成人高考专升本应试丛书

曹承宾 编著

依据2000年教育部颁布的考试大纲编写

自学首选 考试必备

高等数学

chengren gaokao zhuanshengben yingshi congshu

（一）

首都师范大学出版社

出 版 说 明

全国各类成人高等学校统一招生考试，从2001年起将启用新大纲作为命题依据．与原大纲相比，新大纲在考试科目及各科考核知识点的范围上，都做了较大调整．对广大应考者来说，迫切必备的第一要件，就是要有一套完全符合新大纲规范的复习资料．我社组织编写的这套成人高考专升本应试丛书，就是为了满足准备参加2001年全国各类成人高校统一招生考试专升本的读者的紧迫需要．全套丛书共有八册，即《政治》、《高等数学》（一）、《高等数学》（二）、《英语》、《大学语文》、《艺术概论》、《教育理论》、《民法》．北京大学、中国人民大学 、首都师范大学、北京建筑工程学院、北京教育学院等一些多年从事成人教育教学辅导、经验丰富的教授、专家参与了编写这套考试辅导书．

丛书各册都是由新大纲指导编写的．

一、本丛书系统全面地涵盖了新大纲考核知识点的范围，读者不会因为有漏纲现象而失分．

二、丛书的作者们注意到成人高考专升本应考者的时间宝贵．将考核知识点的内容做了简约化处理，舍去了不必要的赘言．丛书的内容实打实的，没有“水分”可挤了．

三、丛书的体例及知识点的表述，为求便于应考者记忆．又不止于此．作者们都是各学科的专家，对各自学科领域的知识驾轻就熟．他们力图为读者提供把握各科知识要点的纲领．

四、本丛书还按新大纲关于考试题型的要求，对重点题型和解题方法做了导引性的分析，旨在帮助读者从试题的角度复习考核知识点．

五、最后本书附三套模拟试卷及答案，以便考生掌握试卷结构和评分标准，搞好复习．

我们相信，按这套丛书的复习思路和方法备考2001年的成人高考专科升本科考试，通过考试是没有什么问题的．

2000年9月

编 者 的 话

本书按考试大纲要求共七章，每章第一部分列举考试纲要，然后分节讲述．每节分为：知识内容提要；例题分析；答疑解惑；练习与答案四部分．

知识内容部分，遵循考试大纲要求．有针对性地总结了有关的定义．重要定理和公式；阐述简明．例题分析部分精选了代表性较强的例题．力求突出数学思想的培养．答疑解惑部分针对较难理解或容易混淆的概念和方法提出设问，并给出详尽回答．练习部分包括主、客观题型和难易结合的习题．

由于是应试丛书之一，在不失高等数学的科学性和系统性的前提下，略去了大量定理的证明．

由于编者水平有限，本书会有缺点和错误，请读者批评，指正．

编 者

2000 年 9 月

目　　录

第一章　函数、极限、连续

考试纲要

一、函　　数

(一)知识范围

(1)函数的概念:函数的定义,函数的表示法,分段函数.

(2)函数的简单性质:单调性,奇偶性,有界性,周期性.

(3)反函数:反函数的定义,反函数的图象.

(4)函数的四则运算与复合运算.

(5)基本初等函数:幂函数,指数函数,对数函数,三角函数,反三角函数.

(6)初等函数.

(二)要求

(1)理解函数的概念.会求函数的定义域、表达式及函数值.会求分段函数的定义域、函数值,并会作出简单的分段函数的图象.

(2)理解和掌握函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性,会判断所给函数的类别.

(3)了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图象),会求单调函数的反函数.

(4)理解和掌握函数的四则运算与复合运算,熟练掌握复合函数的复合过程.

(5)掌握基本初等函数的简单性质及其图象.

(6)了解初等函数的概念.

(7)会建立简单实际问题的函数关系.

二、极　　限

(一)知识范围

(1)数列极限的概念:数列,数列极限的定义.

(2)数列极限的性质:唯一性,有界性,四则运算定理,两面夹定理,单调有界数列极限存在定理.

(3)函数极限的概念:函数在一点处极限的定义,左、右极限及其与极限的关系;x 趋于无穷($x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$)时函数的极限.函数极限的几何意义.

(4)函数极限的定理:唯一性定理,两面夹定理,四则运算定理.

(5)无穷小量和无穷大量:无穷小量与无穷大量的定义,无穷小量与无穷大量的关系,无穷小量与无穷大量的性质,两个无穷小量阶的比较.

(6)两个重要极限:$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

(二)要求

(1)理解极限概念(对极限定义中"$\varepsilon—N$","$\varepsilon—\delta$","$\varepsilon—M$"等形式的描述不作要求),能根据极限概念分析函数的变化趋势.会求函数在一点处的左极限与右极限,了解函数在一点处的极限存在的充分必要条件.

(2)了解极限的有关性质,掌握极限的四则运算法则.

(3)理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系. 会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等价). 会运用等价无穷小量代换求极限.

(4)熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

三、连　　续

(一)知识范围

(1)函数连续的概念:函数在一点连续的定义,左连续与右连续,函数在一点连续的充分必要条件,函数的间断点及其分类.

(2)函数在一点处连续的性质:连续函数的四则运算,复合函数的连续性,反函数的连续性.

(3)闭区间上连续函数的性质:有界性定理,最大值与最小值定理,介值定理(包括零点定理).

(4)初等函数的连续性.

(二)要求

(1)理解函数在一点连续与间断的概念,掌握判断简单函数(含分段函数)在一点的连续性,理解函数在一点连续与极限存在的关系.

(2)会求函数的间断点及确定其类型.

(3)掌握在闭区间上连续函数的性质,会运用介值定理推证一些简单命题.

(4)理解初等函数在其定义区间上的连续性,并会利用连续性求极限.

§1. 函　　数

一、知识内容提要

(一)预备知识

1. 区间及其表示法

设 a、b 是实数($a<b$),将满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合$\{x|a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$简记为$(a,b)$称$(a,b)$为开区间. 开区间$(a,b)$确定数轴 Ox 上不包含端点 a 与 b 的开线段(见图 1-1).

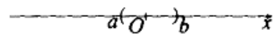

图 1-1

类似的可定义半开区间$[a,b)$、$(a,b]$;闭区间$[a,b]$;$[a,+\infty)$、$(-\infty,b]$;$(a,+\infty)$,$(-\infty,b)$;$(-\infty,+\infty)$等. 简言之,开区间不含端点,在端点处用"("、")"表示;闭区间包含端点,在端点处用"["、"]"表示.

如:满足$-\infty<x\leqslant5$ 的实数集合表为$(-\infty,5]$. $x\in[-3,2)$的含义是:x 是-3 与 2 之

间的实数值，x 可取 -3 但不能取 2.

2. 绝对值及其性质

〈**定义**〉 $|a|=\begin{cases} a, a\geqslant 0 \\ -a, a<0. \end{cases}$ $\qquad |a|=\sqrt{a^2}\geqslant 0$

〈**性质**〉$|ab|=|a||b|$

$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$

$|a+b|\leqslant|a|+|b|$

$|a-b|\geqslant|a|-|b|$

若 $|a|\leqslant b$，则 $-b\leqslant a\leqslant b \qquad (b\geqslant 0)$

若 $|a|\geqslant b$，则 $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant -b \qquad (b\geqslant 0)$

3. 邻域

满足 $|x-a|<\delta$ 的 x 的集合称为点 a 的邻域. 其中 δ 为任意小的正数. 点 a 的邻域记为 $\mathrm{U}(a,\delta)$，即 $\mathrm{U}(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$. 称 a 为邻域的中心，δ 为邻域的半径. 点 a 的邻域亦是开区间

$$(a-\delta, a+\delta).$$

类似地，称 $\mathrm{U}(\hat{x},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 为点 a 的空心邻域. 点 a 的空心邻域用区间可表为

$$(a-\delta, a)(a, a+\delta).$$

(二)函数

1. 函数概念

设 X，Y 为实数集合，若存在一个对应法则 f，对于集合 X 中的一个取定的 x 值，在 f 下总有确定的集合 Y 中的一个 y 值与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的函数，记为

$$y=f(x).$$

其中 X 称为函数的定义域，Y 称为函数的值域，x 叫自变量，y 叫因变量(或函数).

一般可用 $D(f)$ 表示函数定义域，用 $Z(f)$ 表示值域.

函数概念的构成是三内容，两要素

$$\text{三内容}\begin{cases} \left.\begin{array}{l}\text{定义域 } D(f) \\ \text{对应法则 } f\end{array}\right\}\text{两要素} \\ \text{值域 } Z(f)=\{y \mid y=f(x), x\in D(f)\}. \end{cases}$$

两函数恒等的充分必要条件是定义域 D 及对应法则完全相同.

以自变量 x 的取值为点的横坐标，对应函数值 y 为点的纵坐标所确定的点 (x,y) 的集合构成的平面曲线叫做函数 $y=f(x)$ 的图象.

在方程 $y=f(x)$ 中，若 $f(x)$ 是含 x 的运算式，则称 $f(x)$ 为函数 $y=f(x)$ 的解析式. 这时称 y 为 x 的显函数.

给定函数 $y=f(x)$，如果对于 $D(f)$ 的子集合解析式不同，则称为分段函数.

如 $y=f(x)=\text{sign}\, x=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0\end{cases}$ 就是一个分段函数. 它的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$，在 $(0,+\infty)$ 由 $y=1$；在 $x=0$ 处 $y=0$；在 $(-\infty,0)$ 由 $y=-1$. 这个函数称为“符号函数”. 它是一个函数，不是三个函数.

2. 函数的几种简单性质

(1)单调性

〈定义〉 给定函数 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$，对任意 $x_1<x_2\in(a,b)$，若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 单调增，(a,b) 称为 $f(x)$ 的单调增区间；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b)，单调减，(a,b) 称为单调减区间.

若 $f(x)$ 在 $D(f)$ 内只有一种单调性，则称 $f(x)$ 为单调函数.

在单调增区间内 $f(x)$ 的图象是上升曲线弧；在单调减区间内 $f(x)$ 的图象是下降曲线弧.

(2)奇偶性

〈定义〉 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-a,a)$ 有定义，若在 $(-a,a)$ 内任一点 x，$f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若在 $(-a,a)$ 内至少存在某一点 x 使 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

偶函数的图象关于 $0y$ 轴对称；奇函数图象关于坐标原点中心对称；非奇非偶函数图象无关于坐标系的对称性.

(3)有界性

〈定义〉 设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 有定义，对任意 $x\in(a,b)$，如果存在正数 $M>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 有界.

在 (a,b) 有界的函数 $y=f(x)$ 的图象位于两条水平直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 构成的带形域中.

(4)周期性

〈定义〉 设 $y=f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$，若存在常数 A，使得 $f(x+A)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数. 可使 $f(x+A)=f(x)$ 成立的最小正数 A 称为周期. 周期通常记为 T，即 $f(x+T)=f(x)$.

周期函数的图象按自变量 x 取值间隔 T 重复出现.

3. 反函数

〈定义〉 给是函数 $y=f(x)$，定义域为 $D(f)$，值域为 $Z(f)$，如果对于 $Z(f)$ 的一个 y 值总可以通过关系式 $y=f(x)$ 找到 $D(f)$ 中确定的 x 值与之对应，则得到一个定义在 $Z(f)$ 上的以 y 为自变量，以 x 为因变量(函数)的函数，称此为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 为研究的方便将 $x=f^{-1}(y)$ 记为 $y=f^{-1}(x)$. 一般称 $y=f(x)$ 为直接函数，$x=f^{-1}(y)$ 为直接函数 $y=f(x)$ 的原型反函数，$y=f^{-1}(x)$ 为直接函数的反函数(矫型反函数).

$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域和值域的关系是：

$$D(f^{-1})=Z(f);Z(f^{-1})=D(f).$$

$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 轴对称.

4. 复合函数

设有函数 $y=f(u),u\in D(f),u=\varphi(x),x\in D(\varphi)$. 若 $D(f)\supseteq Z(\varphi)$,对于 $D(\varphi)$中的 x 通过 u 都有确定的 y 与之对应,则称 y 通过 u 是 x 的复合函数. 其法则记为 $f\circ\varphi$,即 $y=f\circ\varphi(x)$,简记为 $y=f[\varphi(x)]$. 其中 x 称为自变量,u 称为中间变量,y 称为复合函数.

5. 基本初等函数

基本初等函数是下列五类函数的总称

幂函数 $y=x^{\alpha}$ (α 为任何实数)

指数函数 $y=a^{x}$ ($a>0,a\neq1$)

对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0,a\neq1$)

三角函数$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,$

$y=\sec x,y=\csc x.$

反三角函数$y=\text{arc}\sin x,y=\text{arc}\cos x,y=\text{arc}\tan x,$

$y=\text{arc}\cot x,y=\text{arc}\sec x,y=\text{arc}\csc x.$

(1)幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为任何实数)

当 α 是不同实数时,幂函数的定义域和性质不同. 择要列举以下几种.

1°. 当 α 是正整数或零时,定义域是$(-\infty,+\infty)$. 如 $y=c$(c 是常数)(图象见图 1-2);$y=x,y=x^2$,等(图象见图 1-3).

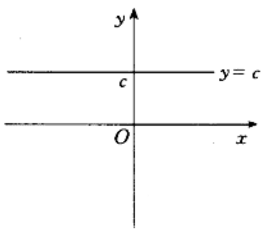

图 1-2

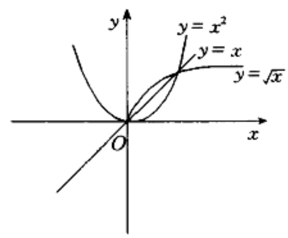

图 1-3

2°. 当 α 是负整数时,定义域是$(-\infty,0)(0,+\infty)$. 如 $y=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$等(图象见图 1-4).

3°. 若 α 是分数$\dfrac{q}{p}$($p\neq0$)时,若$\dfrac{q}{p}>0$,p 为偶数,则定义域为$(0,+\infty)$,如 $y=x^{\frac{1}{2}}$(图 1-3). 若 p 为奇数,定义域为$(-\infty,+\infty)$,如 $y=x^{\frac{2}{3}}$(图 1-5).

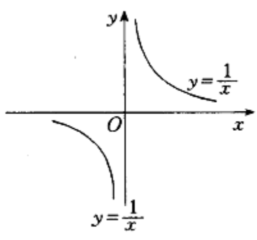

图 1-4

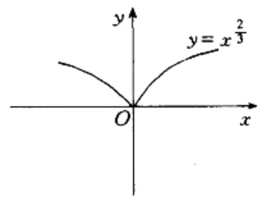

图 1-5

对 $y=x^{\alpha}$,当 α 为偶数时,x^{α} 是偶函数;当 α 是奇数时,x^{α} 是奇函数.

在$(0,+\infty)$,当 $\alpha>0$ 时,$y=x^{\alpha}$ 单调增;当 $\alpha<0$ 时,$y=x^{\alpha}$ 单调减.

一般将多项式函数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 视为幂函数.

(2)指数函数 $y=a^x \quad (a>0,a\neq 1)$

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$．图象均过点$(0,1)$．当$a>1$时，$y=a^x$是单调增函数；$0<a<1$时，$y=a^x$是单调减函数(图 1-6)．

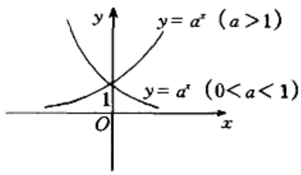

图 1-6

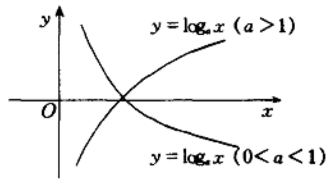

图 1-7

(3)对数函数 $\quad y=\log_a x \qquad (a>0,a\neq 1)$

$y=\log_a x$是$y=a^x$的反函数，定义域是$(0,+\infty)$，值域是$(-\infty,+\infty)$．图象过点$(1,0)$．当$a>1$时是单调增函数；当$0<a<1$时是单调减函数(图 1-7)．

(4)三角函数

正弦函数$y=\sin x$，定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$[-1,1]$．是周期函数，周期$T=2\pi$．是奇函数．是有界函数，即$|\sin x|\leqslant 1$(图 1-8)．在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$单调增．

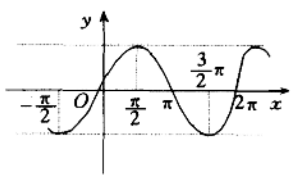

图 1-8

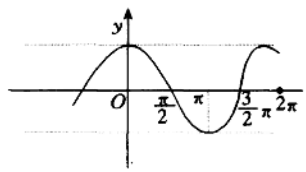

图 1-9

余弦函数$y=\cos x$，定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$[-1,1]$．是周期函数，周期$T=2\pi$．是偶函数．是有界函数，$|\cos x|\leqslant 1$(图 1-9)．在$(0,\pi)$单调减．

正切函数$y=\tan x$，定义域为$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$的实数$x$．是周期函数，$T=\pi$．是奇函数(图 1-10)．在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$单调增．

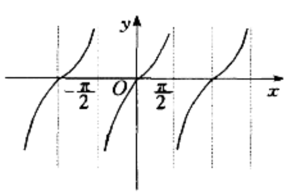

图 1-10

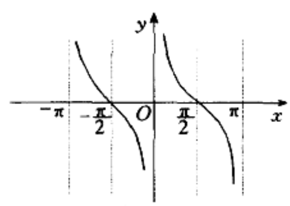

图 1-11

余切函数$y=\cot x$，定义域为$x\neq k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$的实数$x$．是周期函数，$T=\pi$．是奇函数(见图 1-11)．在$(0,\pi)$单调减．

正割函数$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$；余割函数$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$．其定义域与性质可参照$\cos x$，$\sin x$讨论．

(5)反三角函数

由于三角函数是周期函数，对于值域内的每个 y 值，都有无穷多个 x 值与之对应，因此我们在三角函数的单调区间上来建立反三角函数，称为反三角函数的主值.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数. 其定义域为 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. 是单调增函数(图 1-12).

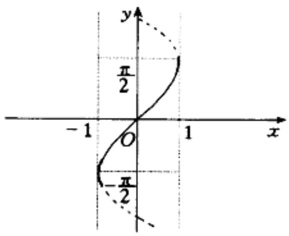

图 1-12

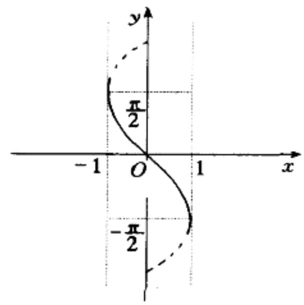

图 1-13

反余弦函数 $y=\arccos x$ 是 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的反函数. 其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$. 是单调减函数(图 1-13).

反正切函数 $y=\arctan x$ 是 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数. 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. 是单调增函数(图 1-14).

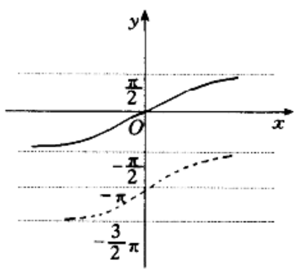

图 1-14

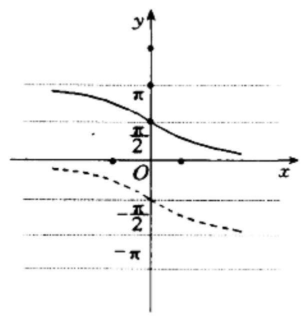

图 1-15

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 是 $y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 的反函数. 其定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$. 是单调函数(图 1-15).

关于 $y=\operatorname{arcsec} x$ 及 $y=\operatorname{arccsc} x$ 一般不再讨论.

6. 初等函数

〈定义〉 基本初等函数经有限次四则运算(加、减、乘、除)和有限次复合所得函数称为初等函数.

如：$y=\ln x+\operatorname{arccot}\sqrt{\frac{a^{3x}}{1-\cos x}}$ 是初等函数.

分段函数不是初等函数.

二、例题分析

[例 1]　函数 $y=\sqrt{(1-x)(4-x^2)}$ 的定义域是__________.

解:依题意,应有

$$(1-x)(4-x^2)\geqslant 0.$$

即 $\begin{cases}1-x\geqslant 0\\4-x^2\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-x\leqslant 0\\4-x^2\leqslant 0,\end{cases}$

$\begin{cases}x\leqslant 1\\x^2\leqslant 4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 1\\x^2\geqslant 4,\end{cases}$

$\begin{cases}x\leqslant 1\\-2\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 1\\x\geqslant 2 \text{ 或 } x\leqslant -2,\end{cases}$

$-2\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 2$,

应填 $D(f)=[-2,1][2,+\infty)$.

当函数解析式已给,求定义域时,按函数定义域概念列举运算法则所要求的不等式(组),不等式组的解给出定义域.

列举不等式的主要原则是:

①x 取值应使分母不为零;

②x 取值应使偶次根式的被开方式非负;

③对数的真数应大于零;

④arc sin x 与 arc cos x 中的 x 应满足 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

[例 2]　单项选择:函数 $y=\sqrt{x^2-25}+\dfrac{1}{\lg(7-x)}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,-5)(5,7)$　　B. $(-\infty,-5)(5,6)(6,7)$

C. $(-\infty,-5)[5,6)(6,7)$　　D. $(-\infty,-5)[5,6)[6,7)$

解:∵ $\begin{cases}x^2-25\geqslant 0\\7-x>0\\7-x\neq 1,\end{cases}\begin{cases}x\geqslant 5 \text{ 或 } x\leqslant -5\\x<7\\x\neq 6,\end{cases}$

∴ $D(f)=\{x|\ \ x\geqslant 5,x<7,x\neq 6 \text{ 或 } x\leqslant -5,x<7,x\neq 6\}$

$=(-\infty,-5)[5,6)(6,7)$.

故应选 C.

[例 3]　设 $f(x)=\lg\ (kx^2-2x+k)$ 的定义域是一切实数,求 k 的取值范围.

解:依题意 $kx^2-2x+k>0$ 对一切实数 x 成立.

所以应满足 $\begin{cases}k>0\\(-2)^2-4k^2<0,\end{cases}\begin{cases}k>0\\1-k^2<0,\end{cases}\begin{cases}k>0\\-k<-1 \text{ 或 } x>1.\end{cases}$

∴ $k>1$.

按函数定义域概念和对数函数概念归结为 $kx^2-2x+k>0$. 记 $y=kx^2-2x+k$,若对一切实数 x 满足 $y>0$ 要求抛物线开口向上且判别式 $\Delta=(-2)^2-4k^2<0$,从而问题进一步归结为由 $\begin{cases}k>0\\(-2)^2-4k^2<0\end{cases}$ 确定 k 的取值范围.

[例 4]　求分段函数.

$$f(x)=\begin{cases}2^x, -1<x<0\\ 2, 0\leqslant x<1\\ x-1 \quad 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

的定义域.

解:$D(f)=(-1,3]$.

分段函数定义域的寻求不同于初等函数求定义域,不须列举不等式组求解,只须按已知逐段审定.

[**例 5**] 设函数 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,则 $f(\cos x)$的定义域是__________.

解:由 $0\leqslant\cos x\leqslant 1$ 知 x 应在 Ⅰ、Ⅳ象限

$$\therefore\quad D(f)=[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}](k=0,\pm1,\cdots).$$

$f(x)$的定义域是$[0,1]$的含义是 $0\leqslant x\leqslant 1$,对 $f(\cos x)$,在法则 f 应有 $0\leqslant\cos x\leqslant 1$,故有如上结果.

[**例 6**] 下列各组中的函数 $f(x)$与 $g(x)$表示同一函数的是( ).

A. $f(x)=x,g(x)=(\sqrt{x})^2$ B. $f(x)=1,g(x)=\frac{x}{x}$

C. $f(x)=x,g(x)=\sqrt[3]{x^3}$ D. $f(x)=1,g(x)=x^0$

解:应选 C. 两函数表示同一函数的充分必要条件是定义域相同且对应法则相同,而对应法则是否相同由值域是否相同体现.

A 中 $D(f)=(-\infty,+\infty),D(g)=[0,+\infty)$,所以不同.

B 中 $D(f)=(-\infty,+\infty),D(g)=(-\infty,0)(0,+\infty)$,所以不同.

D 中 $D(f)=(-\infty,+\infty),D(g)=(-\infty,0)(0,+\infty)$,所以不同. 应注意对 $g(x)=x^0$ 而言 $x\neq 0$,由初等数学知,任何非零实数的零次幂为 1,但零的零次幂无定义.

C 中 $D(f)=(-\infty,+\infty),D(g)=(-\infty,+\infty);Z(f)=(-\infty,+\infty);Z(g)=(-\infty,+\infty)$,所以 $f(x)$与 $g(x)$相同.

[**例 7**] 设 $f(x)=\text{arc}\sin x(\lg x)$,则 $f\left(\frac{1}{10}\right)=$__________.

解:应填$-\frac{\pi}{2}$.

求给定自变量值对应的函数值,只须用自变量值替换函数解析式的 x,然后进行计算.

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{10}\right)&=\text{arc}\sin x\left(\lg\frac{1}{10}\right)\\&=\text{arc}\sin x(-1)=-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

[**例 8**] 设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,求 $f[f(x)]$

解:$f[f(x)]=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$

$$=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}=\frac{2x}{2}=x.$$

[**例 9**] 若 $f(e^x)=x^2-2$,求 $f(x)$.

解:令 $e^x=t$,则 $x=\ln t$,一并代入已知,

从而　　$f(t)=\ln^2 t-2$

即　　$f(x)=\ln^2 x-2.$

已知 $f(e^x)=x^2-2$ 应理解为：在函数 $f(x)$ 的表达式中用 e^x 替换 x 后得 x^2-2，所以应设 $e^x=t$ 反代换来求 $f(x)$.

此例中出现的 e 是一个无理数的记号，e＝2.71828…，称为自然对数的底．它是高等数学中常用的一个常数．

［**例 10**］　设 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1\\0,|x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$________.

解：应填 1.

$f[f(x)]$ 的意义是求在 $f(x)$ 的表达式中用 $f(x)$ 替换 x 的结果，对外层的法则 f 决定的值依赖于内层 $f(x)$ 的值．由已知，无论 x 满足 $|x|\leqslant 1$ 还是满足 $|x|>1$ 都有 $|f(x)|\leqslant 1$，所以 $f[f(x)]=f(0)$ 或 $f[f(x)]=f(1)$，此时都应有 $f[f(x)]=1$.

［**例 11**］　设 $\varphi(x)=\begin{cases}x^2,x\geqslant 0\\x,x<0\end{cases}$，$\psi(x)=\begin{cases}x,x\geqslant 0\\-x^2,x<0\end{cases}$，则当 $x<0$ 时，$\varphi[\psi(x)]=$（　　）

A. $-x$　B. $-x^2$　C. x　D. x^2

解：应选 B.

因为当 $x<0$ 时，$\psi(x)=-x^2$，从而

$$\varphi[\psi(x)]=\varphi(-x^2)$$

又当 $x<0$ 时，$\varphi(x)=x$．用 $-x^2$ 替换 x 得

$$\varphi[\psi(x)]=-x^2.$$

此例与例 10 都是关于分段函数求值问题．分段函数求函数值的要点是按自变量取值正确选择分段函数相应一段的表达式．

［**例 12**］　设 $y=\dfrac{a+x}{b+cx}$（a,b,c 是常数）的反函数是 $y=\dfrac{1+2x}{1+3x}$，则 a,b,c 的值是（　　）.

A. $a=1,b=-2,c=3$　　B. $a=-1,b=2,c=3$

C. $a=-1,b=2,c=-3$　　D. $a=1,b=2,c=-3$

解：应选 D.

由 $y=\dfrac{a+x}{b+cx}$ 解 x，有

$$by+cxy=a+x$$

$$(cy-1)x=a-by$$

$$x=\frac{a-by}{1-cy}$$

即　$y=\dfrac{a-bx}{1-cx}$

再由 $\dfrac{a-bx}{1-cx}=\dfrac{1+2x}{1+3x}$　知：$a=1,b=-2,c=-3$.

此例解答归结为求反函数．一般步骤是：由 $y=f(x)$ 解出 x；在 $x=f^{-1}(y)$ 中交换字母 x 与 y，即得所求 $y=f^{-1}(x)$.

［**例 13**］　下列函数中，为奇函数的是（　　）.

A. $y=\cos^3 x$　　B. $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$　　C. $y=x^2+\sin x$　　D. $y=\ln(x^2+x^4)$