现代数学基础丛书

环与代数

刘绍学著

科学出版社

现代数学基础丛书

环 与 代 数

科 学 出 版 社

1 9 9 7

内 容 简 介

本书综述了非交换结合环(代数)理论的基础，主要内容有：有限维代数的 Wedderburn 理论，极小条件环的 Artin 理论，一般环的 Jacobson 理论，关于 PI-代数的 Kaplansky 定理，Amitsur-Курош 的一般根论，以及关于 Goldie 环的基本结果.

读者对象为数学专业高年级学生、研究生，数学教师和其他数学工作者.

现代数学基础丛书

环与代数

刘绍学 著

责任编辑 钱介福

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

新世纪印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983 年 3 月第一版 开本：850×1168 1/32

1997 年 8 月第三次印刷 印张：9 3/8

印数：8681－11680 字数：242,000

ISBN 7-03-005994-8/O·929

定价：18.50 元

序　言

本书是在我为研究生讲授环论课时所用讲义的基础上写成的.

这是一本介绍非交换结合环理论的基础的书. 结合环在一般(即不一定是结合的)环中占居中心地位；其他重要的非结合环类，如 Lie 环，Jordan环，交错环，几乎都和结合环有相同的发展过程.

非交换结合环论的发展过程，可以设想分为以下三个阶段：(一) 关于有限维代数的研究，Albert(1) 可以看作是这方面的总结；(二) 关于有极小条件的环的研究，Artin 等(1)可以看作是这方面的总结；(三) 关于一般(即不附加有限条件) 环的研究，以及关于有极大条件环的研究，并广泛地使用同调代数的工具，Jacobson(2)可以看作是前者的总结，而 Faith(1)可以看作是后者的总结.

在本书中，我们避开同调代数而介绍这三个发展阶段的基本内容. 在叙述上，我们基本上按照环论原来的发展过程依次介绍. 当然某些早期结果可由后期较一般的结果直接得出. 然而我们没有去避开这些重复. 这是因为：某些重复，以及从这些重复中能看到的发展过程的痕迹，对初学者来说，是很有好处的.

Wedderburn 的结构理论对整个环论的影响是很大的，我们选择的内容基本上都是围绕这一理论的，为的是使读者对它有一个全面深入的理解.

我们假定读者已经熟悉抽象代数、线性代数以及域的 Galois 理论(后者只在第三章中用到).

本书的目的是为进一步学习环论中的专门著作和有关论文打下一个良好的基础. 书后附有参考书目，书中顺便介绍一些未解

决的问题，并介绍一些文献，有些是属于经典性的，有些则能提示我们在环论中如何提出问题.

使用本书作为教材可有下面几种方案:(一) 每周四节课两学期可全部讲完，(二)选用前四章或前五章作为结合代数课，每周四节课一学期可讲完，(三) 选用后五章（或去掉第十章）作为环论课，每周四节课一学期可讲完，(四) 选用第六、七、九章作为环的根论课，每周三节课一学期可讲完，(五) 选用第一、二、四章作为有限代数课，每周二节课一学期可讲完.

作者是从 А.Г. Курош 教授和张禾瑞教授那里学习环与代数的，在此对他们表示怀念和感谢.在编写时主要参考了张禾瑞(1)，Albert(1)，Artin(1)，Jacobson(1)，(2)，Herstein(1)，Curtis (1)，Kaplansky(1)等等.

万哲先同志一直鼓励我写一本关于环论的书，聂灵沼同志对选材提出了宝贵意见，谢邦杰、许永华同志寄来了我向他们要的材料，吴品三同志仔细阅读了每一个证明，提出了修改意见并补充了一些习题，在此一并表示感谢. 进修教师谢冰璋、徐忠明、陈维新、厉立德、王春森、马志大、马文新等同志以及研究生张英伯、王成德在学习上述讲义的过程中都提出了许多修改意见，在此也一并表示感谢.

书中一定会有不当之处，殷切地希望读者指正.

作　者

于北京师范大学

目　录

第一章　有限结合代数的基本概念

§ 1　一些基本概念与定义

在这一节中，我们简单介绍一下关于代数的最基本的定义．关于群与环的相应概念认为是已知的、熟悉的．

定义 1.1.1　域 F 上一个向量空间 A 叫作域 F 上的代数，如果除数乘（用 αa 表示，$\alpha\in F$，$a\in A$）和 A 的加法运算（用 $+$ 表示）外，A 中还定义有一个乘法运算（用 $\cdot$ 表示或用 ab 表示运算结果，$a,b\in A$）满足下列条件：

i) $a\cdot(b+c)=ab+ac,(b+c)\cdot a=ba+ca,\forall a,b,c\in A$[1]；

ii) $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b),\forall a,b\in A,\forall\alpha\in F$.

如果 A 是 F 上有限维空间，就称 A 为 F 上有限（维）代数．

如果代数 A 中的乘法适合结合律，即若有 $(ab)c=a(bc),\forall a,b,c\in A$，则称 A 为结合代数．

如果代数 A 中乘法适合条件：$ab=ba,\forall a,b\in A$，则称 A 为交换代数．

如果代数 A 中的乘法适合条件：$a^2=0$，$(ab)c+(bc)a+(ca)b=0$，$\forall a,b,c\in A$，则称 A 为 Lie 代数

如果代数 A 中乘法适合条件：$ab=ba$，$(a^2b)a=a^2(ba)$，$\forall a,b,c\in A$，则称 A 为 Jordan 代数．

如果代数 A 中乘法适合条件：$a(ab)=(aa)b,a(bb)=(ab)b$，$\forall a,b\in A$，则称 A 为交错代数．

设 A 是域 F 上的代数，不一定是有限维的，也不一定是结合代数．与群的子群、环的子环等概念相平行的可定义 A 的子代数

1）指对 A 中所有的 a，b，c．其中 $\forall$ 指"所有的"．

的概念。与群、环中相平行的还可定义代数的同构、代数的同态等概念。

定义 1.1.2 设A是域F上的代数，$B\subseteq A$，B不空．如果

i) B是A的子空间，

ii) B对A中的乘法是封闭的，即有

$$bc\in B,\ \forall b,c\in B,$$

则称B是A的子代数．

易见结合（或 Lie- 或 Jordan-）代数的子代数本身仍是结合（或 Lie- 或 Jordan-）代数．有限代数的子代数仍是有限代数．

设X是代数A的一个子集．A中含有X的一切子代数的交当然仍是一个子代数，称之为由X生成的子代数，记作$\langle X\rangle$。易见$\langle X\rangle$是由一切形如$\alpha x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$，$\alpha\in F$，$x_{i_j}\in X$的有限和组成的．

定义 1.1.3 设A，B都是域F上的代数，φ是集A到B内的一个对应，如果φ保持运算，即若有

i) $(ab)\varphi=(a\varphi)(b\varphi)$,

ii) $(\alpha a)\varphi=\alpha(a\varphi)$, $\quad\forall a,b\in A$,

iii) $(a+b)\varphi=a\varphi+b\varphi$, $\quad\forall\alpha\in F$,

则称φ是F上代数A到F上代数B内的一个同态对应，或简称代数A到代数B的一个同态对应．

如果φ是代数A到代数B的一个同态对应，且知φ还是集A到B上的对应，则称φ为代数A到B的一个满同态对应，此时记$A\sim B$。

如果φ是代数A到B的满同态对应，且知φ还是集A到B上的一一对应，则称φ为代数A到B的同构对应．此时记作$A\simeq B$。

如果φ是代数A到代数B的一个子代数上的同构对应，则称φ为代数A到B的入射同态对应或简称入射对应．并称A同构嵌入于B。

易见，若已知$A\sim B$，则若A是结合(Lie, Jordan，交换，有限)代数；B也必是．反过来，一般是不对的，即若已知B是结合

的，A 当然不一定是结合的．

与代数的同态对应密切有关的是代数的理想概念，这是和群的正规子群与环的理想相平行的概念．

定义 1.1.4 设 φ 是代数 A 到代数 B 的一个同态对应，称 A 的子集 $K=\{x\in A\mid x\varphi=0\}$ 为同态 φ 的核．

定义 1.1.5 说 $K\subseteq A$ 是代数 A 的理想，如果

i）K 是 A 的子代数，

ii）$KA\subseteq K$，$AK\subseteq K$[1]．

和环的情况完全类似地可以证明，域 F 上代数 A 的同态对应的核是 A 的理想．反过来，对于 F 上代数 A 的任意理想 I 可引进集 A 的一个等价关系～：$a,b\in A$，$a\sim b$ 当且仅当 $a-b\in I$．用 $\bar{a}$ 表示 a 所在的～等价类，而用 $\bar{A}$ 表示一切 $\bar{a}$，$a\in A$，的集．在 $\bar{A}$ 中引入下列运算：$\alpha\bar{a}=\overline{\alpha a}$，$\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$，$\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{ab}$，$\alpha\in F$，$\bar{a},\bar{b}\in\bar{A}$．利用理想 I 的性质不难验证上述定义是合理的，即 $\alpha,\bar{a},\bar{b}$ 的运算结果 $\overline{a+b},\overline{ab},\overline{\alpha a}$ 与代表 a,b 之选择无关．与我们熟悉的商空间和商环的情况一样，可验证 $\bar{A}$ 作成 F 上的一个代数．这样得到的代数 $\bar{A}$，将称之为代数 A 关于理想 I 的商代数或简称为 A 的商代数．令

$$\varphi:\ A\to\bar{A}$$
$$a\mapsto\bar{a}\text{[2]},$$

则不难证明 φ 是代数到其商代数 $\bar{A}$ 上的满同态对应，φ 的核恰是定义等价关系～时用的那个理想 I．我们把这样定义的 φ，和环的情形一样，称之为代数 A 到其商代数 $\bar{A}$ 上的自然同态对应．为了指明理想 I，常将 $\bar{A}$ 记作 A/I，$\bar{a}=a+I$．

与群或环的同态基本定理完全平行的有下述关于代数的同态基本定理，同构定理．我们略去其证明．

定理 1.1.1 设 A 是域 F 上的代数，则

i）A 的商代数 $\bar{A}$ 是 A 的同态像，即有 $A\sim\bar{A}$，

1）KA 表示一切形如 $xa,x\in K,a\in A$，的元素的有限和．

2）指 φ 是集 A 到 $\bar{A}$ 的对应，而具体对应法则是 $a\mapsto\bar{a}$，$a\in A$．

ii) A 的任意同态像 B，即若 $A\sim B$，则代数 B 必和 A 的一个商代数同构.

定理 1.1.2 设 φ 是代数 A 到代数 A' 上的满同态对应，φ 的核是 I，设 $B\supseteq I$ 是 A 的理想，则 $B\varphi$[1] $=B'$ 是 A' 的理想且 $A/B\simeq A'/B'$，其间的同构对应可取作 $a+B\mapsto a\varphi+B'$，并称之为 A/B 与 A'/B' 间的自然同构对应.

定理 1.1.3 设 A 是代数，B 是 A 的子代数而 I 是 A 的理想，则

i) $B\cap I$ 是 B 的理想，

ii) $(B+I)/I\simeq B/(B\cap I)$，其间的同构对应可取作 $b+I\mapsto b+(B\cap I)$.

这些定理的证明可仿照关于群和环的平行定理的证法去证明.

最后我们给出下面定义：

定义 1.1.6 代数 A 的子代数 B，若满足条件 $AB\subseteq B$（$BA\subseteq B$），就称之为代数 A 的左（右）理想.

§ 2 有限结合代数的例子

以下我们将只讨论有限结合代数，如无特别声明，“代数”将永远指有限结合代数.

在讨论任意代数之前，先看一批具体代数的例子.

代数与环的差别在于环的加法群只是一个 Abel 群，而代数的加法群是域 F 上的向量空间，这样，代数就比环有一个结构简单得多的加法群. 在选定向量空间 A 的一个基：$a_i, i=1,\cdots,n$ 后，A 中任意元素 a 都可唯一地表成

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i,\ \alpha_i\in F.$$

---

1) 指 B 在 φ 下的象，即 $B\varphi=\{x\in A'\mid x=b\varphi, b\in B\}$.

若 $b\in A$ 而 $b=\sum\beta_i a_i$，则

$$ab=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j(a_ia_j).$$

这样，基元 a_i 之间的乘法表就完全确定了整个代数 A 的乘法运算了。易见 A 是结合代数，当且仅当基元之间的乘法满足结合律，即

$$(a_ia_j)a_k=a_i(a_ja_k),\ \forall i,j,k.$$

因此，要给出域 F 上 n 维结合代数 A，只要给定 F 和维数 n，再给定 A 的某个基的基元间满足结合律的乘法表就行了.

例 1 取 $F=A$ 为全体实数，对通常数的加法和乘法，A 是实数域 F 上的一维结合代数. 易见这个代数是可除代数，即有 $1\in A$，使 $1a=a1=a$, $\forall a\in A$，且对任意 $0\neq a\in A$，$\exists$ 唯一的 $b\in A$，使得 $ab=ba=1$. 或简言之，说一个代数 A 是可除代数，指 $\{A\backslash 0,\cdot\}$ 是一个群.

例 2 取 F 为实数域而 C 为复数域，对通常数的加法和乘法，C 是 F 上二维结合代数. 易见它也是可除代数.

例 3 取 F 为实数域，Q 为 F 上四维空间以 $1,i,j,k$ 为基，定义基元间的乘法表如下：

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

直接检验可知，基元之间的乘法有结合律，因而 Q 是结合代数. 1 是 Q 的单位元. Q 中元称为**四元数**.

附注 Q 中单位元 1 和域 F 中的单位元 1 是两个不同元素，然而用同样的符号将不致引起混乱.

Q 还是可除代数，这可由下述方法证得：Q 的任意元 a 可唯一地表成

$$a=\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\cdot i+\alpha_3\cdot j+\alpha_4\cdot k,\alpha_1,\cdots,\alpha_4\in F,$$

规定

$$\bar{a}=\alpha_1\cdot 1-\alpha_2\cdot i-\alpha_3\cdot j-\alpha_4\cdot k,$$

称之为 a 的共轭元．直接计算可得与复数类似的结果：$a\cdot\bar{a}=\bar{a}\cdot a=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)\cdot 1$．将系数 $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2$ 记作 $|a|$，称之为四元数 a 之模．若 $a\neq 0$，则 $|a|\neq 0$，此时有

$$a\cdot(|a|^{-1}\bar{a})=(|a|^{-1}\bar{a})\cdot a=1,$$

即 Q 的每一非零元都有逆元，即 Q 是可除代数．

有趣的是，上面三个例子给出实数域上所有可能的有限可除结合代数，这就是著名的 Frobenius 定理(参看第三章 §6)．

定义 1.2.1 称代数 A 为单代数，如果除其本身和 0 以外 A 没有别的理想，并且 $A^2\neq 0$．

由于 A^2 是 A 的理想，如果 A 没有真理想(即异于 A 本身和 0 的理想)，则必 $A^2=0$ 或 $A^2=A$．因而单代数的定义中要求 $A^2\neq 0$ 的这一条件，只是把一维零乘代数（$A^2=0$ 的代数 A，称为零乘代数）这一简单情况排除在外．

易见可除代数是单代数．单代数不一定是可除代数可由下例看出．

例 4 设 F 是任意域，n 为任意正整数，令 F_n 为 F 上 $n\times n$ 矩阵的全体，则对通常的矩阵运算，F_n 是 F 上 n^2 维结合代数．令 e_{ij} 为第 i 行第 j 列交叉处为 1，其余位置全是 0 的矩阵，并将称之为矩阵单位，则 $e_{ij}, i, j=1,\cdots,n$ 组成 F_n 的一个基，其乘法表为

$$e_{ij}\cdot e_{lm}=\delta_{jl}e_{im},\ i,j,l,m=1\cdots,n,$$

其中 δ_{jl} 为 Kronecker 符号（即当 $j=l$ 时，$\delta_{jl}=1$，否则 $\delta_{jl}=0$）．

F_n 是一个单代数．欲证此，只需证 $0\neq a\in F_n$，则 a 所生成的理想 (a)(即包含 a 的所有理想之交)必等于 F_n．设 $a=\sum\alpha_{ij}e_{ij}$，$\alpha_{ij}\in F$．因为 $a\neq 0$，α_{ij} 中必有一，说是 $\alpha_{st}\neq 0$．用 F_n 的元素右乘或左乘 a，其结果当然仍属于理想 (a)，故

$$\alpha_{st}^{-1}(e_{ss}ae_{tt})=e_{st}\in(a),$$

$$e_{is}e_{st}e_{tj}=e_{ij}\in(a),\ \forall i,j.$$

即全部基元 e_{ij} 都在(a)中，故$(a)=F_n$，即证得 F_n 是单代数。

在第二章中我们将看到，F上有限结合单代数可通过F上可除代数以及 F_n 完全刻划之。

例 5 设A为域F上的n维空间。在A中引进零乘法，即规定A中任意两个元素的乘积都是零。这样A成为零乘代数，这样的代数当然是结合代数。

例 6 设F为任意域，n为任意正整数。设N为F上所有上三角 $n\times n$ 矩阵的集，即N为一切形如

$$a=\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵全体，矩阵a的主对角线以上的三角地带可添写F中任意元素而其余位置都添零。易见N是F上$1+2+\cdots+(n-1)=n(n-1)/2$维结合代数。直接计算可知，$N$中任意$n$个元素之积必为零，即有 $a_1a_2\cdots a_n=0$，$\forall a_i\in N$，或 $N^n=0$。我们称具有这样性质的代数为幂零代数。这样，代数N是幂零代数。

例 7 设F为任意域。G为任意有限群，其运算记作乘法，其元素记作 $g_1,\cdots,g_n$。以G的元素为基元可得F上的一个n维向量空间$F[G]$，其元素具有形状$\sum\alpha_i g_i$，$\alpha_i\in F$。把 $F[G]$的基元 g_i 间的乘法就规定为群G中的乘法，这样$F[G]$便成为F上的代数。由于群G的乘法有结合律，故$F[G]$是结合代数，称之为群代数。群代数对群的表示论有重要意义。

关于例子暂时就给出这一些。在这些例子中，可除代数和零乘代数是两种极端类型。单代数接近可除代数而较之宽，幂零代数靠近零乘代数而较之广。研究单代数与幂零代数这两类有鲜明特点的代数类，并利用它们去刻划任意有限结合代数，是今后讨论结合代数结构的主要途径之一。

下面我们给出两个简单的定理。

定义 1.2.2 说代数A的元素a是左零因子，如果$a\neq 0$，且

$\exists\, 0 \neq b \in A$，使 $ab=0$．类似地可定义右零因子．左、右零因子统称为零因子．

定理 1.2.1 若 F 上有限代数 A 没有零因子，则 A 必是可除代数．

证 任取 A 的一个基：$a_1, \cdots, a_n$．若 $0 \neq a \in A$，则 $aa_1, \cdots, aa_n$ 在 F 上线性无关，因若有不全是零的 F 中元 α_i，使 $\sum\limits_i \alpha_i(aa_i)=0$，因而

$$a \cdot \sum \alpha_i a_i = 0,$$

即 a 是左零因子，与假设矛盾．这样 $aa_1, \cdots, aa_n$ 组成 A 的一个基，因而对任意 $b \in A$，必有

$$b=\beta_1(aa_1)+\cdots+\beta_n(aa_n)=a \cdot \sum \beta_i a_i,$$

故知 $ax=b$ 永远有解．由于没有零因子，易见方程 $ax=b$ 的解还是唯一的．同理可证方程 $xa=b$ 也有唯一解．这样 $\{A \backslash 0, \cdot\}$ 是群，即 A 是可除代数．|[1]

定理 1.2.2 设 A 是 F 上有单位元 1 的代数，K 是 A 的子代数，$1 \in K$，且 K 是 F 的扩域，则有

$$(A:K)\ (K:F)=(A:F),$$

其中 $(A:K)$ 表示 K 上向量空间 A 的维数，其他准此．

证 设 $a_1, \cdots, a_s$ 是 K 上向量空间 A 的一个基；$k_1, \cdots, k_t$ 是 F 上向量空间 K 的一个基．今证 $k_i a_j$，$i=1, \cdots, t$，$j=1, \cdots, s$，是 F 上向量空间 A 的一个基．首先证明它们在 F 上是线性无关的．若有 $\alpha_{ij} \in F$ 使

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} k_i a_j = 0,$$

则有

$$\sum_j \Big(\sum_i \alpha_{ij} k_i\Big) a_j = 0.$$

1）符号"|"表示证明完毕．