# 信号与系统
# 习题及精解

王宝祥　胡航　编

自学·复习·考研

哈尔滨工业大学出版社

## 内容简介

本书共十一章，第一至四章为信号部分，第五至九章讨论系统分析，第十章为离散傅里叶变换，第十一章讨论系统的状态变量分析。全书选题精解共224题(其中三分之一选自考研试题)，习题170题，书后附有习题答案。

本书可供电子与通信类有关专业的教师和学生使用，亦可供“信号与系统”的学习者作为自学、复习、考研的参考书。


**信号与系统习题及精解**

Xinhao yu Xitong Xiti ji Jingjie

王宝祥　胡　航　编

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

肇东粮食印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/16　印张 18.5　字数 410 千字

2000 年 4 月第 1 版　2000 年 4 月第 2 次印刷

印数 5 001－9 000

ISBN 7-5603-1355-8/TN·43　定价:20.00 元

# 前　　言

本书是高等工科院校电子与通信工程、信息与控制、应用电子技术等专业“信号与系统”课程的辅助教学用书。全书共分十一章，每章开始给出基本计算公式和内容要点，其后为相当数量的选题精解和部分习题，书后给出了习题答案。

解习题仍然是目前检验学生掌握理论知识最常用的方法。学习者常常觉得定理的内容叙述容易理解，而要用于解题甚觉困难。为此，我们将“选题精解”作为本书的主要部分（70%以上），使读者花费较少的时间就能学会对理论多角度的理解和应用。

选题精解共224题，其中38%选自国内43份考研试题，其余为作者主编的“信号与系统习题集”的部分题目和教学过程中积累的例题、思考题等。对每个选题均给出基本解题步骤和结果分析，叙述力求精练，对较难易混的选题，给出多种解法，以相互印证。另有习题170题，书后给出参考答案。

本书由王宝祥、胡航编写，张晔、李绍滨及蒋明等参加部分章节的编写工作，全书由王宝祥主编。在本书编写过程中受到哈尔滨工业大学信息工程教研室许多老师的支持和帮助，本书的编写和出版得到哈尔滨工业大学出版社的大力支持和帮助，编者在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，诚恳地希望读者批评指正。

编　者

1998年6月

# 目　　录

# 第一章　信号分析的理论基础

## 公式及要点

### (一) 正交函数

1.两函数正交条件

两实函数 $f_1(t)$和 $f_2(t)$在区间$(t_1,t_2)$内的正交条件

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{1.1}$$

两复函数 $f_1(t)$和 $f_2(t)$在区间$(t_1,t_2)$的正交条件

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t)f_2(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{1.2}$$

式中 $f_1^*(t)$,$f_2^*(t)$分别是 $f_1(t)$,$f_2(t)$的复共轭函数。

2.完备正交函数集

在区间$(t_1,t_2)$内,用正交函数集 $g_1(t),g_2(t),\cdots,g_n(t)$近似表示函数 $f(t)$,有

$$f(t) \approx \sum_{r=1}^{n} C_r g_r(t) \tag{1.3}$$

其均方误差为

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t) - \sum_{r=1}^{n} C_r g_r(t)\right]^2 \mathrm{d}t \tag{1.4}$$

若当 $n \to \infty$时,$\overline{\varepsilon^2(t)} \to 0$,即

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\varepsilon^2(t)} = 0 \tag{1.5}$$

则称此函数集为完备正交函数集。

常用完备正交函数集

(1)三角函数集:$1,\cos\omega_1 t,\cos 2\omega_1 t,\cdots,\cos n\omega_1 t,\cdots,\sin\omega_1 t,\sin 2\omega_1 t,\cdots,\sin n\omega_1 t,\cdots$

(2)复指数函数集:$e^{jn\omega_1 t}$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

(3)沃尔什函数集:$\mathrm{Wal}(k,t)$

### (二)奇异函数

1.单位阶跃函数

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

2.单位冲激函数

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \\ \delta(t) = 0 \qquad t \neq 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

单位冲激函数与单位阶跃函数的关系

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = u(t) \tag{1.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t) \tag{1.9}$$

单位冲激函数性质

(1)偶函数 $\delta(t)=\delta(-t)$ (1.10)

(2)时间尺度变换 $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$ (1.11)

(3)与连续函数 $f(t)$的乘积 $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ (1.12)

由此可导出 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\delta(t)]=f(0)\delta'(t)$ (1.13)

$t\delta(t)=0$ (1.14)

3.单位冲激偶

$$\delta'(t) = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t} & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

单位冲激偶性质

(1)单位冲激偶的积分等于单位冲激函数

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta'(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.16}$$

(2)$\delta'(t)$具有抽样性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)\mathrm{d}t = -f'(0) \tag{1.17}$$

(3)单位冲激偶的面积等于零

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{1.18}$$

### (三)信号的时域分析与变换

1.任意信号表示为阶跃信号之和

$$f(t) = f(0)u(t) + \int_{0^+}^{t} f'(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}(\tau) \tag{1.19}$$

2.任意信号表示为冲激信号之和

$$f(t) = \int_{0^-}^{t} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.20}$$

3.信号的时域变换

信号的翻转：$f(t)\to f(-t)$

信号的时移：$f(t)\to f(t\pm t_0)$

信号的展缩：$f(t)\to f(at)$

### (四)离散信号表示——序列

1. 单位函数序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

2. 单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

3. 矩形序列

$$G_N(n)=\begin{cases}1 & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & \text{其他 } n\end{cases}$$

以上三序列有如下关系

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)\quad \text{或}\quad u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$G_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

4. 正弦序列

$$f(n)=\sin\omega_0 n$$

值得指出的是①$\omega_0$ 的最大值为 $\pi$,②设 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{a}$,当 $a$ 为无理数时,$f(n)$不是周期序列,而当 $a$ 为有理数时,序列周期 $N$ 为 $a$ 的某个整数倍。

### (五)卷积计算

1. 两函数卷积的解析计算

两连续函数的卷积

$$g(t)=f_1(f)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.21}$$

两离散函数的卷积

$$g(n)=f_1(n)*f_2(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_1(m)f_2(n-m) \tag{1.22}$$

2. 卷积的性质

(1)交换律 $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

(2)分配律 $f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$

(3)结合律 $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

(4)卷积的微分 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}*f_2(t) \tag{1.23}$$

(5)卷积的积分 $\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]\mathrm{d}\lambda=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda=$

$$\int_{-\infty}^{t} f_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda * f_2(t) \tag{1.24}$$

由性质(4),(5)可推论

$$\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t} * \int_{-\infty}^{t} f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda = f_1(t) * f_2(t) \tag{1.25}$$

3. $f(t)$与奇异信号的卷积

(1) $f(t)$与冲激信号卷积

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \tag{1.26a}$$

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \tag{1.26b}$$

(2) $f(t)$与冲激偶的卷积

$$f(t) * \delta'(t) = f'(t) \tag{1.27}$$

(3) $f(t)$与阶跃函数的卷积

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{1.28}$$

类似地

$$f(n) * u(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} f(i) \tag{1.29}$$

根据以上关系推广可得

$$f(t) * \delta^{(k)}(t - t_0) = f^{(k)}(t - t_0) \tag{1.30}$$

式中 $k$ 表示求导或求重积分的次数,当 $k$ 取正整数时表示求导次数,$k$ 取负整数时表示求重积分的次数。

## 选 题 精 解 (11 题)

**1-1 判断下列信号是否是周期性的,如果是周期性的,试确定其周期。**

1. $x(t) = 2\cos(3t + \frac{\pi}{4})$

2. $x(t) = \left[\sin(t - \frac{\pi}{6})\right]^2$

3. $x(t) = [\cos 2\pi t]u(t)$

4. $x(n) = A\cos(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8})$

5. $x(n) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\frac{n}{8} - \pi)}$

6. $x(n) = \cos(\frac{n}{4})\cos(\frac{\pi n}{4})$

**解** 1. 设 $x(t)$为周期信号,周期为 $T$,则有

$$x(t) = x(t + T)$$

$$2\cos(3t + \frac{\pi}{4}) = 2\cos\left[3(t + T) + \frac{\pi}{4}\right]$$

所以 $3T = 2\pi k$ ($k$ 取最小整数)

$$T = \frac{2\pi}{3}$$

即 $x(t)$的周期为$\frac{2\pi}{3}$。

2. $x(t) = \left[\sin(t - \frac{\pi}{6})\right]^2 = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2t - \frac{\pi}{3})\right]$

$x(t)$的周期为 $T=\pi$。

3. $x(t)=[\cos 2\pi t]u(t)$

因为 $t<0$ 时 $x(t)=0$，显然为非周期信号。

4. 设序列 $x(n)$为周期序列，周期为整数 $N$，则有

$$x(n)=x(n+N)$$

$$A\cos(\frac{3\pi}{7}n-\frac{\pi}{8})=A\cos\left[\frac{3\pi}{7}(n+N)-\frac{\pi}{8}\right]$$

应有 $$\frac{3\pi}{7}N=2\pi k \qquad (k\text{ 取最小整数})$$

$$N=\frac{14}{3}k=14 \quad (k\text{ 取为 }3)$$

所以，假设成立，$x(n)$为周期序列，周期为 14。

5. 设 $x(n)$为周期序列，周期为整数 $N$，则有

$$e^{j(\frac{n}{8}-\pi)}=e^{j[\frac{1}{8}(n+N)-\pi]}$$

应有 $$\frac{N}{8}=2\pi k \qquad (k\text{ 取最小整数})$$

$$N=16\pi k$$

因为 $\pi$ 是一个无理数，所以任何整数 $k$ 都不能满足上式，故假设不成立，$x(n)$为非周期序列。

6. 设 $x(n)$为周期序列，周期为整数 $N$，则有

$$\cos(\frac{n}{4})\cos(\frac{\pi n}{4})=\cos[\frac{1}{4}(n+N)]\cos[\frac{\pi}{4}(n+N)]$$

应有 $$\frac{N}{4}=2\pi k \quad \text{及} \quad \frac{\pi}{4}N=2\pi k \quad (k\text{ 为整数})$$

即 $$N=8\pi k \quad \text{及} \quad N=8k$$

由于前式不能成立，即 $\cos\frac{n}{4}$为非周期序列，所以 $x(n)$为非周期序列。

1-2 函数集 $1,x,x^2,x^3$ 是否是区间(0,1)的正交函数集。

**解** 根据两函数的正交条件

$$\int_0^1 g_i(x)g_j(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^i x^j\mathrm{d}x=\frac{1}{i+j+1}\neq 0 \qquad i\neq j$$

所以，此函数集在(0,1)上不满足正交条件，故不是正交函数集。

1-3 函数集 $\cos t,\cos 2t,\cdots,\cos nt$（$n$ 为整数）是否是在区间$(0,\frac{\pi}{2})$中的正交函数集。

**解** 两函数正交条件

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_i(t)g_j(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos it\cos jt\,\mathrm{d}t=$$

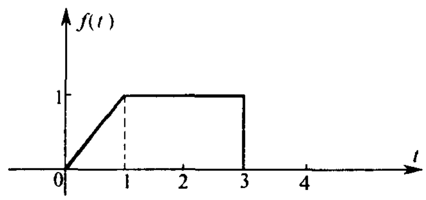
$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\frac{i+j}{2}\pi)}{i+j}+\frac{\sin(\frac{i-j}{2}\pi)}{i-j}\right] \qquad (i\neq j)$$

由上式可知，只有 $i,j$ 同时为偶数或奇数，上式为零，否则上式不为零，故此函数集在

(0,1)内不满足正交条件,不是正交函数集。

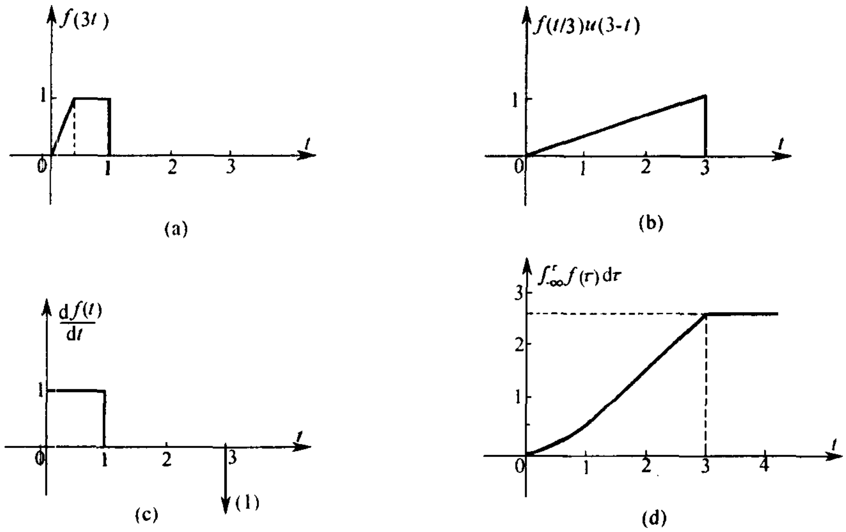
1-4 已知 $f(t)$的波形如图选 1-4.1 所示,试画出下列函数的波形图。

1. $f(3t)$
2. $f(t/3)u(3-t)$
3. $\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$
4. $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$



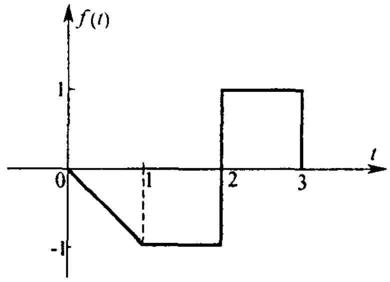

图选 1-4.1

**解** 画信号波形图,应注意标出函数的初值终值及其他关键点的值。




图选 1-4.2

1-5 已知 $f(t)$的波形如图选 1-5.1 所示,试画出 $g_1(t)=f(2-t)$和 $g_2(t)=f(-2t-3)$的波形图。




图选 1-5.1

**解** 画 $g_1(t)$波形,需要先后进行平移和翻转,可有下面两种次序。

①$f(t)\xrightarrow{\text{翻转}}f(-t)\xrightarrow{\text{右移}}f[-(t-2)]=f(2-t)=g_1(t)$

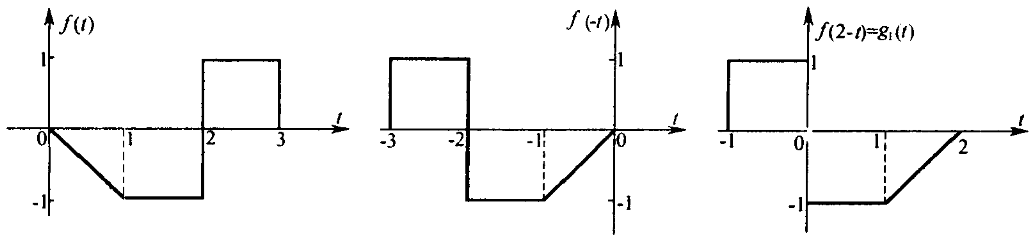
②$f(t)\xrightarrow{\text{左移}}f(t+2)\xrightarrow{\text{翻转}}f(2-t)=g_1(t)$

画 $g_2(t)$的波形,要先后进行平移、翻转和压缩,可按多种次序进行。

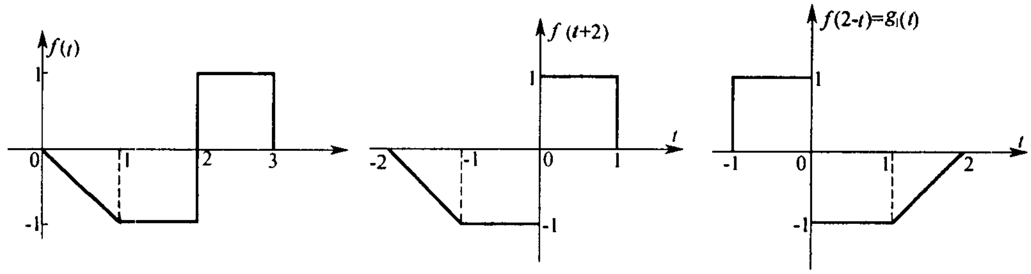
① $f(t)\xrightarrow{\text{压缩}}f(2t)\xrightarrow{\text{右移}}f\left[2\left(t-\dfrac{3}{2}\right)\right]=f(2t-3)\xrightarrow{\text{翻转}}f(-2t-3)=g_2(t)$

② $f(t)\xrightarrow{\text{翻转}}f(-t)\xrightarrow{\text{左移}}f[-(t+3)]=f(-t-3)\xrightarrow{\text{压缩}}f(-2t-3)=g_2(t)$

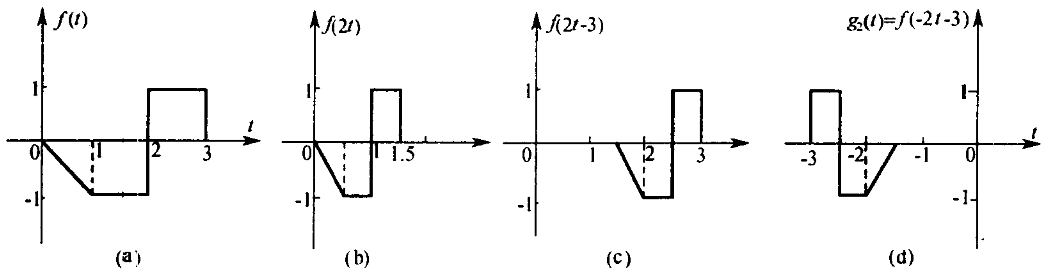
③ $f(t)\xrightarrow{\text{右移}}f(t-3)\xrightarrow{\text{压缩}}f(2t-3)\xrightarrow{\text{翻转}}f(-2t-3)=g_2(t)$



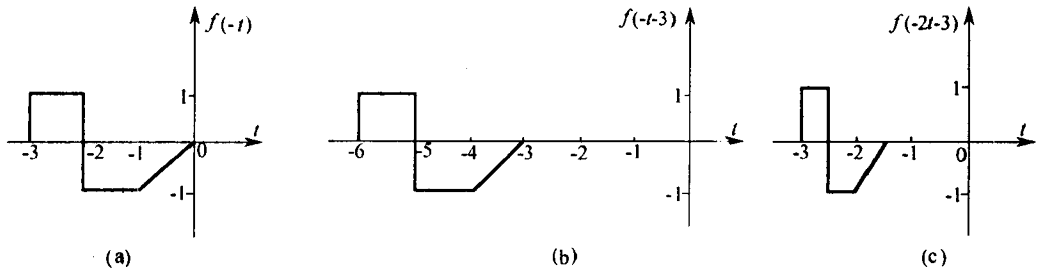

图选 1-5.2



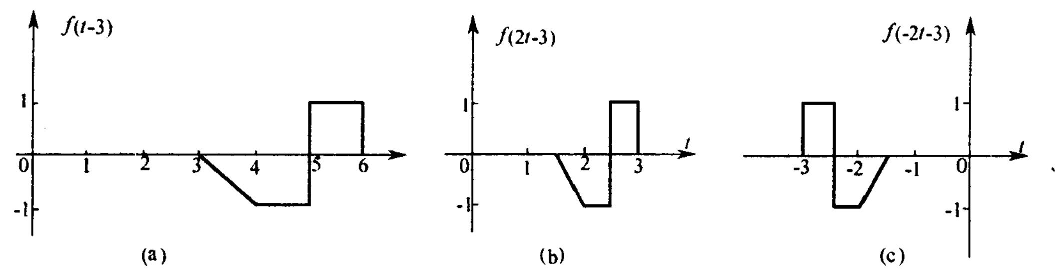

图选 1-5.3




图选 1-5.4




图选 1-5.5




图选 1-5.6

1-6 计算下列积分

1. $\int_{0}^{\infty}\delta(t-2)\cos[\omega(t-3)]\mathrm{d}t$

2. $\int_{0}^{\infty}\delta(t+3)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

3. $\int_{0^-}^{\infty}\mathrm{e}^{-2t}\delta(\lambda-t)\mathrm{d}t$

4. $\int_{0^-}^{\infty}\delta'(t)\frac{\sin 10t}{10t}\mathrm{d}t$

**解** 1. 原式 $=\cos[\omega(2-3)]=\cos\omega$

2. 原式 $=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}\int_{0}^{\infty}\delta(t+3)\mathrm{d}t=0$

3. 原式 $=\mathrm{e}^{-2\lambda}\int_{0}^{\infty}\delta(\lambda-t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2\lambda} & \lambda\geqslant 0\\ 0 & \lambda<0\end{cases}$

4. 原式 $=\frac{\sin 10t}{10t}\delta(t)\Big|_{0^-}^{\infty}-\int_{0^-}^{\infty}\delta(t)\left[\frac{\sin 10t}{10t}\right]'\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\sin 10t}{10t}\right]\Big|_{t=0}=$

$-\frac{10t\cos 10t-\sin 10t}{10t^2}\Big|_{t=0}=5\sin 10t+50t\cos 10t\,|_{t=0}=0$

1-7 化简下列各式

1. $\int_{-\infty}^{t}\delta(2\tau-1)\mathrm{d}\tau$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cos(t+\frac{\pi}{4})\delta(t)\right]$

3. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos t\cdot\delta(t)]\cdot\sin t\,\mathrm{d}t$

**解** 1. 原式 $=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2}\delta(\tau-\frac{1}{2})\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}u(t-\frac{1}{2})$

2. 原式 $=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cos\frac{\pi}{4}\delta(t)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\delta'(t)$

3. 原式 $=\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\sin t\,\mathrm{d}t=-\sin' t\,|_{t=0}=-\cos t\,|_{t=0}=-1$

1-8 计算下列卷积

1. $t[u(t)-u(t-2)]*\delta(1-t)$

2. $[(1-3t)\delta'(t)]*\mathrm{e}^{-3t}u(t)$

**解** 1. 原式 $=t[u(t)-u(t-2)]*\delta(t-1)=(t-1)[u(t-1)-u(t-3)]$

2. 原式 $=\delta'(t)*\mathrm{e}^{-3t}u(t)-3t\delta'(t)*\mathrm{e}^{-3t}u(t)=$

$[\mathrm{e}^{-3t}u(t)]'-3[(t\delta(t))'-\delta(t)]*\mathrm{e}^{-3t}u(t)=$

$-3\mathrm{e}^{-3t}u(t)+\delta(t)+3\mathrm{e}^{-3t}u(t)=\delta(t)$

1-9 已知函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 如图选 1-9 所示，试计算卷积积分 $f_1(t)*f_2(t)$。

**解** (a) $f_1(t)=1+u(t-1)$

$f_2(t)=\mathrm{e}^{-(t+1)}u(t+1)$

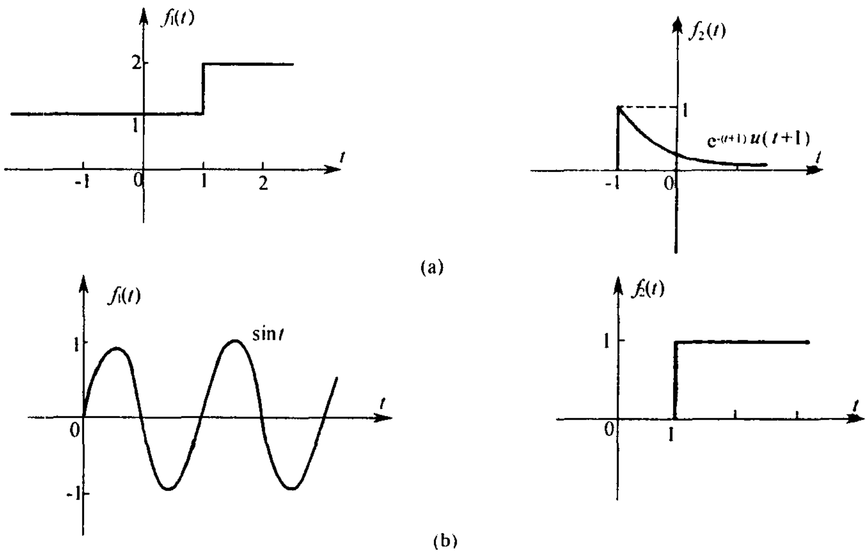
$f_1(t)*f_2(t)=[1+u(t-1)]*\mathrm{e}^{-(t+1)}u(t+1)=$

$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\tau+1)}u(\tau+1)\mathrm{d}\tau+\int_{-\infty}^{\infty}u(t-\tau-1)\mathrm{e}^{-(\tau+1)}u(\tau+1)\mathrm{d}\tau=$

$\int_{-1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\tau+1)}\mathrm{d}\tau+\int_{-1}^{t-1}\mathrm{e}^{-(\tau+1)}\mathrm{d}\tau=1+(1-\mathrm{e}^{-t})u(t)=\begin{cases}1 & t<0\\ 2-\mathrm{e}^{-t} & t\geqslant 0\end{cases}$

(b) $f_1(t)=\sin t\,u(t)$

$f_2(t)=u(t-1)$

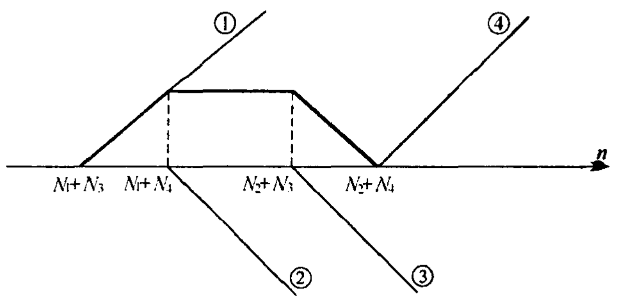



图选 1-9

$$f_1(t)*f_2(t)=\sin t u(t)*u(t-1)=\int_{-\infty}^{\infty}\sin\tau u(\tau)u(t-\tau-1)\mathrm{d}\tau=$$

$$\left[\int_0^{t-1}\sin\tau\mathrm{d}\tau\right]u(t-1)=[1-\cos(t-1)]u(t-1)$$

1-10 已知序列 $x_1(n)$在 $N_1\leqslant n\leqslant N_2$ 之外皆为零,序列 $x_2(n)$在 $N_3\leqslant n\leqslant N_4$ 之外皆为零,那么此二序列的卷积 $y(n)$在 $N_5\leqslant n\leqslant N_6$ 之外皆为零,试以 $N_1,N_2,N_3$ 和 $N_4$ 表示 $N_5$ 和 $N_6$。




图选 1-10

**解** 设$x_1(n)=u(n-N_1)-u(n-N_2)$

$x_2(n)=u(n-N_3)-u(n-N_4)$

则 $x_1(n)*x_2(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}[u(m-N_1)-u(m-N_2)]$

$[u(n-m-N_3)-u(n-m-N_4)]=$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}u(m-N_1)u(n-m-N_3)-\sum_{m=-\infty}^{\infty}u(m-N_1)u(n-m-N_4)$$

$$-\sum_{m=-\infty}^{\infty}u(m-N_2)u(n-m-N_3)+\sum_{m=-\infty}^{\infty}u(m-N_2)u(n-m-N_4)=$$

$$\sum_{m=N_1}^{n-N_3} - \sum_{m=N_1}^{n-N_4} - \sum_{m=N_2}^{n-N_3} + \sum_{m=N_2}^{n-N_4} =$$

$$(n-N_3-N_1)u(n-N_1-N_3)-(n-N_4-N_1)u(n-N_4-N_1)$$
$$-(n-N_3-N_2)u(n-N_3-N_2)+(n-N_4-N_2)u(n-N_4-N_2)$$

若用曲线图表示卷积结果，则如图选 1-10 所示。图中有四条直线表示卷积结果中的四项，粗线表示四线相加的卷积结果。可见卷积结果以 $N_1+N_3$ 和 $N_2+N_4$ 为两边界，所以

$$N_5 = N_1 + N_3$$
$$N_6 = N_2 + N_4$$

实际此结论可以推广到连续函数的卷积。即两函数卷积的左边界等于两函数左边界之和，右边界等于两函数右边界之和。

1-11 计算下列各式之值

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \quad |a|<1$
2. $\sum_{n=k}^{\infty} a^n \quad |a|<1$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} na^n$
4. $\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n$

**解** 1. 此式为等比级数之和，故有

原式 $= \dfrac{1}{1-a}$

2. $\sum_{n=k}^{\infty} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n - \sum_{n=0}^{k-1} a^n = \dfrac{1}{1-a} - \dfrac{1-a^k}{1-a} = \dfrac{a^k}{1-a}$

3. 由题 1 知 $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$

因为 $\dfrac{d}{da}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right] = \dfrac{d}{da}\left[\dfrac{1}{1-a}\right] = \dfrac{1}{(1-a)^2}$

又 $\dfrac{d}{da}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} na^{n-1} = \dfrac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} na^n$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \dfrac{a}{(1-a)^2}$

## 习　　题（8 题）

1-1 判断下列离散时间序列是否是周期信号；若是周期信号，试确定其周期。

1. $f(n) = A\sin(\frac{3}{4}n + \frac{\pi}{4})$
2. $f(n) = A\cos(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{7})$
3. $f(n) = A\sin\frac{\pi}{5}n + B\cos\frac{\pi}{3}n$
4. $f(n) = A\sin\frac{1}{6}n + B\cos\frac{\pi}{3}n$

1-2 试画出下列各信号的波形。

1. $f_1(t) = \dfrac{d}{dt}[e^{-2t}\delta(t)]$
2. $f_2(t) = \int_{-\infty}^{t} 2\delta(-2\tau)d\tau$

3. $f_3(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-3t}u(t)]$　　4. $f_4(t)=u(t^2-16)$

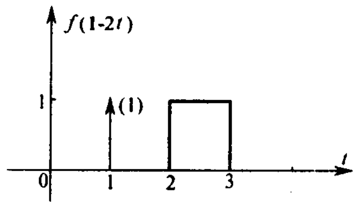
5. $f_5(t)=\mathrm{sgn}[\cos 2\pi t\cdot u(t)]$

1-3 求下列函数的微分和积分。

1. $f_1(t)=\delta(t)\cos t$　　2. $f_2(t)=u(t)\cos t$

3. $f_3(t)=\mathrm{e}^{-t}\delta(t)$

1-4 已知函数 $f(1-2t)$ 如图习 1-4 所示，试画出 $f(t)$ 的波形，并写出 $f(t)$ 的表达式。




图习 1-4

1-5 计算下列积分。

1. $\int_{0^-}^{7}\mathrm{e}^{-2t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-3k)\mathrm{d}t$

2. $\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\mathrm{e}^{-t}[\delta(t+1)+\delta(t-1)]\mathrm{d}t$

3. $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-at^2}\frac{\mathrm{d}^2\delta(t-3)}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t$

4. $\int_{-\infty}^{\infty}t^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\delta(2t-k)\mathrm{d}t$

1-6 试计算下列函数的卷积积分 $f_1(t)*f_2(t)$。

1. $f_1(t)=f_2(t)=u(t)$

2. $f_1(t)=u(t)$　　$f_2(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$

3. $f_1(t)=\delta(t+1)-\delta(t-1)$

$f_2(t)=\cos(\beta t+\frac{\pi}{4})u(t)$

1-7 试判断下列叙述或等式是否正确，并加以验证或说明。

1. $x(n)*[h(n)\cdot g(n)]=[x(n)*h(n)]g(n)$

2. $a^n x(n)*a^n h(n)=a^n[x(n)*h(n)]$

3. 如果 $y(t)=x(t)*h(t)$，则 $y(2t)=2x(2t)*h(2t)$

4. 如果 $y(n)=x(n)*h(n)$，则 $y(2n)=2x(2n)*h(2n)$

5. 如果 $x(t)$ 和 $h(t)$ 是奇函数，则 $y(t)=x(t)*h(t)$ 是偶函数。

1-8 设 $x(n)$ 是一离散信号，且 $y_1(n)=x(2n)$，$y_2(n)=x(\frac{n}{2})$，试判断下面各说法是否正确。如果正确，试确定两信号基波周期之间的关系。如果不正确，可举例说明。

1. 如果 $x(n)$ 是周期的，则 $y_1(n)$ 也是周期的。

2. 如果 $y_1(n)$ 是周期的，则 $x(n)$ 也是周期的。

3. 如果 $x(n)$ 是周期的，则 $y_2(n)$ 也是周期的。

4. 如果 $y_2(n)$ 是周期的，则 $x(n)$ 也是周期的。

# 第二章　傅里叶变换

## 公式及要点

### (一)周期信号的傅里叶级数计算

任何周期为 $T$ 的周期信号 $f(t)$,若满足狄利克雷(Drichlet)条件,可展为傅里叶级数。

1. 三角形式的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \tag{2.1}$$

其中　$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$,$a_0$,$a_n$,$b_n$ 为相关系数。

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t$$

亦可写成

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \tag{2.2}$$

或

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n) \tag{2.3}$$

其中　$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$　$\varphi_n = -\arctan\frac{b_n}{a_n}$,$Q_n = \frac{\pi}{2} + \varphi_n$

$a_n = A_n \cos\varphi_n$　　$b_n = -A_n \sin\varphi_n$

$A_n$,$a_n$ 为频率的偶函数;$\varphi_n$,$b_n$ 为频率的奇函数。

2. 指数形式的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t}\mathrm{d}t \tag{2.4}$$

其中

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_1 t}\mathrm{d}t \tag{2.5}$$

与三角形式的傅里叶级数比较,其相关系数存在如下关系