亚(Polya,G.)著;李志尧,王月爽,李心灿译.-北京:科学出版社,2001.5
(数学名著译丛)
ISBN 7-03-009111-6

Ⅰ.数… Ⅱ.①波… ②李… ③王… ④李… Ⅲ.逻辑推理 Ⅳ.0141

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第88149号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
[illegible]印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

2001年7月第一版 开本:850×1168 1/32
2001年7月第一次印刷 印张:7
印数:1—3 000 字数:177 000

定价:18.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序　言

归纳推理是不同的哲学观点彼此争论的场所之一，这种争论至今仍然比较活跃．已通读本书第一卷的读者必定会幸运地注意到两件事． 首先，在数学发现中归纳推理与类比推理起着主要作用．其次，这两种推理都是合情推理的特殊情况．我想，不考虑合情推理的孤立的特殊情况，而考虑它的基本思想会更有哲学意味．本卷试图系统地讲一些合情推理模式，用以研究它们与概率计算的关系，确定在什么意义上它们能当作合情推理的“规则”．此外还扼要地讨论了它们与数学发明及教学的关系．

本卷正文不经常明显地涉及第一卷，而读者也不必查阅这些引证就能懂得其主要的联系． 在列于本卷各章的问题中，有一些问题读者若不参阅第一卷是解答不了的． 但就整体来说，在你第一次阅读第二卷时，虽然事先你并未读过第一卷，也能读懂第二卷．当然，还是先读第一卷，再读第二卷更自然些，因为第一卷的许多例子为我们提供了研究第二卷的实验资料及丰富背景．

鉴于下面要提到的方法，这种资料及背景是特别需要的． 我希望按博物学家的方法研究合情推理：我收集观察报告，叙述结论，强调为我的观察资料所证明的观点，然而我尊重读者的见解，而且不想强迫或诱使他们采纳我的结论．

当然，这里所提出来的观点说不上是最终的．事实上，有几个地方我清楚地感到需要做或多或少的改进．然而我相信主要方向是对的，对本书所提出问题的讨论，特别是那些例子，可以把合情推理，特别是有时当作“客体”有时当作“主体”的归纳推理的“两重性”和“补充方面”解释清楚．

G. 波利亚
斯坦福大学
1953.5.

对读者的提示

若在第七章中引用第七章的第 2 节时我们记为 § 2，但在其他各章中引用此节时则记为 §7.2. 若在第十四章中引用第十四章第 5 节的小节 (3) 时，我们记为 §5 (3)，但在其它各章引用此小节时则记为 §14.5 (3). 当第十四章的例 26 在本章中引用时我们记为例 26，但在其它各章中引用时则记为例 14.26.

阅读本书的主要部分，只要具有初等代数和初等几何的一些知识就够了. 若具有初等代数和初等几何的全部知识和解析几何以及极限、无穷级数、微积分的某些知识，则对于阅读差不多全书和大多数例题与注释是足够的. 然而，本书中少量非主要的注释和某些问题的注释以及若干讨论，则是针对具有高水平的读者而写的. 每当用到比较高深的知识时，通常都会声明.

具有高等水平的读者，若他跳过其自认为是太初等的东西不看的话，则他漏过的东西将比没有高等水平的读者要多，而后者往往只会跳过在他看来是太复杂的那些东西.

应该注意，(不很困难的)论证的某些细节，我们通常都不加提醒地省略了. 希望素有严格证题习惯的读者，不致于因此而破坏了自己的良好习惯.

要求解答的问题，有些是很容易的，但有一小部分却相当困难. 方括号[ ]内的提示可以使解答变得容易. 难题周围的问题则可以起到解难题的提示作用. 在某些章的例题之前或在第一部分或在第二部分之前所加的几行"开场白"，应该受到特别注意.

解答有时是很简短的：因为我们假定读者在查阅解答之前已用自己的方法实实在在地尝试过求解了.

一个读者，若在一个问题上真的下了功夫，即使他解题时没有成功，那他也可从中受到教益，例如经过一番努力之后，他可以去

查看一下解答，再把书放在旁边，思考一下关键在那里，然后再试图去做出解答来.

在某些地方，本书不惜用大量的图示或详细的推导过程，目的是使读者看清图示或公式的演变过程. 例如，可参看图 16.1～16.5. 然而任何一本书都不能说它已给出了足够的图形或公式. 当读者读到某一段时，可能有两种态度：一种是粗略看看，一种是读深读透. 如果想读深读透，那就应该手边有纸有笔，应该准备写下书上给出的公式或画下书上给出的图形以及公式，看到演变过程的各种细节是如何影响最后的结果的. 这样作就会有助于记住全部东西.

目　　录

（第二卷）

第十二章　几个著名模式

在这个阶段，我不希望审定论证的这种形式的逻辑证明；我暂且把它看作是一种能在人类和动物的习性中观察得到的习惯.

——贝特兰·罗素[1]（Bertrand Russell）

§1. 证实一个结论

在本书的第一卷《数学中的归纳和类比》中，我们看到了合情推理的实例. 在第二卷中我们要用概括的语言来描述这种实例. 第一部分例子已经简述了合情推理的某些形式或“模式”. 在这一章里我们要明白地系统地叙述这些模式[2].

我们从合情推理的模式开始，这种模式具有相当广泛的用处，以致我们几乎能从任意一个例子中把它引出来. 但还是让我们举一个以前没有讨论过的例子吧.

下面是欧拉猜想[3]：任何可以写成 $8n+3$ 的整数是一个平方数与一个素数的两倍之和. 欧拉没能证明这个猜想，现在看来要去证明它的难度也许会比欧拉时代更大. 欧拉还对所有 200 以内的形如 $8n+3$ 的数证实了他的猜想；对 $n=1, 2, \cdots, 10$ 见表 I.

这种实验工作可以很容易地做下去；对 1000 以下的数无一例外都是对的[4]. 这就证明了欧拉猜想了吗？决不是的；即使一直验证到 1,000,000 也还是什么都没有证明. 然而每一个验证都使猜想更可靠一点，在这当中我们能看到一般模式.

---

1) 《哲学》(*Philosophy*), W. W. Norton & Co., 1927, 80 页.

2) 本章的一些内容，我曾在 1950 年《国际数学家会议的会议录》(*Proceedings of the International Congress of Mathematicians*) 第 1 卷，739～747 页“论合情推理”(On plausible reasoning) 一文的发言稿中用过.

3) 《全集》(*Opera Omnia*), 第 1 辑第 4 卷 120～124 页. 在这一节里欧拉把 1 当作素数；为说明 $3=1+2\times1$，这是必要的.

4) D. H. 兰姆 (Lehmer) 教授的书信.

表 1.

$11=1+2\times5$
$19=9+2\times5$
$27=1+2\times13$
$35=1+2\times17=9+2\times13=25+2\times5$
$43=9+2\times17$
$51=25+2\times13$
$59=1+2\times29=25+2\times17=49+2\times5$
$67=9+2\times29$
$75=1+2\times37=49+2\times13$
$83=1+2\times41=9+2\times37=25+2\times29=49+2\times17$

设A为某个明确表达的猜想，现在它既未被证明为真也未被证明为假.（例如，A可以是欧拉猜想，则对$n=1,2,3,\cdots$,

$$8n+3=x^2+2p,$$

此处x是整数，p是素数.）设B是A的某个结论；B也应该是个清楚地陈述的、既未被证明为真也未被证明为假的结论.（例如，B可以是欧拉猜想的未列入表内的第一个特例，即$91=x^2+2p$.）现在我们不知道A为真还是B为真. 然而，我们知道

A蕴含B.

于是，我们着手检验B.（只做几个实验足以发现关于91的假设是真还是假.）如果得知B是假的，我们就能断言A也是假的. 这是十分清楚的. 在这里我们有一个古典的初等推理模式，即所谓三段论法的“否定式”：

$$\frac{\begin{array}{c}A\text{蕴含}B\\ B\text{假}\end{array}}{A\text{假}}$$

把两个前提与结论隔开来的水平线通常表示“因此”一词. 这里我们有著名的**论证推理**模型.

如果B是真的，结果又怎样呢?（确切地说，$91=9+2\times41=81+2\times5$.）没有论证结论：证实$A$的结论$B$为真并没有证明猜想$A$. 然而这种证实却使$A$变得更为可靠.（再一次证实使欧拉猜想变得稍微更加可靠.）在此我们有一个**合情推理**模式：

$$\frac{\begin{array}{c}A\text{ 蕴含 }B\\ B\text{ 真}\end{array}}{A\text{ 更可靠}}$$

水平线又表示"因此"．我们将这个模式称为基本归纳模式，或稍简短些，"归纳模式"．

这个归纳模式没有任何使人惊奇的东西．相反，它表达了一个不讲常理的人才可能怀疑的信念：证实一个结论总是使猜想更可靠．稍加留意，我们就能看到在日常生活中，在法庭上，在科学里等等的无数推理，这些推理都遵从我们的模式．

§2. 连续证实几个结论

在这节我们把短语"讨论定理"寓为"讨论或考察定理的某些特例及它的一些更直接的推论"这样的特殊意义．我认为在低年级和高年级讨论中所提出来的定理都是有益的．我们来考虑一个非常初等的例子．假定你教立体几何并且必须导出一个锥的平截头体的侧面积公式．当然，锥是直立圆锥，已给出其底半径为 R，顶半径为 r，高为 h．你做完通常的推导，得到结果：

A．平截头体的侧面积是

$$\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}.$$

我们称这个定理为 A，以便将来引用．

现在来讨论定理 A．你问学生：你能检验一下这个结果吗？如果没有回答，你就给他们一些更明显的提示：你能应用它去检验结果吗？你能把它应用到一些你已经知道的特殊情况之中去检验其正确性吗？最后终于得到了你的班级的或多或少的一点合作，认真处理各种已知情况．如果 $R=r$，你得到第一个值得注意的特例：

B_1．圆柱的侧面积是 $2\pi rh$．

当然，h 表示圆柱的高，r 表示它的底半径．我们称 A 的这个结论为 B_1，以便将来参考．结论 B_1 在你的班级上已经处理过了，因而把它看作 A 的一个证实．

取 $r=0$，你得到另一个特例，即有：

B_2. 锥的侧面积是 $\pi R\sqrt{R^2+h^2}$.

此处 h 表示锥高，R 表示锥底半径. A 的结论 B_2 也已经是已知的了，并看作是 A 的进一步证实.

相应于 $h=0$ 有一个不明显但却有趣的特例：

B_3. 半径分别为 R 与 r 的两个同心圆之间的圆环面积是

$$\pi R^2-\pi r^2.$$

A 的结论 B_3 可由平面几何得知，又提供了 A 的另一个证实.

前面的三个特例都可以从早先的研究中得知，它们从三个不同方面证实 A；三个图形(分别对应于 $r=R$，$r=0$ 及 $h=0$ 的圆柱，圆锥及同心圆)看上去却是完全不同的. 你还可以注意到非常特殊的情况 $r=h=0$.

B_4. 半径为 R 的圆面积是 πR^2.

我有时发现，坐在最后一排的一个似乎睡熟了的男孩，在我的仔细推导接近末尾时，他睁开眼睛并表示出他对讨论过程有些兴趣. 公式的推导显然是简单而容易的，但对他似乎是深奥而困难的，推导没能使他信服. 他更信服于讨论：他想，在如此多又是如此不同的情况下受到检验的公式，是有希望被证明是正确的. 在这样的想像之中，他适应了合情推理模式，这模式紧密地与基本归纳模式相联系，但比后者更为成熟：

$$\frac{\begin{array}{c}A\text{ 蕴含 }B_{n+1}\\ B_{n+1}\text{ 与前面已经证实的 }A\text{ 的结论 }B_1,\\ B_2,\cdots,B_n\text{ 相比是十分不同的}\\ B_{n+1}\text{ 为真}\end{array}}{A\text{ 可靠得多}}$$

这个模式给基本归纳模式增加了一个条件. 当然，证实任一结论，都能增强我们对猜想的信心. 但是，有些结论的证实能较多地增强我们的信心，而另一些结论的证实则较少地增强我们的信心. 刚才说的模式提出一种很值得我们注意的情况，它对增强归纳证据的份量有极大的影响：各种结论都试验过了. 如果新结论与以前证实了的结论越不相同，新结论证实的价值就越大.

现在我们来考察问题的另一方面. 拿上述 §1 的例子来看. 证实欧拉猜想的表 I 内的相继各项看上去彼此很相似——除非我们注意到某个被隐藏的线索，而要看到这样的线索似乎是十分困难的. 因此，我们早晚会厌倦于一系列单调的证明. 在证实了一定数量的实例之后，我们踌躇起来. 还值得再做一个吗? 如果下一个结论是否定的，那就会推翻猜想——但是下一个实例和已证实的实例在各个已知方面是那么相似，以致于我们简直不能期待得到一个否定的结果. 如果下一个实例的结论是肯定的，那就会增强我们对欧拉猜想的信心，但这种信心的增强是如此之少，以致于补偿不了为再去检验下一个实例所带来的麻烦.

这种想法提出下面的、本质上和我们刚才讲过的并无不同的、只是它的一种补充形式的模式:

A 蕴含 B_{n+1}
B_{n+1} 是十分相似于前面证实过的 A 的
结论 $B_1, B_2, \cdots, B_n$
B_{n+1} 为真

A 只是多一些可靠性

证实新结论意义的大小随新结论与前面已证实的结论之间的差异大小而定;其差异愈大，则意义愈大，反之，其差异愈小则意义也愈小.

§3. 证实一个未必可信的结论

在欧拉的一本有点名气的简短笔记中[1)]，他认为，对正值参数 n，级数

$$1-\frac{x^2}{n(n+1)}+\frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)}-\frac{x^6}{n\cdots(n+5)}+\cdots \tag{1}$$

对所有 x 值都收敛. 他观察到关于 $n=1, 2, 3, 4$，级数的和及其零点.

1) 《全集》(*Opera Omnia*)，第 1 辑，第 16 卷，第 1 节，241～265 页.

$n=1$：和 $\cos x$，　　　零点 $\pm\frac{\pi}{2}$，$\pm\frac{3\pi}{2}$，$\pm\frac{5\pi}{2}$，$\cdots$

$n=2$：和 $\frac{\sin x}{x}$，　　　零点 $\pm\pi$，$\pm 2\pi$，$\pm 3\pi$，$\cdots$

$n=3$：和 $\frac{2(1-\cos x)}{x^2}$，零点 $\pm 2\pi$，$\pm 4\pi$，$\pm 6\pi$，$\cdots$

$n=4$：和 $\frac{6(x-\sin x)}{x^3}$，无实零点。

欧拉观察出一个差异：在前三个实例中所有零点都是实的，在最后一个实例中没有一个零点是实的. 欧拉注意到在前两个与第三个实例之间的颇为微妙的差异：对 $n=1$ 与 $n=2$，两个相邻的零点之间的距离是 π（倘若我们不管 $n=2$ 情况的相邻于原点的零点），但对 $n=3$，相邻零点间的距离是 2π（加上与上述相似的条件）. 这激起他饶有趣味的观察：$n=3$ 时，所有零点都是二重零点. "然而我们由分析得知"欧拉说，"一个方程的两个根总是在由实根到虚根的过渡中相合. 那么，我们可以弄懂为什么当 n 超过 3 时，所有零点突然变成复的."在这些观察的基础上，他阐述一个令人惊异的猜想：由级数 (1) 所定义的函数当 $0<n\leqslant 3$ 时仅有实零点，且有无穷多个，但当 $n>3$ 时，没有实零点. 在这个叙述中，他把 n 当作连续变动参数.

在欧拉时代，超越方程零点的实性问题完全是新的，我们必须承认，甚至今天我们也不具备系统的方法来解决这样的问题.（例如，我们不能证实黎曼 (Riemann) 的著名假设为真或为假.）因此，欧拉的猜想显得极其大胆. 我认为他的勇气及其叙述猜想所具有的清晰程度是令人惊叹的.

欧拉的令人钦佩的功绩还在于他所说的东西在一定程度上是可以理解的. 其他专家在处理别的课题中也做出类似的成绩，我们之中的每个人在日常生活中也会做类似的事情. 事实上，欧拉是从零星的几个细节去猜测整体的. 完全类似地，一个考古学家可以相当确切地从磨损了的石头上的零星字句中重新考证出整篇碑文. 一个古生物学家在检查了几块骨头化石之后可以相当逼真

地画出整个动物.当一个你很熟悉的人以某种方式开始谈话时,他讲过几句话之后,你就会预言他打算讲的整个故事. 完全类似地,欧拉从清楚地看到的几点出发猜出了整个故事,整个数学事态.

欧拉只考虑 $n=1,2,3,4$ 这几个实例就进行推测,这就更值得注意. 可是,我们不应该忘记间接证据可能是很强有力的. 一个被告被指控炸毁了他女朋友的父亲的游艇,并且原告拿出来一张被告签署的购买这么这么多数量炸药的收条. 这种证据大大地加强了原告的诉讼份量.为什么?因为普通市民买炸药本来就是一件不平常的事情,于是为了炸毁某件东西或炸死某个人而去买炸药就完全可以理解了. 请看,这桩官司非常类似于欧拉级数 $n=3$ 的情况. 弄清楚随意写出的方程的所有根是二重根本来是件很不平常的事. 然而从两个实根到两个复根的过渡之中出现二重根是完全可以理解的. $n=3$ 时的实例是欧拉提出来的最强有力的一件间接证据,从中我们能看出一个合情推理的一般模式:

$$\frac{\begin{array}{c}A\text{ 蕴含 }B\\ B\text{ 本身很不像是可靠的}\\ B\text{ 真}\end{array}}{A\text{ 极为可靠}}$$

这模式也像是对基本归纳模式(§1)的修改或深化. 现在不作特别解释,我们添加一个从反面解释相同思想的补充模式:

$$\frac{\begin{array}{c}A\text{ 蕴含 }B\\ B\text{ 本身像是十分可靠的}\\ B\text{ 真}\end{array}}{A\text{ 只多一点可靠}}$$

证实一个结论的价值的大小,是按这一结论本身的不可靠程度来定的. 最惊人的结论的证明是最令人叹服的.

顺便说一句,欧拉是对的: 150 年以后,他的猜想完全被证实了[1].

---

1) 见作者的论文"关于欧拉论文的超越方程"(Sopra una equazione transcendente trattata da Eulero),《意大利数学家学会会报》(*Bolletino dell' Unione Matematica Italiana*),第5卷,1926,64~68页.

§4. 类比推理

在这段里回顾一下第一卷“归纳与类比”的一些例子是有益的。我们已经在本章前几节中系统地讲过了几个合情推理模式：怎样按这些模式来看待那些例子呢？

让我们来考虑两个相关的例子（分别在第一卷的 §10.1 与 § 10.4）。其中之一与等周定理及笛卡儿有关，另一个与等周定理的物理类比及瑞利爵士有关。我们应重作第十章的两个表（在那里称为表 I，表 II，在这里称为表 II，表 III）把它们并排放着。表 II（按本章编号称呼）列出十个图形的周长，每个图形有相同面积为 1，表 III 列出相同的十个图形的主频率（看作振动薄膜）。

表 II

等积图形的周长

圆	3.55
正方形	4.00
圆的 1/4	4.03
长方形 3:2	4.08
半圆	4.10
圆的 1/6	4.21
长方形 2:1	4.24
等边三角形	4.56
长方形 3:1	4.64
等腰直角三角形	4.84

表 III

等积薄膜的主频率

圆	4.261
正方形	4.443
圆的 1/4	4.551
圆的 1/6	4.616
长方形 3:2	4.624
等边三角形	4.774
半圆	4.803
长方形 2:1	4.967
等腰直角三角形	4.967
长方形 3:1	5.736

一张表中的周长，另一张表中的主频率都按递增排列。两张表都从圆开始，在所列的十个图形之中圆有最短的周长，也有最低的主频率，这就提出两条定理：

所有给定面积的平面图形中圆有最短周长。

所有给定面积的薄膜中圆有最低主频率。

第一个命题是等周定理，第二个是著名的瑞利爵士的猜想。我们的表为两个定理提供了可靠的归纳证据，当然未予证明。

现在和我们在 §10.1 及 §10.4 考虑这些表的时候比起来，情况已发生了变化。其间我们已经看到等周定理的一个证明（§10.6—