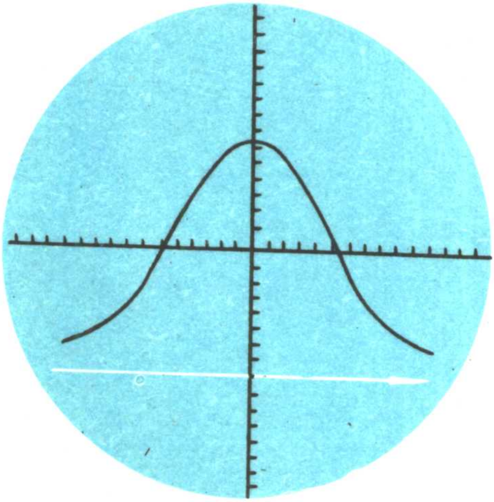
工程数学



中国人民解放军炮兵指挥学院

工 程 数 学

郝宪璞　邢俊英　编

中国人民解放军炮兵指挥学院

前　言

《工程数学》是为我院大专队学员编写的教材，内容包括行列式、矩阵、线性方程组及概率论与数理统计等基础知识，是为学员今后学习专业课提供必要的数学理论与方法。

本书第1～3章，9～11章由邢俊英编写，4～8章由郝宪璞编写。全书由郝宪璞同志统编定稿，最后由俞开堂教授、沈玉明副教授审阅。

在编写过程中，参阅了中山大学、北京理工大学等有关院校的教材。我室刘建芳同志对教材编写提出了许多宝贵意见，并为有关习题提供了解答，对此深表谢意。

由于编者水平所限，缺点、错误难免，请读者给予批评指正。

编　　者

一九九七年元月

目　　录

线性代数是一门数学学科，它的有关理论和方法是今后学习军事运筹学和军事自动化指挥等学科不可缺少的基础.由于学时所限，我们只学有关方程组等基本概念.

第一章 n 阶行列式

第一节 n 阶行列式的定义

在介绍 n 阶行列式的定义之前，作为预备知识我们先来看全排列与逆序数的概念.

一、全排列及其逆序数

在初等数学中学习过排列. 所谓排列就是 n 个不同元素选出 m 个元素排成一列，排列种数为 P_n^m，什么是全排列呢？顾名思义，n 个不同元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（简称排列）. n 个不同元素的所有排列种数为 $P_n^n=n!=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$.

例 1：用 1，2，3 三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

分析例 1 我们知道这个问题实质上就是把 1，2，3 作为三个不同元素的全排列问题，不同的排列为 123，132，213，231，312，321，不同的排列种数为 $P_3^3=3!=3\times2\times1=6$. 所以本题应为 $P_3^3=6$.

由上例中的不同的六个排列看到：有的排列是由小到大，有的则是由大到小，还有的大小相间，也就是排列的两元素

间有次序问题. 对于 n 个不同的元素，我们规定各元素之间有一个标准次序（例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序），于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

按照逆序数的奇偶性，把排列分为奇排列和偶排列. 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

下面我们来讨论 n 个元素为 1 到 n 这 n 个自然数的排列的逆序数的求法.

对于排列 312 我们很容易找到：它有 2 个逆序 31 和 32，故其逆序数为 2. 但当元素很多时，单个找容易出错. 为此我们引入元素的逆序数的概念. 设 P_1，$P_2 \cdots P_n$ 为这 n 个自然数的一个排列. 我们把排在元素 P_i（$i=1, 2, \cdots n$）前面且比 P_i 大的元素的个数称为元素 P_i 的逆序数（记为 t_i），全体元素的逆序数之总和 $t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$ 则为该排列的逆序数.

例 2：求排列 32514 的逆序数.

解：在排列 32514 中

3 排在首位，其逆序数为 0；

2 前面比 2 大的数有一个，故 2 的逆序数为 1；

5 是最大数，其逆序数为 0；

1 前面比 1 大的数有 3 个，故 1 的逆序数为 3；

4 前面比 4 大的数有 1 个，故 4 的逆序数为 1；

于是排列 32514 的逆序数为：

$$t=0+1+0+3+1=5$$

并且它为奇排列.

二、n阶行列式的定义

（一）二阶行列式

考虑两个未知量的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1}$$

利用初等数学中消元法或代入法可解得

当 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时方程组有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

我们看到 x_1，x_2 的表达式，分母都为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 只依赖于方程组的四个系数. 我们把它排成两行两列，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

D 正好等于实线（主对角线）上的两个元素的积减去虚线（次对角线）上两个元素的积，于是我们称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

为二阶行列式，其中 a_{ij} $(i=1, 2; j=1, 2)$ 为其第 i 行第 j 列的元素. 行列式通常用 D 或 D_1，D_2，…等来表示，有了二阶行列式的定义，上边 x_1，x_2 表达式中的分子，同样可用二阶行列式来表示.

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=D_1$$

$$a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=D_2$$

于是当 $D \neq 0$ 时 $\quad x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$. (1.1)

由此看到，解一个二元线性方程组的问题实质上在于求三个二阶行列式，D 是由方程组的未知量的系数组成的二阶行列式. D_1 是用常数项 b_1，b_2 换去 D 中第一列元素而得到的行列式. D_2 是 b_1，b_2 换去 D 中第二列元素而得到的行列式. 然后代入公式（1. 1）就可求出二元线性方程组的解，这种方法称之为行列式法.

例 3：利用行列式法解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3y_2 = 2 \\ x_1 - 5y_2 = 4 \end{cases}$

解：$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times (-5) - (1 \times 3) = -13 \neq 0$

$D \neq 0$ 方程组有唯一解.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times (-5) - 3 \times 4 = -22$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 2 \times 1 = 6$$

于是唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-22}{-13} = \frac{22}{13}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{6}{-13} = -\frac{6}{13}.$$

（二）三阶行列式

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (2)$$

我们也可用消元法和代入法求得其解为，当 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$ 时，

$x_1=$

$$\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$x_2=$

$$\frac{a_{11}b_2a_{33}+a_{21}b_3a_{13}+a_{23}a_{31}b_1-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

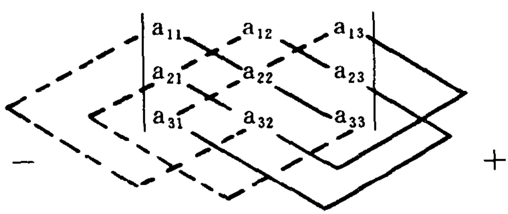
$x_3=$

$$\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

对于表达式 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ 我们可以记成如下的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

称它为三阶行列式，其中 a_{ij}（$i=1$，2，3；$j=1$，2，3）为行列式第 i 行第 j 列的元素，记为 D. 对于 D 式右边的六项代数式，我们可按对角线法则进行计算



（实线连接的三个元素之积为正项，虚线连接的三个元素之积为负项）有了三阶行列式定义和计算方法，我们再计算如下三个三阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D_1 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = D_2$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = D_3$$

则当 $D\neq0$ 时方程组（2）有唯一解，为

$$x_1=\frac{D_1}{D} \qquad x_2=\frac{D_2}{D} \qquad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.2}$$

D 又称为系数行列式. D_1，D_2，D_3 分别是用常数项来替换 D 中第一列（x_1 的系数），第二列（x_2 的系数），第三列（x_3 的系数）得到的三阶行列式. 由此得到：解一个三元线性方程组（2），首先计算四个三阶行列式，然后代入公式（1. 2）即可.

例 4：用行列式解方程组$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=1 \\ 3x_1+5x_2+2x_3=8 \\ x_1-2x_2-3x_3=-1 \end{cases}$

解：$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=-30+6+6+5+8+27=22\neq0$

$D\neq0$ 有唯一解

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=-15-6+16-5+4+72=66$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-48+2+3+8+4+9=-22$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&3&1\\3&5&8\\1&-2&-1\end{vmatrix}=-10-6+24-5+32+9=44$$

于是方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3 \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=-1 \qquad x_3=\frac{D_3}{D}=2\ .$$

（三）n 阶行列式

由二阶、三阶行列式的定义，我们可以类似地来定义 n 阶行列式. n 阶行列式如何定义呢？我们先来分析一下三阶行列式的规律：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{matrix}a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{matrix} \tag{3}$$

容易看到：

(i) (3) 式右边的每一项都恰是三个元素的乘积. 这三个元素位于不同的行，不同的列.

(ii) (3) 式右边的每一项，当行标（第一个下标）按标准次序 123 排列时，列标（第二个下标）为 1，2，3 的全排列，若用 $P_1P_2P_3$ 表示 1，2，3 的某个排列，则 (3) 式右端的任意项除正负号外可写与 $a_{1P_1}a_{2P_2}a_{3P_3}$，$P_1P_2P_3$ 的排列共 6 种，(3) 式右端有 6 项.

(iii) 各项的正负号与列标的排列对照：

带正号的三项列标排列是：123，231，312，它们都是偶排列；

带负号的三项列标排列是：132，213，321，它们都是奇排列. 因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$. 其中 t 为列标排列的逆序数.

由上分析知三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Sigma\ (-1)^t a_{1P_1} a_{2P_2} a_{3P_3}$$

其中 t 为排列 $P_1P_2P_3$ 的逆序数，Σ 表示对 1，2，3 三个数的所有排列 $P_1P_2P_3$ 取和.

类似地，我们可以把行列式推广到一般情形.

定义：我们把 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma\ (-1)^t a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n}$

称为 n 阶行列式.

其中 $P_1P_2\cdots P_n$ 为自然数 1，2，…n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，由于这样的排列共有 $n!$ 个，因此 Σ 为 $n!$ 项的代数和.

记作 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 简记作 $\Delta\ (a_{ij})$.

数 a_{ij} 称为行列式的第 i 行第 j 列的元素.

例 5：证明对角行列式（对角线上的元素是 λ_i，未写出的数都是 0）

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \text{ .}$$

证明：第一式是显然的．下面只证第二式．

若记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$ 则依行列式的定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

其中 t 为排列 n（n－1）…2，1 的逆序数．

$$t = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$　　证毕．

对角线以下（上）的元素都为 0 的行列式叫做上（下）三角行列式．它的值与对角行列式一样．

例 6：证明上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \text{ .}$$

证明：由于当 $j<i$ 时，$a_{ij}=0$　故 D 中可能不为 0 的元素 a_{iP_i} 其下标应有 $P_i \geqslant i$ 即 $P_1 \geqslant 1$，$P_2 \geqslant 2$，$P_3 \geqslant 3$，$\cdots P_n \geqslant n$

在所有排列 $P_1P_2\cdots P_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 1，2，…n，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，此项的符号 $(-1)^t=(-1)^0=1$　所以

$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

由该题知：上三角行列式就等于对角线元素之积．这个结果以后常用到．

第二节　行列式的性质

由上节可知利用二阶、三阶行列式的定义计算行列式不算困难，但对于高阶行列式，如计算五阶行列式就是 120 项的代数和，计算起来较困难．为了解决行列式的计算问题，就要先讨论行列式的性质．

性质 1：行列式 D 与它的转置行列式 D′相等．

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D′称为 D 的转置行列式，通常 D 的转置行列式记为 D′或 D^T.

例如：设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$　则 $D'=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

经计算 $D=D'=60$.

性质 2：互换行列式的两行（列），行列式变号．

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 C_i 表示行列式的第 i 列. 交换 i，j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i，j 两列记作 $C_i \leftrightarrow C_j$.

利用性质 2 可简化计算

例如：计算 $D=\begin{vmatrix}3&2&2\\0&0&5\\0&2&4\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}3&2&2\\0&2&4\\0&0&5\end{vmatrix}=-30$.

推论：如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

证：把这两行互换，有 $D=-D$　故 $D=0$.

性质 3：行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.（第 i 行乘以 k，记作 $r_i\times k$）.

推论：行列式中某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.（第 i 行提出公因子 k，记作 $r_i\div k$）.

利用性质 3 可简化计算.

例如：计算 $D=\begin{vmatrix}99&198\\34&17\end{vmatrix}=99\times17\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-5049$

由性质 2 和性质 3 我们会得到下面性质.

性质 4：行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

例如 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{11}&ka_{12}&ka_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=0$.

性质 5：若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和（例如第 i 列的元素都是两数之和）：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1i}+a'_{1i}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2i}+a'_{2i}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{ni}+a'_{ni}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$