线性代数

六百证明题详解

·史明仁 著

北京科学技术出版社

线性代数
六百证明题详解

史明仁　编

北京科学技术出版社

内 容 简 介

本书从国内外有关教科书和近几年研究生入学试题中，选取了有代表性的线性代数证明题五百多道，编者自行设计了一百多题，共 646 题。对于每一道题都给出了一种或多种解答。本书条理清楚、系统性强，能帮助读者加深对线性代数各种基本概念的理解，也有利于掌握逻辑推理方法和解题技巧；本书解题方法简洁，突出了矩阵分块运算的技巧，对多数难题均给出了多种解法，有利于读者掌握各个概念之间的有机联系。

本书可供数学、计算机软件、自控、经济管理、军事指挥等专业的大专院校学生、研究生和在职的工程技术人员学习线性代数时参考。

线性代数六百证明题详解
史明仁　编
北京科学技术出版社出版
（北京西直门外南路 19 号）
人民教育出版社印刷厂排版
河北省衡水红旗印刷厂印装
北京市新华书店发行
各地新华书店经售

开本：787×1092 毫米　1/16　印张：15　字数：374 千字
1985 年 5 月第一版　1985 年 5 月第一次印刷
印数：1—19,000　定价：2.80 元
统一书号：13274·006

前　言

笔者在 1978 年参加研究生入学考试前作了大量的习题. 在研究生学习期间,得到指导教师的鼓励与系领导的关心,断断续续挤了一年多的空余时间,于 1979 年 12 月 18 日编成了《线性代数六百证明题详解》(以下简称《详解》). 1980 年 1 月 6 日修改完后,蒙导师及系里其它几位老师、一位同窗分章审阅,遵照他们意见又修改一遍,作为教学参考资料在高校内部发行过. 此后,承蒙不少老师、同学来信鼓励,为满足广大读者要求,经过仔细修订,正式出版.

下面对编写本《详解》有关的几个问题作简要说明:

(一) 习题来自三个方面:

1. 下列参考书中的线性代数方面的证明题.

[1] 北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组编:《高等代数》与《高等代数讲义》.

[2] G. W. Stewart 编:《Introduction to Matrix Computations》(中译本名《矩阵计算引论》)

[3] Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский 编: 《Сборник Задач по Высшей Алгебре》(中译本名《高等代数习题集》)

[4] 谢邦杰编:《线性代数》

[5] 周伯壎编:《高等代数》

[6] 张远达、熊全淹编:《线性代数》

2. 我所能收集到的一些研究生入学试题.

3. 笔者设计的百余道题,在这些题前标以记号"△",以示负责. 由于自己陋见寡闻,很可能早已见诸它书.

(二) 以参考书[1]作为基础. 即[1]中的定义与定理,本《详解》直接加以引用,仅仅少数几个命题有多种证法的仍列出作为习题.

(三) 本《详解》以所证命题主要用到哪方面的概念作为标准,粗略地分为七章.

(四) 本《详解》企图突出矩阵分块运算在线性代数中的作用,列出了不少作为这方面训练的习题,在解答中也总试图用上矩阵分块的方法.

(五) 本《详解》的解答企图自成系统,凡是放在前面的习题,其第一种证法不用后面习题的结果. 有时两个习题互推,这表明它们所涉及的命题等价,或者是一般与特殊的关系,且它们各自另有独立的证法,从而不会造成逻辑上的混乱.

(六) 一些较难的习题,标以"*"号,其中有的还给提示. 解答中不少习题给出多种证法,但这些提示与解答决不是仅有的方法,更不是最好的方法,不要因此束缚了思想.

笔者对关心、鼓励《详解》编写的系领导,导师邓乃扬副教授,及帮助审稿的老师深为感激. 衷心感谢来信给我提供习题,指出错漏的读者. 自己学识浅薄,寡闻鲜见,错谬之处定然不少,万望读者教正.

编　者

1983 年 6 月

于北京工业大学应用数学系

符 号 说 明

(1) 以大写拉丁字母 A、B、C、D 等表示矩阵，以黑体大写拉丁字母 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{D}$ 等表示(线性)变换.

(2) 以小写拉丁字母 a、b、c、d、x、y、z 等表示列向量. 但 i、j、k、l、m、n、s、t、p、q、h 等有时仍按习惯表示正整数,作为上标或下标.

(3) 以小写希腊字母 α、β、γ、μ、ν、ξ、η、ζ 等表示数域上的数(或域上的元素).

(4) $A_{n\times k}=(\alpha_{ij})$ 表示矩阵 A 有 n 行、k 列,且其 (i,j) 位置上元素是 α_{ij}.

(5) $|A|$ 或 $\det A$ 均表示矩阵 A 的行列式,而 $|\det A|$ 则表示 A 的行列式取绝对值.

(6) 以 I 表示幺矩阵(单位矩阵)，I_k 则表示 k 阶幺矩阵. 以 e_1、e_2、…、e_n 顺次表示 n 阶幺矩阵的列向量. 即 $e_i(i=1,\cdots,n)$ 是这样一个列向量: 仅它的第 i 个分量为 1，而其余分量均为 0. 黑体 $\mathbf{I}$ 表示恒等变换(幺变换).

(7) 以 A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵,$\bar{A}$ 表示矩阵 A 的元素均取共轭复数后的矩阵，A^H 表示矩阵 A 的共轭转置矩阵,即 $A^H=(\bar{A})^T$. 从而 a^T 表示一个行向量,而 e_1^T、e_2^T、…，e_n^T 顺次表示 n 阶幺矩阵的行向量.

(8) 以 A^* 表示方阵 A 的伴随矩阵(附加矩阵).

(9) $A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{bmatrix}$ 表示取位于矩阵 A 第 i_1、i_2、…，i_k 行与第 j_1、j_2…、j_s 列的交叉点上的元素(不变次序)所得的子阵. $A\left(\frac{i_1 i_2\cdots i_k}{\quad}\right)$ 则表示取矩阵 A 的第 i_1、i_2、…、i_k 行(全部列)所成的子阵. $A\left(\frac{\quad}{j_1 j_2\cdots j_k}\right)$ 类推.

(10) $A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 表示 A 是对角元顺次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 n 阶对角矩阵.

$A=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_s)$ 表示 A 是对角分块矩阵,其对角块顺次为方阵 $A_1,A_2,\cdots,A_s$. (A_i 的阶数各为 k_i).

(11) $\boldsymbol{R}(A)$ 表示由 A 的全体列向量生成的线性子空间. $\boldsymbol{n}(A)$ 表示由方程 $Ax=0$ 的全体解向量(列向量)所成的线性子空间.

(12) 符号"$\Longleftrightarrow$"表示它前后两者可以互推,亦即"充要条件".

(13) $L(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 表示向量 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 所生成的线性子空间.

(14) 符号"$\oplus$"表示线性空间的直和.

(15) (a,b) 表示向量 a、b 的内积.

目　　录

习　题

第一章　行列式与矩阵运算

(1—110)

1. 设 $A_{m\times k}$、$B_{k\times p}$ 各分块如下:(使对 A 的列的分法与对 B 的行的分法一致)

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix};$$

其中 A_{ij} 是 $m_i\times k_j$ 矩阵,B_{jl} 是 $k_j\times p_l$ 矩阵. 从而可以作出形式乘积 C 如下:

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{bmatrix},\quad 其中\ C_{hl}=\sum_{\nu=1}^{s} A_{h\nu}B_{\nu l}$$

求证:这样作出的形式乘积,等于真乘积 AB.

2. 用矩阵分块乘法证明:

(1) $Ax=y$ 的充要条件为 y 是 A 的列向量的线性组合,而且组合系数即为 x 的各分量.

(2) $x^TA=y^T$ 的充要条件为 y^T 是 A 的行向量的线性组合, 而且组合系数即为 x^T 的各分量.

3. 求证:

(1) A 的列线性无关的充要条件为从 $Ax=0$,必有 $x=0$.

(2) A 的行线性无关充要条件为从 $x^TA=0$,必有 $x=0$.

4. 求证:$C=A_{n\times k}B_{k\times s}$ 的充要条件是以下之一:

(1) C 的任意第 j 列 ($j=1,2,\cdots s$) 都是 A 的各列的线性组合, 而组合系数正好是 B 的第 j 列对应元素.

(2) C 的任意第 i 行($i=1,2,\cdots,n$)都是 B 的各行的线性组合,且组合系数正好是 A 的第 i 行对应元素.

5. $A=(\alpha_{ij})$,a_j 是 A 的第 j 列,f_i^T 是 A 的第 i 行. 求证:

(1) $Ae_j=a_j$;

(2) $e_i^TA\equiv e_i^HA=f_i^T$;

(3) $e_i^TAe_j\equiv e_i^HAe_j=\alpha_{ij}$.

6. 求证:

(1) $(AB)^T=B^TA^T$;

(2) $(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)^T=A_n^TA_{n-1}^T\cdots A_2^TA_1^T$.

7. $A_i(i=1,2,\cdots,n)$均为非奇异的(或非退化的,即$|A_i|\neq0$)同阶方阵,求证:

$(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)^{-1}=A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$.

8. A非奇异,求证:$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$　　(为此,两者可统一记为A^{-T}).

9. 求证:

(1) $\overline{AB}=\bar{A}\cdot\bar{B}$,　　$(AB)^H=B^HA^H$.

(2) $\overline{\alpha A}=\bar{\alpha}\cdot\bar{A}$,　　$(\alpha A)^H=\bar{\alpha}A^H$.

(3) A非异的充要条件为$\bar{A}$非异或A^H非异,而且$\overline{(A^{-1})}=\bar{A}^{-1}$, $(A^{-1})^H=(A^H)^{-1}$(为此,两者可统一记为A^{-H}).

10. 实矩阵A,如果$A^T=A$,则称A为对称的,如果$A^T=-A$,则称A为反对称的.

求证:

(1)(反)对称矩阵的和、差、数乘仍为(反)对称矩阵.

(2) A、B同时为(反)对称矩阵,则乘积AB为对称矩阵的充要条件为$AB=BA$(称为A、B可换).

(3) k为正整数,A为对称矩阵时,对任何k,A^k仍为对称矩阵.当A为反对称矩阵时,k为偶数,则A^k为对称矩阵,k为奇数,则A^k为反对称矩阵.

(4) 对称矩阵的任一多项式仍为对称矩阵.

(5) A为任何实矩阵,则$A+A^T$与A^TA必为对称矩阵.$A-A^T$必为反对称矩阵.

11. 求证:任一实矩阵A均可唯一分解为对称矩阵S与反对称矩阵P的和.

12. A、B均为$n\times k$矩阵,求证:

$A=B$的充要条件为对任何k元列向量x,均有$Ax=Bx$(本题等价于:对任何x均有$Ax=0$的充要条件为$A=0$).

***13.** 求证:对任何实向量x均有$x^TBx=0$的充要条件为$B^T=-B$.(当B为实矩阵时,即B反对称).

14. (1) 求证:对任何实向量,均有$x^Tx\geqslant0$,且$x^Tx=0$的充要条件是$x=0$.

(2) $A_{n\times k}$为实矩阵,求证:$A^TA=0$的充要条件是$A=0$.

*(3) A_i实对称$(i=1,2,\cdots,s)$, $\sum_{i=1}^{s}A_i^2=0$,求证:$A_i=0(i=1,2,\cdots,s)$.

15. (1) 求证:对任何复向量x,均有$x^Hx\geqslant0$,且$x^Hx=0$的充要条件是$x=0$.

(2) $A_{n\times k}$为复矩阵,求证:$A^HA=0$的充要条件是$A=0$.

△16. A为实方阵,求证:

对任何非零实向量x,均有$\dfrac{x^TAx}{x^Tx}=\alpha$(常数)的充要条件是$A=\alpha I+B$,其中$B$为反对称.

*△17. 求证:对任何复向量x均有$x^HBx=0$的充要条件是$B=0$.

△18. 若$A^H=A$,则称A为厄尔密特矩阵,求证:

(1) A为厄尔密特矩阵的充要条件为对任何复向量x,x^HAx均为实数.(以往教科书上很少注意到它的充分性).

(2) A为厄尔密特矩阵的必要条件为$|A|$为实数.

△**19.** A^*是 A 的伴随矩阵(或附加矩阵),求证:

(1) $(A^*)^T=(A^T)^*$, $(A^*)^H=(A^H)^*$, $(\alpha A_{n\times n})^*=\alpha^{n-1}A^*$;

(2) A 对称时,A^*对称; A 非奇异时,其逆命题也成立. 试举一个 3 阶方阵的例子,说明 A 奇异时,其逆命题不一定成立.

(3) $A_{n\times n}$反对称,则当 n 为偶数时,A^*也为反对称, n 是奇数时,A^*对称.

△**20.** 我们称以下的变换为矩阵 A 的列(行)拟初等变换:(本题结论以后经常用到)

(1°) A 的三类列(行)初等变换.

(2°) A 的第一类列块(行块)初等变换:以非异矩阵 B 去右(左)乘 A 的某一列块(行块)——要求乘法是相容的.

(3°) A 的第二类列块(行块)初等变换:把 A 的第 j 个列块(行块)右乘(左乘)矩阵 C 加到 A 的第 i 个列块(行块)上去——要求乘法与加法均相容.

(4°) A 的第三类列块(行块)初等变换:对换 A 的两个列块(行块).

(5°) 改变 A 的各列(行)向量的次序.

(6°) 把 A 的各列(行)倒置(即从后往前排列).

(7°) 划去 A 的某些列(行)或取出 A 的某些列(行)不改变原有次序组成新矩阵 B.

(8°) 把 A 的某些列(行)的元素全部变为零.

(9°) 把 A 的某一列(行)添加到 A 的第 i 列(行)后面,成为新矩阵 B.

求证:

(1) 对 $A_{n\times k}$ 作以上任何一种列(行)拟初等变换均等价于对幺阵 $I_k(I_n)$作同种列(行)拟初等变换后去右乘(左乘)矩阵 A. 为方便计,我们称幺阵作了这些变换后所得矩阵为拟初等矩阵.

(2) 作第(4°)类拟初等变换等价于作一系列的第三类列初等变换(第(2°)、(3°)类与初等变换关系见 21 题与 28 题).

(3) 相应于第(5°)类拟初等变换的矩阵 E, 特称为排列矩阵. 则排列矩阵是正交的,即 $E^TE=I_k$(如果是行的排列矩阵,则 $E^TE=I_n$).

(4) 相应于第(6°)类拟初等变换的拟初等矩阵特称为倒置矩阵.

$$S=\begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}=(e_k,e_{k-1},\cdots,e_2,e_1),$$

则倒置矩阵 S 对称,对合且正交,即 $S^{-1}=S^T=S$(或 $S^T=S, S^2=I_k, S^TS=I_k$).

(5) 相应于第(7°)类拟初等变换的拟初等矩阵 E 具有标准正交化列向量(行向量), 即 $E^TE=I_k\ (EE^T=I_n)$.

(6) 相应于第(8°)类拟初等变换的拟初等矩阵 P 是幂等的,即 $P^2=P$.

21. $X_{p\times m}$、$Y_{m\times p}$ 为任意矩阵,求证:

(1) $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ X & I_p \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} I_m & Y \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$

都可以分解为第二类初等矩阵的乘积(从而通过对一个幺阵仅仅实施第二类初等变换,即可使它右上角或左下角变成给定的任意矩阵).

(2) 20 题中拟初等变换 (3°)——第二类列块 (行块) 初等变换等价于对矩阵实施一系列的第二类列(行)初等变换, 从而这类拟初等变换不改变一个方阵的行列式.

22. $A_{n\times k}=(B_{n\times r}, C)$, 其中$C$ 的各列均是B的各列之线性组合, 求证:

有方阵 $Q_{k\times k}$, 它是第二类初等矩阵的乘积且$|Q|=1$, 使 $AQ=(B,0)$. [对行有类似结论]. (建议用第 4 题结果与矩阵分块方法).

23. 秩 $A_{n\times k}=r$, 求证:

(1) 有非异方阵 $Q_{k\times k}$, $|Q|=\pm1$, 使 $AQ=(B,0)$, 其中B为A中 r 个线性无关列组成的矩阵.

(2) 有非异方阵 $P_{n\times n}$, $|P|=\pm1$, 使 $PA=\begin{pmatrix}R\\0\end{pmatrix}$, 其中$R$是$A$中 r 个线性无关行组成的矩阵.

*(3) 当A是 n 阶方阵时, 有 n 阶非异矩阵 P, $|P|=\pm1$, 使 PAP^{-1} 的后 $n-r$ 行全部为 0.

24. $x=\begin{pmatrix}\xi_1\\x_1\end{pmatrix}$, 其中 $\xi_1\neq0$ 为 n 元列向量 x 的第一个分量, 求证: (对行向量x^T有类似结果)

有唯一的$(n-1)$元列向量 b, 使

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & I_{n-1}\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}\xi_1\\0\end{pmatrix}.$$

(这是高斯消去法的矩阵表示——参见 21 题)

25. $G=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, 其中 A 非异, 求证:

有矩阵 P、Q 均为第二类初等矩阵乘积, 使

(1) $PG=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & *\end{pmatrix}$; (2) $GQ=\begin{pmatrix}A & 0\\ C & *\end{pmatrix}$; (3) $PGQ=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}$.

(其中打 * 部分为未标出的分块, (1)是分块矩阵的高斯消去法)(提示: 见 21 题).

26. C、D 均为列线性无关矩阵, 求证: 矩阵 $A=\begin{pmatrix}C & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}$的列线性无关.

(提示: 用第 3 题结论)

27. $G=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$, 求证: 秩 $G=$秩 $A+$秩 B.

28. (1) 秩 $A_{n\times n}=r$, 根据上几题结果, 用矩阵分块乘法与归纳法来证明:

有 P、Q 均为初等矩阵的乘积, 使 $PAQ=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$[即用行列初等变换化 A 为$\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$].

(2) 当 A 非异时, 用矩阵分块乘法与归纳法来证明: 有初等矩阵的乘积 R, 使 $RA=I_n$ (或$AR=I_n$). 即可仅用行或列的初等变换把非异矩阵化为单位阵.

(3) 举例说明: A 为奇异时, 仅用行或仅用列的初等变换不一定有(1)的结果.

(4) 求证: A 非异的充要条件为 A 可以表为初等矩阵的乘积.

(5) 求证: 20 题中拟初等变换(2°)等价于一系列的列(行)初等变换, 从而方阵作拟初等变换(2°)后行列式为原来的$|B|$倍.

29. (1) 从28题与23题结果，用矩阵分块方法证明：对长方阵$A_{n\times k}$，有非异$P_{n\times n}$与$Q_{k\times k}$，使$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中$r=$秩$A$.

(2) 求证：秩$A_{n\times k}=$秩$B_{n\times k}$的充要条件为A与B可经初等变换互化.

30. 秩$A_{n\times k}=r$，求证：

(1) 有$M_{n\times r}$与$N_{r\times k}$，秩$M=$秩$N=r$(即M列无关，N行无关)，使$A=MN$.

(2) 有矩阵$R_{n\times k}$与$S_{k\times k}$，使$A=RS$且秩$R=$秩$S=r$.

(3) 有矩阵$R_{n\times n}$与$S_{n\times k}$，使$A=RS$且秩$R=$秩$S=r$.

*31. 求证：$|A_{n\times n}|=1$的充要条件为：有第二类初等矩阵的乘积R使$RA=I_n$（或$AR=I_n$)，即A可以表为第二类初等矩阵的乘积.

32. A与对角元互异的对角阵G乘法可换，求证：A必为对角阵(其逆显然是成立的).

*△33. 求证：A为纯量矩阵(即$A=\alpha I_n$)的充要条件为A与任何非异矩阵乘法可换.

34. 求证：A为纯量矩阵的充要条件为A与所有形如$E_{ij}=e_ie_j^T$ (i、$j=1,2,\cdots,n$)的矩阵乘法可换.

*△35. 求证：A为纯量矩阵的充要条件为对一切非零复向量x均有$\frac{x^HAx}{x^Hx}\equiv\alpha$（常数).

36. $A=PCP^{-1}$，$B=PDP^{-1}$，求证：A,B可换的充要条件为C,D可换：

37. 设

$$X=\begin{bmatrix} X_{11} & & & 0 \\ & X_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & X_{kk} \end{bmatrix},$$

其中X_{ii}为n_i阶方阵($i=1,2,\cdots,k$)，则称X为分块对角矩阵，并简记为$X=\mathrm{diag}(X_{11},X_{22},\cdots,X_{kk})$. 求证：

X为对角分块矩阵的充要条件为X与所有形如$A=\mathrm{diag}(\alpha_1I_{n_1},\alpha_2I_{n_2},\cdots,\alpha_kI_{n_k})$的矩阵乘法可换，其中$\alpha_i(i=1,2,\cdots,k)$为任意常数.

38. 设$f(\lambda)=\alpha_k\lambda^k+\alpha_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+\alpha_1\lambda+\alpha_0$，$A$为$n$阶方阵；称：$f(A)=\alpha_kA^k+\alpha_{k-1}A^{k-1}+\cdots+\alpha_1A+\alpha_0I_n$为关于$A$的一个矩阵多项式. 求证：

关于A的任两个矩阵多项式乘积可换.

39. 主对角线右上方(左下方)的元素全部为0的方阵，即$A=(\alpha_{ij})$，当$i<j(i>j)$时均有$\alpha_{ij}=0$，称为下(上)三角矩阵. 求证：

(1) 两个下(上)三角矩阵的积、和、差与数乘下(上)三角矩阵，仍为下(上)三角矩阵；

(2) 下(上)三角矩阵的任一个多项式仍为下(上)三角矩阵；

(3) A既是上三角阵，又是下三角阵，则A必为对角阵.

40. 求证：上(下)三角阵M为非奇异的充要条件是它的对角元全部非0.

△41. $A=(\alpha_{ij})$为上(下)三角阵，求证：A^*也是上(下)三角阵.

42. 求证：

(1) 非奇异矩阵A为上(下)三角矩阵的充要条件为A^{-1}也是上(下)三角矩阵，且A与A^{-1}对应的对角元互为倒数.

(2) A 非异时, 41 题的逆命题也成立.

△**43.** $AB=C$, 其中 C 为上(下)三角矩阵, 求证:

当 A、B 之一为非异上(下)三角阵时, 另一个必为上(下)三角阵.

44. 可分块为下列形状的矩阵称为分块上三角矩阵: (类似定义分块下三角矩阵)

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & * \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_s \end{bmatrix},$$

其中打 * 部分为未标出的分块, A_i 为 n_i 阶方阵 $(i=1,2,\cdots,s)$. 当 $n_i=1(i=1,2,\cdots,s)$ 时即为上三角矩阵, 所以以下结论对上(下)三角矩阵均对.

求证:

(1) 分块上(下)三角阵的任何 k 次方仍为分块上(下)三角阵. 且

$$A^k=\begin{bmatrix} A_1^k & & * \\ & A_2^k & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_s^k \end{bmatrix}$$ (此处 * 与 A 中 * 不一定相同);

(2) 若 $B=\begin{bmatrix} B_1 & & * \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & B_s \end{bmatrix}$, 则

$$A+B=\begin{bmatrix} A_1+B_1 & & * \\ & A_2+B_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_s+B_s \end{bmatrix},\quad AB=\begin{bmatrix} A_1B_1 & & * \\ & A_2B_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_sB_s \end{bmatrix};$$

其中 A 即定义中所示, A_i 与 B_i 为同阶方阵. 和与积中 * 的部分与 A、B 中的 * 部分不一定相同.

(3) 分块上(下)三角阵的任何一个多项式仍为分块上(下)三角阵, 且当 A 为定义所示, 则

$$f(A)=\begin{bmatrix} f(A_1) & & * \\ & f(A_2) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & f(A_s) \end{bmatrix}$$

(4) 分块对角阵(定义见 37 题)的任一多项式仍为分块对角阵.

且 $A=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_s)$ 时, $f(A)=\mathrm{diag}\,(f(A_1),f(A_2),\cdots,f(A_s))$ (结论对对角阵也适用).

45. 对角元素全为 0 的上(下)三角阵称为严格上(下)三角阵. 当 A 为严格上(下)三角阵时, 求证:

(1) A 与任一个上(下)三角阵 B 的乘积仍为严格上(下)三角阵.

(2) k 为正整数, 记 $A^k=(a_{ij}^{(k)})$ 则 $j<i+k$ 时, $a_{ij}^{(k)}=0$, 即 A 每自乘一次, 它左下角的零元素向右上方扩展一排.

*46. $A=(\alpha_{ij})$为n阶严格上(下)三角阵,求证:

△(1) A^{n-1}只有右上角(左下角)一个元素可能非0,它等于A的上(下)对角线元素乘积,即等于$\alpha_{12}\alpha_{23}\cdots\alpha_{n-1,n}(\alpha_{21}\alpha_{32}\cdots\alpha_{n,n-1})$,其余元素全部为0.

(2) $A^n=0$.

47. A为44题所示,求证:

(1) A非奇异的充要条件为A_i均非奇异($i=1,2,\cdots,s$);

(2) A非异时,A^{-1}仍为分块上三角阵,且A^{-1}具有形状:(对分块下三角阵有类似结论)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & * \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

48. 位于矩阵$A_{n\times s}$的前k行前k列交叉点上元素所成的矩阵,称为A的k阶前主子阵(或顺序主子阵),记为$A^{[k]}$;

若B为上三角阵,C为下三角阵,对一切有意义的k,求证:

(1) $(AB)^{[k]}=A^{[k]}B^{[k]}$;

(2) $(CA)^{[k]}=C^{[k]}A^{[k]}$.

49. $M_{n\times n}$为非奇异上(下)三角阵,求证:

对一切k: $1\leqslant k\leqslant n$, $(M^{[k]})^{-1}=(M^{-1})^{[k]}$ (结论对所谓"后主子阵"也成立).

50. $A=D-U$,其中D为n阶非异对角阵,而U为n阶严格上三角阵,求证:

$$A^{-1}=D^{-1}[I+UD^{-1}+(UD^{-1})^2+\cdots+(UD^{-1})^{n-1}].$$

51. 对角线元素全为1的上(下)三角阵,称为单位上(下)三角阵,求证:

(1) 单位上(下)三角阵的乘积,仍为单位上(下)三角阵;

(2) 单位上(下)三角阵一定非奇异,且逆阵也是单位上(下)三角阵;

(3) 对任何整数k,单位上(下)三角阵的k次方仍为单位上(下)三角阵.

(4) A既为单位上三角阵,又为单位下三角阵,则$A=I$.

52. 如果A非异,且可分解为$A=LDU$,其中L为单位下三角阵,D为对角阵,U为单位上三角阵,求证:这样的分解式是唯一确定的.(提示:注意51题的结论(4))

53. 条件同52题,求证:

A的所有k阶顺序主子阵均非奇异.(提示:注意48题的结论)

54. A为非异的对称矩阵,如果A有52题所示的分解式:$A=LDU$,求证:$L=U^T$.

55. $A^k=0$,其中k为正整数,求证:

$I-A$非奇异(提示:可以考虑$1-\lambda^k$的因式分解).

56. u、v为n元列向量,$\gamma\neq 0$, $\beta\neq 0$, $v^Tu=\beta^{-1}+\gamma^{-1}$. 求证:

矩阵$I-\beta uv^T$非奇异且$(I-\beta uv^T)^{-1}=I-\gamma uv^T$.

(注:这里只须验证$I-\gamma uv^T$与$I-\beta uv^T$的乘积为I,从而既证得后者非异,又证得前者是它的逆阵.实际上由$v^Tu\neq\beta^{-1}$即可证得$I-\beta uv^T$非异,参见164题)

57. 矩阵$B_{n\times n}$、$S_{k\times k}$、$M_{k\times k}$均非奇异,$V_{k\times n}^TB^{-1}U_{n\times k}=S^{-1}+M^{-1}$. 求证:

$$(B-USV^T)^{-1}=B^{-1}-B^{-1}UMV^TB^{-1}.$$

58. $A_{n\times n}$非异,若A的每行元素之和都等于常数α,求证:

(1) $\alpha \neq 0$;

(2) A^{-1} 的每行元素之和都等于常数 α^{-1}.（提示：由 $A^{-1}A=I$，把 A 与 I 按列分块，考虑 A^{-1} 的列向量之和.）

59. 已知 n 个 n 阶方阵 $E_i=\beta_i e_i e_i^T (i=1,2,\cdots,n)$，$\sigma_k$ 表示以这 n 个矩阵为元素的第 k 个初等对称矩阵多项式：$\sigma_k=\sum\limits_{(i_1 i_2\cdots i_k)} E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_k}$；其中 $(i_1 i_2\cdots i_k)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 中取 k 个元素的一个组合，求证：$k\geqslant 2$ 时，$\sigma_k=0$.

***60.** 求证：任何一个 n 阶方阵均可表为 $I+\alpha_{ij}E_{ij}$ 这种形状的矩阵乘积 $(E_{ij}=e_i e_j^T)$.

61. 设 $A=\begin{bmatrix} P & Q \\ 0 & I \end{bmatrix}$，其中 P 为方阵；

(1) 若 $P-I$ 非奇异，求证：对任何正整数 k，均有 $A^k=\begin{bmatrix} P^k & Q_k \\ 0 & I \end{bmatrix}$，其中

$$Q_k=(P^k-I)(P-I)^{-1}Q;$$

(2) 若 P 也非奇异，求证：上式对一切负整数也成立，即 $A^{-k}=\begin{bmatrix} P^{-k} & Q_{-k} \\ 0 & I \end{bmatrix}$，其中

$$Q_{-k}=(P^{-k}-I)(P-I)^{-1}Q.$$

62.

$$A=\begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求证：当 $\alpha_n \neq 0$ 时，A 非奇异，并求 A^{-1}.

63. $A_{n\times n}=(\alpha_{ij})$，如果 $|\alpha_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|\alpha_{ij}| (i=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为对角优势阵. 又，A 的 t 阶主子阵是指位于 A 的第 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 行与第 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 列的交叉点上元素所组成的矩阵，记为 $A\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_t \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_t \end{bmatrix}$；求证：

(1) A 为对角优势阵时，它的任一 t 阶主子阵仍是对角优势阵；

(2) A 经一步高斯消去法（见 24 题）以后变为 $A'=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & a^T \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$，则 A_{22} 仍为对角优势阵；

(3) 若 A 还具有正对角元，则(2)中的 A_{22} 也具有正对角元.

64. A 的元素均为整数，求证：

A^{-1} 的元素均为整数的充要条件为 $|A|=\pm 1$.

65. 如果排列 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 有 s 个反序，求：排列 $\alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_1$ 的反序数.

66. 由

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0$$ 来证明：奇偶排列各占一半.

67. 求:
$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}\begin{vmatrix} \alpha_{1j_1} & \alpha_{1j_2} & \cdots & \alpha_{1j_n} \\ \alpha_{2j_1} & \alpha_{2j_2} & \cdots & \alpha_{2j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{nj_1} & \alpha_{nj_2} & \cdots & \alpha_{nj_n} \end{vmatrix}$$的值,

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对所有 n 级排列求和.

68. 一个有 n 个数位的 t 进制正整数: $\alpha=\alpha_{n-1}t^{n-1}+\alpha_{n-2}t^{n-2}+\cdots+\alpha_1t+\alpha_0$, 简记为 $\alpha=\overline{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_0}$; 求证: 当 $\alpha_i=\overline{\alpha_{n-1}^{(i)}\alpha_{n-2}^{(i)}\cdots\alpha_1^{(i)}\alpha_0^{(i)}}$ $(i=1,2,\cdots,n)$均被整数 m 整除, 则下列行列式 d 被 m 整除:
$$d=\begin{vmatrix} \alpha_{n-1}^{(1)} & \alpha_{n-2}^{(1)} & \cdots & \alpha_0^{(1)} \\ \alpha_{n-1}^{(2)} & \alpha_{n-2}^{(2)} & \cdots & \alpha_0^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1}^{(n)} & \alpha_{n-2}^{(n)} & \cdots & \alpha_0^{(n)} \end{vmatrix}.$$

69. 求证: 奇数阶反对称矩阵必奇异.

70. 设
$$F(t)=\begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix},$$
求证: $\dfrac{d}{dt}F(t)=\sum\limits_{j=1}^{n}D_j(t)$, 其中
$$D_j(t)=\begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{1j}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{2j}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}f_{nj}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

71. 设 $P(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{n-1} \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}^2 & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$,

其中 α_1、α_2、$\cdots$、α_{n-1} 是互不相同的数, 求证:

$P(\lambda)$是 λ 的$(n-1)$次多项式, 并求它的根.

*△72. 求证: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix}=-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots\alpha_n\beta_n)$;

当记 $x=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^T$, $y=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)^T$时, 可简记为:

$$\begin{vmatrix} I_n & y \\ x^T & 0 \end{vmatrix} = -x^T y.$$

*△73 (1) 求证: $\begin{vmatrix} A & y \\ x^T & 0 \end{vmatrix} = -x^T A^* y$,

其中 A^* 是方阵 A 的伴随矩阵, $x^T=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^T$.

(2) 求证: $\begin{vmatrix} A & y \\ x^T & \alpha \end{vmatrix} = \alpha|A| - x^T A^* y$,

当 A 非异时, $\begin{vmatrix} A & y \\ x^T & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha - x^T A^{-1} y)|A|$.

74. A 为方阵, 若 $\begin{vmatrix} A & a \\ b^T & \beta \end{vmatrix} = 0$, 求证: $\begin{vmatrix} A & a \\ b^T & \gamma \end{vmatrix} = (\gamma - \beta)\ |A|$.

△75. A 奇异, $A=\begin{bmatrix} A^{[n-1]} & a \\ b^T & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$; $A^{[n-1]}$(定义见 48 题)非奇异, 且记

$$A(\varepsilon)=\begin{bmatrix} A^{[n-1]} & a \\ b^T & \alpha_{nn}+\varepsilon \end{bmatrix},$$

求证: 对任何 $\varepsilon \neq 0$ 均有 $A(\varepsilon)$ 非奇异; 且当 $|A^{[n-1]}|>0$, $\varepsilon>0$ 时, $|A(\varepsilon)|>0$.

76. $A=(B, C)$, $C^T B=0$, 求证:

$|A^T A| = |B^T B|\,|C^T C|$.

77. (行列式乘法定理) A、B 均为 n 阶方阵, 求证:

$|AB|=|A|\,|B|$. (试用 21 题结果来证明)

78. $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, 每个子块均为同阶方阵, A_{11} 与 A_{21} 乘法可换, A_{11} 非异(此条件可去, 见 533 题), 求证: $|A|=|A_{11}A_{22}-A_{21}A_{12}|$.

从而, 特别有 $\begin{vmatrix} I & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{22}-A_{21}A_{12}|$. (提示: 用 25 题结果)

79. 设 $s_k=\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k$ $(k=1, 2, \cdots)$, 求证:

$$\begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

(提示: 用行列式乘法定理与范得蒙行列式)

△80. $E_{(n-i_1 i_2 \cdots i_r)}$ 表示从 n 阶幺阵中划去第 i_1、i_2、…、i_r 列后所成的矩阵, 现已知: $C=(E_{(n-i_1 i_2 \cdots i_r)}, B_{n\times r})$

(1) 说明 I_n 的任一主子阵(定义见 63 题)仍为幺阵, 而 I_n 的任一个 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 阶子阵, 只要不是主子阵, 总有一行或一列全为 0, 从而行列式为 0.

(2) 求证: $|C|=(-1)^s \det\left[B\binom{i_1 i_2 \cdots i_r}{\quad}\right]$, 其中 $B\binom{i_1 i_2 \cdots i_r}{\quad}$ 表示取 B 中第 i_1、i_2、…、i_r 行(与所有列的交叉点上)元素所成的子阵, s 是它在 C 中行、列足标之和: $s=(i_1+i_2+\cdots+i_r)+[(n-r+1)+\cdots+n]$.

*△81. 从矩阵 $B_{n\times r}$ 中任取 r 行 $(r<n)$ 组成矩阵 B_1, 剩下的行组成矩阵 B_2, 求证:

$$\begin{vmatrix} I_{n-r} & B_2 \\ B_2^T & B^TB \end{vmatrix} = |B_1|^2.$$

(提示：取上题的C，考虑乘积C^TC并注意20题(7°)的变换)

*82. $C = A_{r\times n}B_{n\times r}$，求证：(Cauchy公式)

(1) 当$r>n$时，$|C|=0$；

(2) 当$r<n$时，$|C| = \sum\limits_{(i_1i_2\cdots i_r)} \det\left[A\begin{pmatrix} \overline{\qquad\quad} \\ i_1i_2\cdots i_r \end{pmatrix}\right]\det\left[B\begin{pmatrix} i_1i_2\cdots i_r \\ \overline{\qquad\quad} \end{pmatrix}\right]$. 其中求和号下的$(i_1i_2\cdots i_r)$表示从1, 2, …, n中任选r个数为一个组合. $A(\overline{i_1i_2\cdots i_r})$表示取$A$中$i_1$、$i_2$、…、$i_r$列(与所有行)所成子阵.

(提示：(2)可用21题与80题的结果)

*83. 设$G = \begin{bmatrix} A_{r\times r} & B_{r\times n} \\ C_{n\times r} & O_{n\times n} \end{bmatrix}$，求证：

(1) 当$r<n$时，$|G|=0$；

(2) 当$r=n$时，$|G| = (-1)^n|B||C|$；

(3) 当$r>n$时，$|G| = (-)1^n\sum\limits_{(i)(j)}\det B\begin{pmatrix} i_1\cdots i_n \\ \overline{\qquad} \end{pmatrix}.\ \det C\begin{pmatrix} \overline{\qquad} \\ j_1\cdots j_n \end{pmatrix}\left[代余式A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_n \\ j_1\cdots j_n \end{pmatrix}\right]$.

其中求和号下的(i)、(j)分别表示从1、2、…、r中任选n个数i_1、…、i_n与j_1、…、j_n的组合.

(提示：应用Laplace定理先对B所占的列展开，再对C所占的行展开.)

*84. 设$A_{r\times r}$非异，$V = C_{n\times r}A^{-1}B_{r\times n}$，求证：

(1) $r<n$时，$|V|=0$；

(2) $r=n$时，$|V| = |A|^{-1}|B||C|$；

(3) $r>n$时，

$$|V| = |A|^{-1}\sum_{(i)(j)}\det B\begin{pmatrix} i_1\cdots i_n \\ \overline{\qquad} \end{pmatrix}\cdot\det C\begin{pmatrix} \overline{\qquad} \\ j_1\cdots j_n \end{pmatrix}\cdot\left[代余式\ A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_n \\ j_1\cdots j_n \end{pmatrix}\right]$$

(提示：用25题与83题的结论.)

*85. 已知A为$r\times r$矩阵，在$2\leqslant n<r$及A非异的情况下证明下列Jacobi定理：

$$\det A^*\begin{pmatrix} j_1\cdots j_n \\ i_1\cdots i_n \end{pmatrix} = |A|^{n-1}\left[代余式\ A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_n \\ j_1\cdots j_n \end{pmatrix}\right].$$

注意：在$n=1$时，无论$|A|$是否为0，恒视$|A|^{n-1}=1$，则定理显然是成立的；在$n\geqslant 2$且$|A|=0$时，定理也是成立的，见163题；若$n=r$，即为167题的结论.

(提示：由$A^* = |A|A^{-1}$及20题变换(7°)，再利用84题结论.)

86. 证明Lagrange恒等式：

(1) 在实数域内成立

$$\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i^2\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^n \beta_i^2\right] - \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i\right]^2 = \sum_{i<k}\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_k & \beta_k \end{vmatrix}^2.$$

(2) 在复数域内成立

$$\left[\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^n |\beta_i|^2\right] - \left|\sum_{i=1}^n \alpha_i\bar{\beta}_i\right|^2 = \sum_{i<k}\left|\det\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_k & \beta_k \end{pmatrix}\right|^2.$$