高等学校教学用書

偏微分方程講义

И. Г. 彼得罗夫斯基著

高等教育出版社

高等学校教学用書

偏微分方程講义

И. Г. 彼得罗夫斯基著
段虞榮譯
胡祖熾 蕭树鉄 朱德威校

高等教育出版社

本書是根据苏联国家技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的彼得罗夫斯基（И. Г. Петровский）著“偏微分方程講义”（Лекции об уравнениях С частными производными）1953年第二版（修訂版）譯出的。原書經苏联文化部高等教育署审定为綜合大学教科書。

本書曾获得1951年度斯大林獎金二等獎。

目　录

第二版序言

这一版的准备工作大部分是由奥·阿·奥列尼克（Ольге Арсеньевне Олейник）所规划。特别是她重新写了§§ 23, 28, 42, 43 以及其他各节的某些部分，并且还补充了一些新的習題。我非常感謝奥·阿·奥列尼克所作的这些工作。我也感謝弗·伊·斯米尔諾夫(Смирнов)院士，阿·德·美什克司（Мышкис），奥·阿·拉德热恩斯卡婭(Ладыженская)和列·阿·楚多夫（Чудов）所提出的很多宝貴的意見。

伊·彼得罗夫斯基

1953 年 8 月 2 日

录自第一版的序言

这部講义我曾經在国立莫斯科大学数学力学系对数学專業的学生教过好几遍。在准备出版时我还对它作了一些补充。

在編著本書时，克·斯·庫茲明(Кузьмин)，阿·德·美什克司，茲·雅·薩匹罗(Шапиро)，貝·馬·列維登(Левитан)和姆·伊·維舍克(Вишик)都給了我很大的帮助。克·斯·庫茲明把他听我講課的笔記借給我。茲·雅·薩匹罗对我的帮助特别大：她編輯了原稿，并且写了§§ 22—25的全部和其他各节的某些部分。要是沒有她的帮助，这本書恐怕是迟迟难以付印的。阿·德·美什克司和姆·伊·維舍克校閱了全部原稿，并且作了一系列很有价値的附注。此外，阿·德·美什克司写了§§ 34, 35和§4的一部分。貝·馬·列維登写了§26中的第3段。我衷心地感謝他們。

伊·彼得罗夫斯基

1950年4月9日

第一章　引言　方程的分类

§1. 定义　例子

1. 一个含有 n 个未知函数 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ 的偏微分方程，如果它含有一个 n 阶导数而不含有比 n 阶再高的导数，就叫做一个 n 阶方程。所謂一个偏微分方程組的阶是指其中所有方程的阶的最大数。

如果一个偏微分方程对所有的未知函数及其导数来說都是綫性的，那末我們就把它叫做綫性偏微分方程。如果一个偏微分方程对未知函数的所有最高阶导数来說是綫性的，那末我們就把它叫做拟綫性偏微分方程。例如方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u^2=0$$

对未知函数 u 来說是一个二阶拟綫性方程。方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2u$$

对未知函数 u 来說是一个二阶綫性方程。而方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=u$$

对于函数 u 来說是既非綫性的又非拟綫性的。

所謂一个偏微分方程的解是指这样的一組函数，將它們替代方程中的未知函数后，这个方程对其全体自变数来說成为一个恒等式。同样可以給出方程組的解的定义。

在这門課程中我們主要的將研究含一个未知函数的二阶綫性方程。这样的方程可举例如下：

1) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ "热傳导方程";

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ "波动方程";

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0$ "拉普拉斯方程"。

很多物理問題都归結成偏微分方程，特別是剛才列举的这些方程。

2. 例 1　热傳导方程　假設物体 G 在时刻 t，在点 (x_1, x_2, x_3) 处的溫度由函数 $u(t, x_1, x_2, x_3)$ 所确定。假定函数 $u(t, x_1, x_2, x_3)$ 具有关于变数 x_1, x_2, x_3 的二阶連續导数和关于 t 的(一阶)連續导数。

这个描述热傳播过程的方程的导出是基于下述的定律。

設曲面 S 位于物体 G 内；在曲面 S 上确定一个連續变动的法綫矢 n。那末从时刻 t_1 到 t_2 通过曲面 S 而流向法綫 n 所指向那一面的热量 q 由下式确定：

$$q=-\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_S k(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial n}dS\right\}dt. \tag{1.1}$$

此处 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 是 u 在曲面 S 上一点 (x_1, x_2, x_3) 沿法綫方向 n 的方向导数。

正值函数 $k(x_1, x_2, x_3)$ 称为这个物体在点 (x_1, x_2, x_3) 处的内热傳导系数。花括弧内的积分是展布在曲面 S 上。

公式(1.1)的涵义相当于：在無穷小的时間間隔 dt 内，流过一个無穷小基塊 dS 的热量等于

$$dq=-k(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial n}dS\,dt.$$

通常都把热傳导的物理規律表述成这种形式。

如果基塊 S 位于物体和周圍介質的交界面上，那末有下述的

規律：設 $u(t, x_1, x_2, x_3)$ 仍如以前那样表示在物体 G 内的点 (x_1, x_2, x_3) 处的溫度，而 $u_1(t, x_1, x_2, x_3)$ 表示在物体外任意一点 (x_1, x_2, x_3) 处的溫度。于是从时間 t_1 到 t_2，通过物体边界面上的某一基塊 S 而流入物体的热量，可由下式确定

$$q=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_S k_1(x_1, x_2, x_3)(u_1-u)\,dS\right\}dt, \qquad (1'.1)$$

其中，花括弧内的积分是展布在所考慮的曲面 S 上；函数 u_1 和 u 在曲面 S 上的値分别由它們从物体外面和内面趋向于 S 时的極限来規定。在这种情形下，$k_1(x_1, x_2, x_3)$ 称为这物体对于該介質的外热傳导系数。

考慮在热傳导上是各向同性的物体，即我們假定函数 $k(x_1, x_2, x_3)$ 与曲面 S 上点 (x_1, x_2, x_3) 的法綫方向無关。此外，我們还假定，这个函数关于其全体坐标有連續的一阶导数。

为了导出热傳导方程，我們在物体 G 内划出某一由光滑曲面 S 所圍成的容积 D，研究由时間 t_1 到 t_2 在这个容积内热量的改变。

根据公式(1.1)，通过曲面 S 而流入的热量等于

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_S k(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial n}dS\right\}dt, \qquad (2.1)$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示 u 沿曲面 S 的外法向导数。

另一方面，此同一热量，从时間 t_1 到 t_2，可由容积 D 内溫度的改变来确定。热量的改变等于

$$\iiint_D c(x_1, x_2, x_3)\rho(x_1, x_2, x_3)[u(t_2, x_1, x_2, x_3)-$$
$$-u(t_1, x_1, x_2, x_3)]dx_1dx_2dx_3, \qquad (3.1)$$

其中 $\rho(x_1, x_2, x_3)$ 为物体在点 (x_1, x_2, x_3) 处的密度，而 $c(x_1, x_2, x_3)$

为物体在点(x_1, x_2, x_3)处的比热①，积分展布在区域D上。令(2.1)与(3.1)相等即得：

$$\iiint\limits_D c\rho[u(t_2, x_1, x_2, x_3)-u(t_1, x_1, x_2, x_3)]dx_1\,dx_2\,dx_3=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint\limits_S k(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\right\}dt. \tag{4.1}$$

根据奥斯特洛格拉德斯基公式

$$\iint\limits_S k\frac{\partial u}{\partial n}\,dS=\iiint\limits_D \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

因 $u(t_2, x_1, x_2, x_3)-u(t_1, x_1, x_2, x_3)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt$，所以在等式(4.1)左端的积分可以写成

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint\limits_D c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\right\}dt.$$

这样一来，对于物体G内的任一容积D，下列等式成立：

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_D c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_D \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt=0$$

① 表示物体在一定点P处的物理特性的数值（例如，密度，比热等等）总是被了解为某一極限值。就是説，取以P点为中心，边長趋向于零的一系列立方体，考虑与每一立方体相对应的物理量与該立方体的体积之比，然后考虑当立方体的边長趋向于零时比值的極限。例如，所謂在一点的密度是指以这点为中心的立方体的質量与其体积之比的極限。相仿地，所謂薄片上一点的面密度，就是以該点为中心的正方形的質量与其面积之比的極限。樞軸上一点的綫密度就是以該点为中心的間节的質量与其長度之比的極限。一点的比热，一点的热傳导系数等等都可仿此确定。

或
$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right]dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt=0.$$

因为积分号下的函数是連續的，而容积D和时間間隔(t_1, t_2)都是任意的，所以对于物体G的任一点(x_1, x_2, x_3)和对于任一时刻t，下列等式应成立：

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \tag{5.1}$$

这个方程一般就称为非均匀的各向同性物体的热傳导方程。如果物体是均匀的，那末

$$k(x_1, x_2, x_3)=\text{const.},\quad c(x_1, x_2, x_3)=\text{const.},$$
$$\rho(x_1, x_2, x_3)=\text{const.},$$

而方程(5.1)就变成方程

$$\frac{c\rho}{k}\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \tag{6.1}$$

以t'代$\frac{k}{c\rho}t$，然后再把t'写成t，我們就把这个方程化成下列形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \tag{7.1}$$

方程(5.1)和(7.1)有很多解。为了能从它們的全部解中选出某一个解，就必須加上一些附加条件，这种条件所起的作用与初始条件在常微分方程中所起的作用是一样的。这样的一些附加条件就是通常所謂的边界条件和初始条件；前者給定在空間(x_1, x_2, x_3)的一个区域G的边界上，在这个区域內我們求偏微分方程的解。后者是关于某一时刻的。

在物理上很明显：第一，只要知道物体在某一时刻的溫度和物体在边界上热的狀态，就可以完全确定物体在以后时間的溫度，第

二，热的狀态可能以各种不同的形式表出。如果区域 G 就是整个空間，那末可以証明，在 $t>t_0$ 时，热傳导方程的有界解就由一个初始条件——函数 $u(t, x_1, x_2, x_3)$ 在时刻 $t=t_0$ 的値——所唯一确定。对于一个有界区域 G，例如，我們可以測量出物体每一点在某一时刻 $t=t_0$ 时的初溫，和測出物体边界面上每一点在 $t>t_0$ 时的溫度。事实証明，这些条件已足够唯一地确定一个当 $t>t_0$ 和 $(x_1, x_2, x_3)\in G$ 时的有界解。

如果当 $t>t_0$ 时在边界面上給出 $\frac{\partial u}{\partial n}$——未知函数 u 沿区域 G 的边界面的外法向导数——来代替在边界面上給出 u 的値，我們也可以唯一地确定热傳导方程的解。这样一个数学問題的来源，可以这样看，在任何一段时間間隔 (t_1, t_2) 内，由外部空間通过物体 G 的边界面上的任一基塊 S，流过物体表面上的热量为已知，要研究物体內的溫度。这时已知的热量应該等于自物体表面通过基塊 S 傳到其內部的热量；根据公式(1.1)，它等于

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt,$$

其中 $k>0$ 是在所考虑的边界点处的热傳导系数。

这样一来，知道了区域 G 的边界面上每一基䰟 S 的热傳导規律以后，就可以求出 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在 G 的边界面上的値。特别說来，如果通过边界面上沒有热交換發生，那末在边界面上 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$。

最后，我們可以在 G 的边界面上給出綫性組合

$$k\frac{\partial u}{\partial n}+k_1 u,$$

而以它在 $t\geqslant t_0$ 时的値，作为边界条件，其中 k_1 为从周圍空間傳播到物体 G 的热傳导系数，而 k 为物体內部的热傳导系数。这些系数可以認为是已知的。和这样一个数学問題对应的可以看是这种

情形：在包圍着物体 G 的某一介質的溫度 u_1 为已知，要研究物体 G 內的溫度。在这情形下，通过 G 的边界面上任意一部分的热量，达到平衡，我們根据公式(1.1)，(1′.1)可求出：

1. 在时間間隔 (t_1, t_2) 內从物体周圍傳到物体表面上一基塊 S 的热量等于

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k_1(u_1-u)\,dS\,dt.$$

2. 在同一时間間隔內，从物体表面上一基塊 S 傳到物体內部的热量等于

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS\,dt \qquad (k>0).$$

因为 (t_1, t_2) 和 S 都是任意的，所以应有

$$k_1u+k\frac{\partial u}{\partial n}=k_1u_1.$$

特别当 $u_1\equiv 0$ 时，这个条件就变成了下列条件

$$k\frac{\partial u}{\partial n}+k_1u=0.$$

假定在物体 G 內每一点 (x_1, x_2, x_3) 的溫度保持稳定，即它不随时間的增加而变化。这时有 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$，因而方程(5.1)和(7.1)就分别变为

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=0, \quad \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0. \qquad (8.1)$$

为了确定 $u(x_1, x_2, x_3)$ 現在已經不需要給出任何初始条件。只需給出一个与时間無关的边界条件就够了。这在物理上很容易想像：如果边界条件与时間無关，那末無論所給的初溫是多少，物体在每一点 (x_1, x_2, x_3) 的溫度 $u(t, x_1, x_2, x_3)$，当 $t\to\infty$ 时，总会趋

向于某一極限 $u(x_1, x_2, x_3)$。極限函数 $u(x_1, x_2, x_3)$ 滿足稳定方程(8.1)，和前面所說的那个与时間無关的边界条件。

假設方程 (8.1) 的解在所考慮区域的边界上的值为已知，由此来确定方程(8.1)的某一解的問題，称为狄里希勒問題或第一类边值問題。

在研究空間热傳播的同时，往往还要研究沿着一根樞軸或在一塊薄片內溫度的变化。如果一个均匀的樞軸相当細，以至在它的同一横截面上各点的溫度可認为是相同的，并且樞軸的側表面与其周圍的介質沒有热交換發生，这样溫度 u 將只与时間 t 及一个空間坐标 x 有关。在这种情形下，在适当选好度量單位后，确定函数 $u(t, x)$ 的方程就具有下面的形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{9.1}$$

方程(9.1)同样会被三維的物体內的溫度 $u(t, x_1, x_2, x_3)$ 所滿足，只要它仅与一个空間坐标 (例如 $x_1=x$)有关。也就是只要物体在每一平面 $x_1=\text{const.}$ 上各点的溫度都相同就行了。同样，研究在一塊均匀而絕热的平面薄板內的热的傳播，我們就得到下列方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \tag{10.1}$$

3. 例 2. 薄膜的振动及平衡方程 所謂薄膜是指一种張紧的薄膜，这种薄膜拒抗伸張而不拒抗弯曲，即它变形时不引起上面任意一塊面积發生变化；那引起某一部分面积發生变化的外力所作的功和这个变化成正比。这个正的比例常数 T 与这部分的形狀和位置都無关。它叫做薄膜的張力。

还需注意：彈性內力所作的功，和引起薄膜面积变动的外力所作的功，二者的絕对值相等而符号相反。

設一位于平面 (x_1, x_2) 上的薄膜处于靜止狀态，它的形狀是一

个以 L 为边界的平面区域 G。

假設有某力作用在薄膜上，它在点 (x_1, x_2) 处的密度等于 $f(x_1, x_2)$，而其方向垂直于平面 (x_1, x_2)（参看关于 (3.1) 式下的脚注)。薄膜在这个力的作用下，被压成某一曲面，它的方程可以写成下面的形式:

$$u = u(x_1, x_2),$$

u 軸与平面 (x_1, x_2) 垂直。

我們要导出在下列条件下函数 $u(x_1, x_2)$ 所满足的方程。第一，假設在平衡狀态时，薄膜曲面不要弯得太厉害，即近似于一小塊平面。換句話說，就是假定导数 $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ 都很小，而在我們的討論中，这些导数的高次冪，將被略去。第二，我們假設薄膜上的点在力 $f(x_1, x_2)$ 的作用下，仅沿垂直于 (x_1, x_2) 平面的方向上移动。因此它們的坐标 (x_1, x_2) 不变。

方程的推导是根据力学上的一个基本原理——虛位移原理。根据这一个原理，在平衡状态下，所有作用于一体系的諸力对于任何可能的(附加条件所容許的)位移所作的元功之和应等于零[①]。

要計算所有的元功，我們要求出作用于薄膜的力，使薄膜由原来的平面位置，移到由函数 $u(x_1, x_2)$ 所确定的那个位置时，对薄膜所作的功。因为作用于薄膜元面积 dx_1dx_2 的力为 $f(x_1, x_2)dx_1dx_2$，所以力密度为 $f(x_1, x_2)$ 的力所作的功，由积分

$$\iint_G f(x_1, x_2)u(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

确定。在此位移下，薄膜面积的变化等于

$$\iint_G (\sqrt{1+u'^2_{x_1}+u'^2_{x_2}}-1)dx_1\,dx_2,$$

① 参看 Г. К. Суслов（苏斯洛夫）所著“理論力学”，苏联技术理論書籍出版社 1946 年版。

而在此面积改变的情况下，內力所作的功，等于

$$-T\iint_G\left(\sqrt{1+u_{x_1}'^2+u_{x_2}'^2}-1\right)dx_1\,dx_2.$$

將被积函数展成 u'_{x_1} 和 u'_{x_2} 的冪級数，利用关于这些量是微小的假定，而略去展式中次数較高的項。在这种情形下彈性內力所作的功为

$$-\frac{T}{2}\iint_G[u_{x_1}'^2+u_{x_2}'^2]dx_1\,dx_2.$$

因此力 f 和所有作用在薄膜上的內力，当薄膜由靜止位置移至某一位置 $u(x_1, x_2)$ 时，对薄膜所作的功等于

$$A(u)=\iint_G\left[-\frac{T}{2}(u_{x_1}'^2+u_{x_2}'^2)+fu\right]dx_1\,dx_2.\quad \textbf{(11.1)}①$$

現在假想有某一虛位移，卽假設在函数 $u(x_1, x_2)$ 上，加上某一函数 $\delta u(x_1, x_2)$。那末所有的作用力对此位移所作的功，等于积分(11.1)的变分。这个計算，并不困难，我們有:

$$\Delta A=A(u+\delta u)-A(u)\approx$$

$$\approx\iint_G[-T(u'_{x_1}\delta u'_{x_1}+u'_{x_2}\delta u'_{x_2})+f\delta u]dx_1\,dx_2.\quad (12.1)$$

根据虛位移原理，它应等于零。

对前兩个被加式，施行分部积分(卽应用格林公式

$$\iint_G v\Delta u dx_1 dx_2=$$

$$=-\iint_G(u'_{x_1}v'_{x_1}+u'_{x_2}v'_{x_2})\,dx_1\,dx_2+\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}dS.$$——譯者注)

就得到:

① 如不計符号，积分(11.1)恰好等于薄膜在平衡位置时的位能。因此可以这样說，我們的推理是基于：每一力学体系的位能，在平衡位置时，达到極小值。