

高等学校教材

高等数学

第四版 下册

同济大学数学教研室 主编

高等教育出版社

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

第四版 下册

同济大学数学教研室 主编

高等教育出版社

40-5

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 下册/同济大学数学教研室主编. —4版. —
北京:高等教育出版社,1996(1998年重印)
ISBN 7-04-005804-9

I. 高… II. 同… III. 高等数学 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (96) 第 09286 号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街 55 号
邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588
新华书店总店北京发行所发行
北京地质印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 14.125 字数:360 000
1978 年 10 月第 1 版
1996 年 12 月第 4 版 1998 年 4 月第 5 次印刷
印数 380 949—469 958

定价 12.70 元

凡购买高等教育出版社的图书,如遇缺页、倒页、脱页等
质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换

版权所有,不得翻印

内 容 提 要

本书第四版是在高等学校工科数学课程教学指导委员会指导下,遵照国家教委“对质量较高,基础较好,使用面较广的教材要进行锤炼”的精神,并结合修订的《高等数学课程教学基本要求》,在第三版的基础上修改成的.这次修改广泛吸取了全国同行的意见,从教学角度出发进行仔细推敲,改写了一些重要概念的论述,调整了习题的配置,每章增加总习题,使内容和系统更加完整,也便于教学.

本书分上、下两册出版.下册内容为多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程五章,书末附有习题答案与提示.

本书仍保持了第三版结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显、例题较多、便于自学等优点,又在保证教学基本要求的前提下,扩大了适应面,增强了伸缩性,以供高等工科院校不同专业的学生使用.

责任编辑	郭思旭
封面设计	王 睢
责任绘图	陈玉珍
版式设计	马静如
责任校对	朱惠芳
责任印制	孔 源

目 录

第八章 多元函数微分法及其应用	1
第一节 多元函数的基本概念	1
一、区域(1) 二、多元函数概念(3) 三、多元函数的极限(6)	
四、多元函数的连续性(9) 习题 8-1(12)	
第二节 偏导数	13
一、偏导数的定义及其算法(13) 二、高阶偏导数(18) 习题	
8-2(20)	
第三节 全微分及其应用	21
一、全微分的定义(21) 二、全微分在近似计算中的应用(25)	
习题 8-3(28)	
第四节 多元复合函数的求导法则	29
习题 8-4(36)	
第五节 隐函数的求导公式	37
一、一个方程的情形(37) 二、方程组的情形(39) 习题 8-5(43)	
第六节 微分法在几何上的应用	44
一、空间曲线的切线与法平面(44) 二、曲面的切平面与法线(49)	
习题 8-6(52)	
第七节 方向导数与梯度	53
一、方向导数(53) 二、梯度(56) 习题 8-7(60)	
第八节 多元函数的极值及其求法	61
一、多元函数的极值及最大值、最小值(61) 二、条件极值 拉格	
朗日乘法(67) 习题 8-8(70)	
*第九节 二元函数的泰勒公式	71
一、二元函数的泰勒公式(71) 二、极值充分条件的证明(75)	
*习题 8-9(78)	
*第十节 最小二乘法	78

* 习题 8-10(84)	
总习题八	84
第九章 重积分	87
第一节 二重积分的概念与性质	87
一、二重积分的概念(87) 二、二重积分的性质(91) 习题 9-1	
(93)	
第二节 二重积分的计算法	94
一、利用直角坐标计算二重积分(94) 习题 9-2(1)(103)	
二、利用极坐标计算二重积分(104) 习题 9-2(2)(110)	
* 三、二重积分的换元法(112) 习题 9-2(3)(118)	
第三节 二重积分的应用	119
一、曲面的面积(120) 二、平面薄片的重心(123) 三、平面薄片	
的转动惯量(125) 四、平面薄片对质点的引力(126) 习题 9-3	
(127)	
第四节 三重积分的概念及其计算法	128
习题 9-4(133)	
第五节 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	134
一、利用柱面坐标计算三重积分(134) 二、利用球面坐标计算三	
重积分(136) 习题 9-5(141)	
* 第六节 含参变量的积分	143
* 习题 9-6(149)	
总习题九	149
第十章 曲线积分与曲面积分	152
第一节 对弧长的曲线积分	152
一、对弧长的曲线积分的概念与性质(152) 二、对弧长的曲线积	
分的计算法(154) 习题 10-1(158)	
第二节 对坐标的曲线积分	159
一、对坐标的曲线积分的概念与性质(159) 二、对坐标的曲线积	
分的计算法(163) 三、两类曲线积分之间的联系(168) 习题	
10-2(170)	
第三节 格林公式及其应用	171
一、格林公式(171) 二、平面上曲线积分与路径无关的条件	

(176) *三、二元函数的全微分求积(179) 习题 10-3(184)	
第四节 对面积的曲面积分	185
一、对面积的曲面积分的概念与性质(185) 二、对面积的曲面积分的算法(186) 习题 10-4(190)	
第五节 对坐标的曲面积分	191
一、对坐标的曲面积分的概念与性质(191) 二、对坐标的曲面积分的算法(197) 三、两类曲面积分之间的联系(200)	
习题 10-5(203)	
第六节 高斯公式 通量与散度	204
一、高斯公式(204) *二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件(209) 三、通量与散度(211) 习题 10-6(213)	
第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度	214
一、斯托克斯公式(214) *二、空间曲线积分与路径无关的条件(219) 三、环流量与旋度(221) *四、向量微分算子(224)	
习题 10-7(224)	
总习题十	226
第十一章 无穷级数	228
第一节 常数项级数的概念和性质	228
一、常数项级数的概念(228) 二、收敛级数的基本性质(231)	
*三、柯西审敛原理(235) 习题 11-1(236)	
第二节 常数项级数的审敛法	237
一、正项级数及其审敛法(237) 二、交错级数及其审敛法(245)	
三、绝对收敛与条件收敛(247) 习题 11-2(252)	
第三节 幂级数	259
一、函数项级数的概念(254) 二、幂级数及其收敛性(255)	
三、幂级数的运算(260) 习题 11-3(263)	
第四节 函数展开成幂级数	264
一、泰勒级数(264) 二、函数展开成幂级数(267) 习题 11-4(275)	
第五节 函数的幂级数展开式的应用	275
一、近似计算(275) 二、欧拉公式(280) 习题 11-5(281)	
*第六节 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基	

本性质	282
一、函数项级数的一致收敛性(282) 二、一致收敛级数的基本性质(287) *习题 11-6(292)	
第七节 傅里叶级数	293
一、三角级数 三角函数系的正交性(293) 二、函数展开成傅里叶级数(296) 习题 11-7(303)	
第八节 正弦级数和余弦级数	304
一、奇函数和偶函数的傅里叶级数(304) 二、函数展开成正弦级数或余弦级数(307) 习题 11-8(309)	
第九节 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数	310
习题 11-9(313)	
*第十节 傅里叶级数的复数形式	314
*习题 11-10(317)	
总习题十一	317
第十二章 微分方程	320
第一节 微分方程的基本概念	320
习题 12-1(325)	
第二节 可分离变量的微分方程	326
习题 12-2(333)	
第三节 齐次方程	334
一、齐次方程(334) *二、可化为齐次的方程(239) 习题 12-3(241)	
第四节 一阶线性微分方程	342
一、线性方程(342) 二、伯努利方程(345) 习题 12-4(348)	
第五节 全微分方程	349
习题 12-5(352)	
*第六节 欧拉-柯西近似法	353
*习题 12-6(357)	
第七节 可降阶的高阶微分方程	357
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程(358) 二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程(360) 三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程(363) 习题 12-7(366)	

第八节 高阶线性微分方程	366
一、二阶线性微分方程举例(366) 二、线性微分方程的解的结构(369) *三、常数变易法(372) 习题 12-8(375)	
第九节 二阶常系数齐次线性微分方程	376
习题 12-9(386)	
第十节 二阶常系数非齐次线性微分方程	387
一、 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型(388) 二、 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos \omega x + P_n(x)\sin \omega x]$ 型(390) 习题 12-10(394)	
*第十一节 欧拉方程	395
*习题 12-11(397)	
第十二节 微分方程的幂级数解法	397
习题 12-12(401)	
*第十三节 常系数线性微分方程组解法举例	402
*习题 12-13(405)	
总习题十二	406
习题答案与提示	409

第八章 多元函数微分法及其应用

上册中我们讨论的函数都只有一个自变量,这种函数叫做一元函数.但在很多实际问题中往往牵涉到多方面的因素,反映到数学上,就是一个变量依赖于多个变量的情形.这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题.本章将在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的微分法及其应用.讨论中我们以二元函数为主,因为从一元函数到二元函数会产生新的问题,而从二元函数到二元以上的多元函数则可以类推.

第一节 多元函数的基本概念

一、区域

讨论一元函数时,经常用到邻域和区间概念.由于讨论多元函数的需要,我们首先把邻域和区间概念加以推广,同时还要涉及其它一些概念.

1. 邻域

设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点, δ 是某一正数. 与点 $P_0(x_0, y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x, y)$ 的全体, 称为点 P_0 的 δ 邻域, 记为 $U(P_0, \delta)$, 即

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\},$$

也就是

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}.$$

在几何上, $U(P_0, \delta)$ 就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心, $\delta > 0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x, y)$ 的全体.

如果不需要强调邻域半径 δ , 则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的 δ 邻域. 点 P_0 的去心的邻域记作 $\dot{U}(P_0)$.

2. 区域

设 E 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点. 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$ 使 $U(P) \subset E$, 则称 P 为 E 的内点 (图 8-1). 显然, E 的内点属于 E .

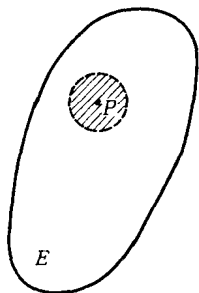


图 8-1

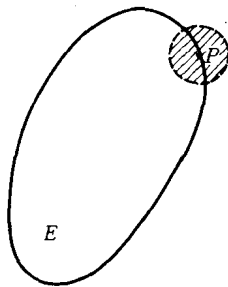


图 8-2

如果点集 E 的点都是内点, 则称 E 为开集. 例如, 点集 $E_1 = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ 中每个点都是 E_1 的内点, 因此 E_1 为开集.

如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点, 也有不属于 E 的点 (点 P 本身可以属于 E , 也可以不属于 E), 则称 P 为 E 的边界点 (图 8-2). E 的边界点的全体称为 E 的边界. 例如上例中, E_1 的边界是圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$.

设 D 是开集. 如果对于 D 内任何两点, 都可用折线连结起来, 且该折线上的点都属于 D , 则称开集 D 是连通的.

连通的开集称为区域或开区域. 例如, $\{(x, y) | x + y > 0\}$ 及 $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ 都是区域.

开区域连同它的边界一起, 称为闭区域, 例如

$$\{(x, y) | x + y \geq 0\} \text{ 及 } \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

都是闭区域.

对于点集 E 如果存在正数 K , 使一切点 $P \in E$ 与某一定点 A

间的距离 $|AP|$ 不超过 K , 即

$$|AP| \leq K$$

对一切 $P \in E$ 成立, 则称 E 为有界点集, 否则称为无界点集. 例如,

$$\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

是有界闭区域, $\{(x, y) \mid x + y > 0\}$ 是无界开区域.

3. n 维空间

我们知道, 数轴上的点与实数有一一对应关系, 从而实数全体表示数轴上一切点的集合, 即直线. 在平面上引入直角坐标系后, 平面上的点与有序二元数组 (x, y) 一一对应, 从而有序二元数组 (x, y) 全体表示平面上一切点的集合, 即平面. 在空间引入直角坐标系后, 空间的点与有序三元数组 (x, y, z) 一一对应, 从而有序三元数组 (x, y, z) 全体表示空间一切点的集合, 即空间. 一般地, 设 n 为取定的一个自然数, 我们称有序 n 元数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全体为 n 维空间, 而每个有序 n 元数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 n 维空间中的一个点, 数 x_i 称为该点的第 i 个坐标. n 维空间记为 $\mathbb{R}^n$.

n 维空间中两点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 及 $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 间的距离规定为

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

容易验知, 当 $n=1, 2, 3$ 时, 由上式便得解析几何中关于直线(数轴), 平面, 空间内两点间的距离.

前面就平面点集来陈述的一系列概念, 可推广到 n 维空间中. 例如, 设 $P_0 \in \mathbb{R}^n$, δ 是某一正数, 则 n 维空间内的点集

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta, P \in \mathbb{R}^n\}$$

就定义为点 P_0 的 δ 邻域. 以邻域概念为基础, 可定义点集的内点、边界点以及区域等一系列概念.

二、多元函数概念

在很多自然现象以及实际问题中, 经常会遇到多个变量之间

的依赖关系,举例如下:

例 1 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r 、高 h 之间具有关系

$$V = \pi r^2 h.$$

这里,当 r, h 在集合 $\{(r, h) | r > 0, h > 0\}$ 内取定一对值 (r, h) 时, V 的对应值就随之确定.

例 2 一定量的理想气体的压强 p 、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$p = \frac{RT}{V},$$

其中 R 为常数. 这里,当 V, T 在集合 $\{(V, T) | V > 0, T > T_0\}$ 内取定一对值 (V, T) 时, p 的对应值就随之确定.

例 3 设 R 是电阻 R_1, R_2 并联后的总电阻,由电学知道,它们之间具有关系

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

这里,当 R_1, R_2 在集合 $\{(R_1, R_2) | R_1 > 0, R_2 > 0\}$ 内取定一对值 (R_1, R_2) 时, R 的对应值就随之确定.

上面三个例子的具体意义虽各不相同,但它们却有共同的性质,抽出这些共性就可得出以下二元函数的定义.

定义 1 设 D 是平面上的一个点集. 如果对于每个点 $P(x, y) \in D$, 变量 z 按照一定法则总有确定的值和它对应, 则称 z 是变量 x, y 的二元函数(或点 P 的函数), 记为

$$z = f(x, y) \quad (\text{或 } z = f(P)).$$

点集 D 称为该函数的定义域, x, y 称为自变量, z 也称为因变量. 数集

$$\{z | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

称为该函数的值域.

z 是 x, y 的函数也可记为 $z = z(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$ 等等.

类似地可以定义三元函数 $u = f(x, y, z)$ 以及三元以上的函

数.一般地,把定义1中的平面点集 D 换成 n 维空间内的点集 D ,则可类似地定义 n 元函数 $u=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. n 元函数也可简记为 $u=f(P)$,这里点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$.当 $n=1$ 时, n 元函数就是一元函数.当 $n \geq 2$ 时, n 元函数统称为多元函数.

关于多元函数的定义域,与一元函数相类似,我们作如下约定:在一般地讨论用算式表达的多元函数 $u=f(P)$ 时,就以使这个算式有确定值 u 的自变量所确定的点集为这个函数的定义域.例如,函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域为

$$\{(x, y) | x+y > 0\}$$

(图8-3),这是一个无界开区域.又如,函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为

$$\{(x, y) | x^2+y^2 \leq 1\}$$

(图8-4),这是一个有界闭区域.

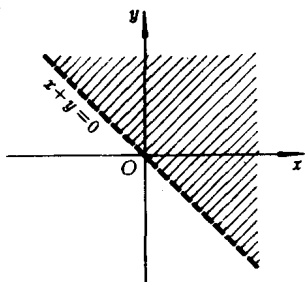


图 8-3

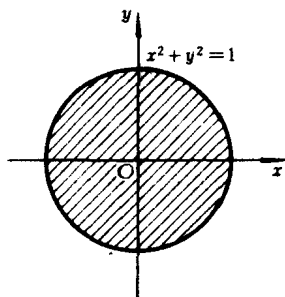


图 8-4

设函数 $z=f(x, y)$ 的定义域为 D .对于任意取定的点 $P(x, y) \in D$,对应的函数值为 $z=f(x, y)$.这样,以 x 为横坐标、 y 为纵坐标、 $z=f(x, y)$ 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x, y, z)$.当 (x, y) 遍取 D 上的一切点时,得到一个空间点集

$$\{(x, y, z) | z=f(x, y), (x, y) \in D\},$$

这个点集称为二元函数 $z=f(x, y)$ 的图形(图8-5).通常我们也说二元函数的图形是一张曲面.

例如,由空间解析几何知道,线性函数

$$z = ax + by + c$$

的图形是一张平面;由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

所确定的函数 $z = f(x, y)$ 的图形是球心在原点、半径为 a 的球面,它的定义域是圆形闭区域

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

在 D 的内部任一点 (x, y) 处,这函数有两个对应值,一个为 $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$,另一个为 $-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. 因此,这是多值函数,它有两个单值分支:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad \text{及} \quad z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

前者表示上半球面,后者表示下半球面. 以后除了对多元函数另作声明外,总假定所讨论的函数是单值的;如果遇到多值函数,可以找出它的(全部)单值分支,然后加以讨论.

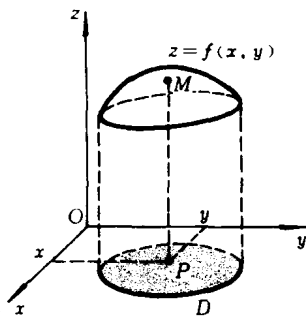


图 8-5

三、多元函数的极限

我们先讨论二元函数 $z = f(x, y)$ 当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$, 即 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 时的极限.

这里 $P \rightarrow P_0$ 表示点 P 以任何方式趋于点 P_0 , 也就是点 P 与点 P_0 间的距离趋于零, 即

$$|PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0.$$

与一元函数的极限概念类似, 如果在 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 的过程中, 对应的函数值 $f(x, y)$ 无限接近于一个确定的常数 A , 我们就说 A 是函数 $f(x, y)$ 当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时的极限. 下面用“ $\varepsilon - \delta$ ”语言描述这个极限概念.

定义 2 设函数 $f(x, y)$ 在开区域(或闭区域) D 内有定义,

$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点或边界点. 如果对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正数 δ , 使得对于适合不等式

$$0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

的一切点 $P(x, y) \in D$, 都有

$$|f(x, y) - A| < \epsilon$$

成立, 则称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A,$$

或

$$f(x, y) \rightarrow A \quad (\rho \rightarrow 0),$$

这里 $\rho = |PP_0|$.

为了区别于一元函数的极限, 我们把二元函数的极限叫做二重极限.

例 4 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$,

求证

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

证 因为

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| = |x^2 + y^2| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 + y^2,$$

可见, 对任给 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \sqrt{\epsilon}$, 则当

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta$$

时, 总有

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon$$

成立, 所以

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

我们必须注意, 所谓二重极限存在, 是指 $P(x, y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数都无限接近于 A . 因此, 如果 $P(x, y)$ 以某一特殊方式, 例如沿着一条定直线或定曲线趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 即使函数无限接近于某一确定值, 我们还不能由此断定函数的极限