

21世纪高等学校数学学习辅导教材

考研数学真题全解与 考点分析

陈小柱 编著 孙山泽 主审

- 权威的资料 + 科学的研究 = 鲜为人知的可靠结论
- 历届考研试题全解 · 生根于现行教材 · 真正的考点分析
- 全面复习的导航者 · 冲刺闯关的掌中宝

(最新版 · 理工类 · 数学二)



大连理工大学出版社

21 世纪高等学校数学学习辅导教材

考研数学真题全解与 考点分析

(最新版·理工类·数学二)

陈小柱 编著
孙山泽 主审

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学真题全解与考点分析:最新版·理工类·数学二
/陈小柱编著. —大连:大连理工大学出版社,2000.10

(21世纪高等学校数学学习辅导教材)

ISBN 7-5611-1584-9

I.考… II.陈… III.数学-高等数学-研究生-入学考试-
自学参考资料 IV.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 04336 号

大连理工大学出版社出版发行

大连市凌水河 邮政编码 116024

电话:0411-4708842 传真:0411-4708898

E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn

URL:http://www.dutp.com.cn

大连理工大学印刷厂印刷

开本:850×1168毫米 1/32 字数:154千字 印张:6.125

印数:14001—22000册

1999年10月第1版

2000年10月第3次印刷

责任编辑:刘杰

责任校对:习文

封面设计:孙宝福

定价:16.00元(本册8.00元)

卷首赠言

在学习方面您的最有价值的财富
是一种积极的态度。

鲍比·迪波特《定量学习》

我们知道每个人的潜力远远超过
已经实现的一切。

彼得·克莱恩《天天天才》

合订本最新版前言

本书第一版自 1999 年 10 月出版,已销售一空。

第一版的第 67 页有特别提示:本部分与 §7 无穷级数、§8 常微分方程的三项平均分之和高达 33 分,是考研复习的重点。所对应的同济四版《高等数学》(下册)教材中的最后三章内容,先要吃透。反之,若对此重点的复习不到位,则很难达到分数线!

果然,2000 年考研数学一试卷中,教材《高等数学》(下册)最后三章内容所占分数为:35 分!

本书的主审、北大教授孙山泽先生曾指出:“本书可开发低年大学生的潜质,用于考研复习更是立竿见影!”

《高等数学习题全解》、《线性代数·复变函数·概率统计习题全解》和《考研数学真题全解与考点分析》出版后,呈献给了北大教授陈家鼎先生。陈教授在百忙中抽出时间,写信给作者。来信写道:“这些书对学生复习和考研将很有帮助!”

2000 年考研数学一试卷中,有一道 8 分的概率统计题和《线性代数·复变函数·概率统计习题全解》一书第 303 页第 20 题完全相同。不久前一位考生面带微笑道:答卷时,当看完这道题后,心里立即有了底。

修订后的最新版,面向 2001 年考研的考生以及理工科低年级在校生,期待着您的宝贵意见!

作者

2000 年 3 月于大连凌水河畔

合订本第一版前言

考研已热了。

世纪之交,登高望远,这一发展方向对人类未来所产生的积极影响是深远的。1977年恢复的高考热,见证了沧桑巨变的改革开放二十年。新的千年就在眼前,考研热必将伴随着一个伟大的民族迎来伟大的复兴!

有关考研的参考书很多。本书有以下三大特色:

其一,详细解答了1987年~1999年全部考研数学全真试题(理工类:数学一、数学二),并进行了精心的分类。这是一本工具书。由于这十三年间考研真题,决定了无数莘莘学子的人生命运,本书有保存价值。

其二,通过对试题进行解剖,分析出了考点。不同年份的命题专家们,多次考到的相同的知识点,称之为考点。考点吻合于课堂教学中的重点和难点。这些虽在《考试大纲》中有所规定,而本书诠释得更加生动具体,并已深入到出题人的思路中。如果您优先把本书的问题搞通,可大大减少盲目性。

其三,运用资料索引的手段,建立了考研真题与全国通用教材之间的内在联系。许多考生抱怨:遗忘严重!过去学过的几门考研课均已不同程度地忘却了。资料索引可帮您进退自如:当研究考研题有困难时,可从考研题很快地回到通用教材;当把通用教材的知识点弄通后,可迅速上升到考研题中来。考试题目千变万化,命题专家组也常换常新,但教材的内容相对稳定。吃透教材,以静制动。

本书的资料索引如同一束投影光,教材中相应的重点立即水

落石出。教材中被“考焦”了的页码,务必心中有数。

考生们的时间和精力均很有限,是不得不考虑的客观事实。

然而,众多的考研参考书的特点为:大量难题罗列,容量大得惊人。读此类书,往往会心有余而力不足。“食而不化,盲目复习”是读此类参考书所产生的副作用。比如,据多位已在读的研究生透露,当年购买的几大厚本考研资料,根本没时间看完。再比如,在考研辅导时,有些学生宣称:我已把某某厚书全读完了,读“懂”了。但一测试,得分很少。这是“贪多”所产生的必然结果。

本书由北京大学数学科学学院孙山泽教授担任主审。北京大学博士、中国科学院博士后孙六全,北京大学博士、美国耶鲁大学博士后张双林均提出了宝贵的意见,并作了部分工作。

本书充分考虑到了理工科大一、大二、大三及大四的在校生。在学习《高等数学》、《线性代数》及《概率论及数理统计》课程的同时,在校生朋友可借助本书,把对应章节的学习及时加深到考研的水准,这可开发自身的潜质,为考研早作准备。因而,本书可作为同步辅导教材。本书同一版再版的《高等数学习题全解》、《线性代数·复变函数·概率统计习题全解》形成系统的知识体系,服务于广大的读者朋友。

限于作者水平,加之时间仓促,不妥之处一定存在,恳请广大读者提出批评和指正!

陈小柱

1999年10月1日于北大未名湖畔

目 录

卷首赠言

合订本最新版前言

合订本第一版前言

第一篇 高等数学

§ 1 一元函数·极限·连续	2
1.1 考点分析	2
1.2 本部分 1987 年~2000 年考研真题	5
1.3 相对应的真题全解	9
§ 2 一元函数微分学	18
2.1 考点分析	18
2.2 本部分 1987 年~2000 年考研真题	26
2.3 相对应的真题全解	38
§ 3 一元函数积分学	78
3.1 考点分析	78
3.2 本部分 1987 年~2000 年考研真题	87
3.3 相对应的真题全解	99
§ 4 常微分方程	139
4.1 考点分析	139
4.2 本部分 1987 年~2000 年考研真题	144

4.3 相对应的真题全解	148
--------------------	-----

第二篇 线性代数

§1 线性代数	171
1.1 考点分析	171
1.2 考研真题及其解答	173

考研数学二

1987 年～1996 年, 高等数学占 100 分, 线性代数占 0 分

1997 年	高等数学占 84 分	线性代数占 16 分
1998 年	高等数学占 84 分	线性代数占 16 分
1999 年	高等数学占 83 分	线性代数占 17 分
2000 年	高等数学占 84 分	线性代数占 16 分

第一篇 高等数学

§ 1 一元函数 · 极限 · 连续

1.1 考点分析



考试频率

1987 年~2000 年, 2 年没考此部分, 考过 12 年。



分数统计

本部分 1987 年~2000 年分数分布表

年份	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
分数	8	9	3	11	0	11	3	0	6	14	8	11	8	9

$$(1) \text{每次平均分}^*: 7.2 \text{ 分} = \frac{101 \text{ 分}}{14};$$

* 请读者充分注意这项指标, 在各部分的变化。

• 2 •

- (2) 每题平均分: 3.6 分 = $\frac{101}{28}$ 分;
 (3) 最高分: 14 分 (1996 年), 最低分: 0 分 (2 次);
 (4) 最近两年: 1999 年 8 分, 2000 年 9 分。



题型分布

填空 8 题, 选择 13 题, 计算 7 题, 合计 28 题。



逐题寻根

紧扣同济四版《高等数学》(上册), 追根溯源。

1. (1987, 选择, 3 分) P12 函数的奇偶性。
 2. (1987, 选择, 3 分) P10 有界性, P52 无穷大。
 3. (1987, 填空, 2 分) P69 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的变型:

$$\lim_{f(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e.$$

4. (1988, 计算, 5 分) P25 复合函数的定义域。
 5. (1988, 填空, 4 分) P76 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续
 $\Leftrightarrow f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0)$
 6. (1989, 填空, 3 分) P76 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续 $\Leftrightarrow$
 $f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0)$, P65 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的变型:

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$$

7. (1990, 填空, 3 分) P25 复合函数。
 8. (1990, 选择, 3 分) P62 顺数第 3 行:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m \\ 0, & \text{当 } n>m \\ \infty, & \text{当 } n<m \end{cases}$$

9. (1990, 计算, 5 分) P69 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的变型:

$$\lim_{f(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

10. (1992, 选择, 3 分) P25 复合函数。

11. (1992, 选择, 3 分) P78 间断点。

12. (1992, 计算, 5 分) P69 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的变型:

$$\lim_{f(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

13. (1993, 选择, 3 分) P55 习题 1~5, 第 7 题的思路。

14. (1995, 选择, 3 分) P78 间断点。

15. (1995, 填空, 3 分) P64 两边夹法则。

16. (1996, 计算, 8 分) P13 反函数, P78 间断点。P97 导数的定义。

17. (1996, 填空, 3 分) P167 洛必达法则。

18. (1996, 选择, 3 分) P88 定理 3(零点定理)。

19. (1997, 选择, 3 分) P25 复合函数。

20. (1997, 计算, 5 分) P61 例 6 的思路。

21. (1998, 填空, 3 分) P167 洛必达法则。

22. (1998, 计算, 5 分) P78 间断点。

23. (1998, 选择, 3 分) P50 无穷小, P57 定理 4。

24. (1999, 选择, 3 分) P37 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义。

25. (1999, 计算, 5 分) P167 洛必达法则。

26. (2000, 填空, 3 分) P167 洛必达法则。

27. (2000, 选择, 3 分) P77 函数在区间连续。

28. (2000, 选择, 3 分) P167 洛必达法则。P57 极限的加减法。

请读者在教材内的对应部分涂上醒目的标识, 以便把考研真题与通用教材紧密相连, 减少考前复习的盲目性。



要点概括

(1) P25 函数的复合, 考过 4 次, P78 间断点, 考过 4 次。P69 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的变型 $\lim_{f(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$ 考过 3 次。P167 洛必达法则, 考过 5 次。上述这几点, 复习时务必高度重视。

(2) P76 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续 $\Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$ 考过 2 次, P52~P65 要读通, 这几页书有 7 处被考到。

(3) 本部分所占的分数是相对有限的, 临近考试时, 不宜再投入过多的时间和精力。

1.2 本部分 1987 年~2000 年考研真题

1. (1987, 选择, 3 分) $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$, $(-\infty < x < +\infty)$ 是() 函数。

A. 有界 B. 单调 C. 周期 D. 偶

2. (1987, 选择, 3 分) 函数 $f(x) = x \sin x$ ()。

A. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界 B. 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大
C. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界 D. 当 $x \rightarrow \infty$ 时有极限

3. (1987, 填空, 2 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n =$ ()。

4. (1988, 计算, 5 分) 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1-x$ 且 $\varphi(x)$

≥ 0 , 求 $\varphi(x)$ 及其定义域。

5. (1988, 填空, 4 分) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x+a & x \leq 0 \\ e^x(\sin x + \cos x) & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $a = (\quad)$ 。

6. (1989, 填空, 3 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} a+bx^2 & x \leq 0 \\ \frac{\sin bx}{x} & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 a, b 应满足 $(\quad)$ 关系。

7. (1990, 填空, 3 分) 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f[f(x)] = (\quad)$ 。

8. (1990, 选择, 3 分) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 则 a, b 值为 $(\quad)$ 。

A. 1, 1 B. -1, 1 C. 1, -1 D. -1, -1

9. (1990, 计算, 5 分) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$, 求 a 。

10. (1992, 选择, 3 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x^2+x & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(-x) = (\quad)$ 。

A. $\begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ -(x^2+x) & x > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} -(x^2+x) & x < 0 \\ -x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x^2-x & x > 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x^2-x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

11. (1992, 选择, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = (\quad)$ 。

A. 2 B. 0 C. ∞ D. 不存在但不为 ∞

12. (1992, 计算, 5 分) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}}$

13. (1993, 选择, 3 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 为()。

- A. 无穷小 B. 无穷大
C. 有界的, 但不是无穷小 D. 无界的, 但不是无穷大

14. (1995, 选择, 3 分) 设 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 连续且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则()成立。

- A. $\varphi[f(x)]$ 必有间断点 B. $\varphi^2(x)$ 必有间断点
C. $f[\varphi(x)]$ 必有间断点 D. $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

15. (1995, 填空, 3 分)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) = (\quad)。$$

$$16. (1996, \text{计算}, 8 \text{ 分}) \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 1-2x^2 & x < -1 \\ x^3 & -1 \leq x \leq 2 \\ 12x-16 & x > 2 \end{cases}$$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式; (2) $g(x)$ 是否有间断点, 不可导点, 若有, 指出这些点。

17. (1996, 填空, 3 分)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sin \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) - \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = (\quad)。$$

18. (1996, 选择, 3 分) 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有()个实根。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 无穷多

$$19. (1997, \text{选择}, 3 \text{ 分}) \text{ 设 } g(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 0 \\ 2+x & x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases} \text{ 则 } g[f(x)] = (\quad)。$$

$$A. \begin{cases} 2+x^2 & x < 0 \\ 2-x & x \geq 0 \end{cases} \quad B. \begin{cases} 2-x^2 & x < 0 \\ 2+x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} 2-x^2 & x < 0 \\ 2-x & x \geq 0 \end{cases} \quad D. \begin{cases} 2+x^2 & x < 0 \\ 2+x & x \geq 0 \end{cases}$$

20. (1997, 计算, 5 分) 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

21. (1998, 填空, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = (\quad)$ 。

22. (1998, 计算, 5 分) 求函数 $f(x) = (1+x)^{\tan(\frac{x}{x-\frac{\pi}{4}})}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的间断点, 并判断其类型。

23. (1998, 选择, 3 分) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow 0} x_n y_n = 0$, 则 () 正确。

- A. x_n 发散, y_n 必发散 B. x_n 无界, y_n 必有界
C. x_n 有界, y_n 必为无穷小 D. $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, y_n 必为无穷小

24. (1999, 选择, 3 分) “对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 ()。

- A. 充分条件但非必要条件 B. 必要条件但非充分条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分条件又非必要条件

25. (1999, 计算, 5 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$

26. (2000, 填空, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} = (\quad)$ 。

27. (2000, 选择, 3 分) 设函数 $f(x) = \frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 满足 ()。

- A. $a < 0, b < 0$ B. $a > 0, b > 0$
C. $a \leq 0, b > 0$ D. $a \geq 0, b < 0$

28. (2000, 选择, 3 分) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x + x f(x)}{x^3} \right) = 0$,