研究生入学考试

数学复习指南

与模拟试题(1999)

北京大学数学科学学院教授

邵士敏 主编

北大教授编著

'99考研·数学

北京大学出版社

研究生入学考试数学复习指南与模拟试题(1999)

主　编　邵士敏

撰稿人　邵士敏　娄元仁　文　丽

　　　　周建莹　庄大蔚　张立昂

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

研究生入学考试数学复习指南与模拟试题/邵士敏主编. —北京:北京大学出版社,1998.5
ISBN 7-301-02548-3

Ⅰ.研… Ⅱ.邵… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.013

书　　名: 研究生入学考试数学复习指南与模拟试题(1999)
著作责任者: 邵士敏 主编
责 任 编 辑: 刘金海
标 准 书 号: ISBN 7-301-02548-3/G·265
出　版　者: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话: 出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032
排　印　者: 国防科工委印刷厂印刷
发　行　者: 北京大学出版社
经　销　者: 新华书店
787×1092毫米 16开本 16.625印张 415千字
1998年5月第一版 1998年5月第一次印刷
定　　价: 24.00元

前　言

为了帮助参加研究生入学数学考试的考生复习和应考，我们按照国家教委制定的全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学大纲的要求，编写了这本书.

本书包括“内容提要”与“模拟试题”两部分.“内容提要”部分叙述了数学大纲的全部内容，目的是为了帮助考生复习回忆要考的基本概念，基本定理和解题方法.“模拟试题”部分则对Ⅰ类至Ⅳ类数学，每类选编了4套题，共提供了16套模拟试题及解答.每套题中各部分所占比例及题型结构均按大纲的要求编排，题目内容基本上覆盖了大纲的要求.

在编写过程中，我们研究了数学大纲中对各部分内容要求的深度.“内容提要”侧重于叙述基本概念，基础知识，典型例题，并使之尽量符合大纲要求的深度.为了使“模拟试题”更接近实战的需要，我们参考了近几年的试题.并且在选题时，既注意选编一些基本题，也选一些较难的、需要经过思考的题，以提高考生的解题能力，使他们能较顺利地应考并进一步得到提高.本书中的概念、符号等均采用一般教科书的习惯用法，书中就不另作说明.

由于时间仓促，难免有疏误之处，望读者提出宝贵意见.

编　者

1998年3月于北京大学

目　　录

第一部分　内容提要

第二部分　模拟试题

第一部分　内容提要

高等数学

一　函数、极限、连续

1. 函数

(1) 函数的定义

设在同一过程中有两个变量 x, y, x 的变化域是 X. 若对 X 中每一个 x 值,依照某一规律,变量 y 都有唯一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x), \quad x\in X.$$

x 称为自变量,y 称为因变量, X 称为函数的定义域. 因变量 y 的变化域称为函数的值域,可以记作

$$y=f(X)=\{y\mid y=f(x), \quad x\in X\}.$$

在函数定义中,应注意对应关系 f 和定义域 X, 它们是函数定义中的两个要素.

(2) 函数的图形

函数 $y=f(x)\quad(x\in X)$ 的图形是指点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x), \quad x\in X\},$$

一般情形下,它是 xy 平面上的一条或几条曲线, 任何一条平行于 y 轴的直线,与曲线 $y=f(x)$ 至多相交于一点.

(3) 函数的几种常见特性

有界性　若 $\exists\ M>0$, $\ni\cdot\ |f(x)|\leqslant M$, $\forall x\in X$,[①] 则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

有界函数 $f(x)$ 的图形 $y=f(x)$ 的特点是它界于二直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

奇偶性　设有函数 $y=f(x)$, $x\in X$, 其中 X 关于原点对称(即:若 $x\in X$, 则 $-x\in X$).

若 $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in X$, 则称 $y=f(x)$ 为 X 上的奇函数.

若 $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in X$, 则称 $y=f(x)$ 为 X 上的偶函数.

奇函数的图形对称于原点,偶函数的图形对称于 y 轴.

单调性　若 $\forall x_1, x_2\in X$, 当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \qquad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 在 X 上单调上升(或单调下降). 此处的上升亦称递增,下降亦称递减.

若 $\forall x_1, x_2\in X$, 当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)<f(x_2) \qquad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 在 X 上严格单调上升(或严格单调下降).

---

① 符号 $\exists$ 表示"存在", $\ni\cdot$ 表示"使得", $\forall$ 表示"对于任意的",或"任给".

周期性　设有函数 $y=f(x)$，　$x\in X$. 若 $\exists$ 常数 $T>0$，$\ni\cdot\ \forall x\in X$，都有 $x+T\in X$，且有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为周期.

显然，任何周期函数都有无穷多个周期，若其中有一个最小的正数，则称它为最小正周期，亦称周期.

"周期"通常指最小正周期. 但周期函数未必都有最小正周期.

(4) 复合函数

设有函数

$$y=f(u)\qquad u\in U,$$

$$u=\varphi(x)\qquad x\in X\quad \text{值域为 } U',$$

若 $U'\subseteq U$，则在 X 上确定了一个新函数

$$y=f[\varphi(x)]\qquad x\in X,$$

称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，u 称为中间变量.

(5) 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Y. 若对 Y 中每一个 y 值，都可由方程 $y=f(x)$ 唯一确定出 x 值，则得到一个定义在 Y 上的函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y)\qquad y\in Y,$$

易知，严格单调函数必有反函数，并且其反函数也是严格单调的.

函数 $y=f(x)$　$(x\in X)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ $(y\in Y)$ 的图形相同.

在习惯上，为了强调对应规律 f^{-1}，并将因变量仍记作 y，通常将反函数写为

$$y=f^{-1}(x)\qquad x\in Y,$$

它的图形与 $y=f(x)$　$(x\in X)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(6) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数，称为初等函数.

基本初等函数是指以下六类函数：常数函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数.

2. 极限

(1) 数列极限的定义

设有数列 $\{x_n\}$ 及常数 a. 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 号码(即正整数) N，$\ni\cdot$ 当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称当 n 趋向于无穷时，$\{x_n\}$ 以 a 为极限，记作

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=a,$$

或

$$x_n\to a\qquad (n\to+\infty).$$

"$n\to+\infty$"称为极限过程.

(2) 数列极限的几何意义

$\forall$ 点 a 的 ε 邻域 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，所有的点

$$x_{N+1},\ x_{N+2},\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

全部落在邻域 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 之内.

(3) 函数极限的定义

定义 1 ($\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$) 设 $f(x)$ 在 x 充分大时有定义，A 为常数．若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, $\ni$・当 $x>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋向于正无穷时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,$$

或

$$f(x)\to A\qquad(x\to+\infty).$$

"$x\to+\infty$"称为极限过程．

可类似给出极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义．

定义 2 ($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$) 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时有定义，A 为常数．若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, $\ni$・当 $|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋向于无穷时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,$$

或

$$f(x)\to A\qquad(x\to\infty).$$

定义 3 ($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$) 设 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义(点 x_0 本身可能除外)，A 为常数．若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\ni$・当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋向于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,$$

或

$$f(x)\to A\qquad(x\to x_0).$$

极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的几何意义是：$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当点 $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 但 $x\neq x_0$

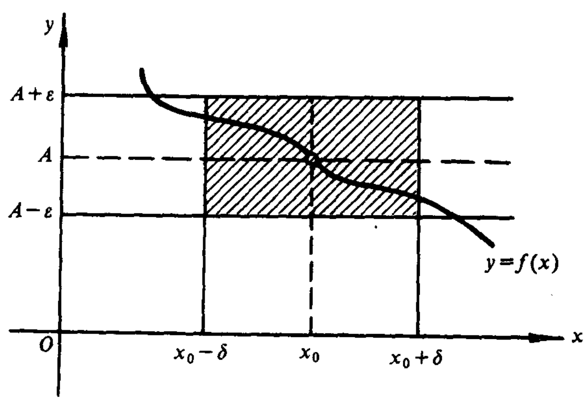

图 0-1-1

时，相应的点$(x,f(x))$全部落在图 0-1-1的带形区域(图中带斜线部分)内.

定义 4 (右极限$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$) 设$f(x)$在点$x_0$的右近旁有定义，$A$为常数. 若$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\ni\cdot$ 当$0<x-x_0<\delta$(即$x_0<x<x_0+\delta$)时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称$f(x)$在点x_0处的右极限为A，记作

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A,$$

或

$$f(x)\to A\qquad(x\to x_0+0),$$

有时也记作 $f(x_0+0)=A$.

可类似定义左极限 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}=A$.

左、右极限统称为单侧极限.

(4) 定理 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0\pm0}f(x)=A$.[①]

类似地有

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=A.$$

以上“$x\to x_0$”等，均称为极限过程.

(5) 无穷小量与无穷大量

定义 1 在某一极限过程中，以 0 为极限的变量(数列或函数)称为无穷小量.

无穷小量的阶的比较:

设α, β是同一极限过程中的两个无穷小量.

若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=K\neq0$，则称$\alpha$与$\beta$是同阶(或同级)无穷小量. 特别地，

若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称$\alpha$与$\beta$是等价无穷小量，记作$\alpha\sim\beta$.

若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称$\alpha$是比$\beta$更高阶的无穷小量，记作

$$\alpha=o(\beta).$$

定义 2 设有数列$\{x_n\}$. 当$n\to+\infty$时，若绝对值$|x_n|$无限变大，即$\forall M>0$, $\exists N$, $\ni\cdot$ 当$n>N$时，恒有

$$|x_n|>M,$$

则称$\{x_n\}$当$n\to+\infty$时为无穷大量，记作

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\infty.$$

可类似定义 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,

以及 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0\pm0}f(x)=\infty$, $\pm\infty$.

---

① 记号“$\Longleftrightarrow$”指充分必要条件.

(6) 极限的四则运算

定理　若 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则

(i) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$,

(ii) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$,

特别地，$\lim K\cdot f(x)=K\lim f(x)$, K 为常数，

(iii) 当 $\lim g(x)\neq 0$ 时，有

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

(7) 极限存在准则

准则Ⅰ(夹逼定理)　若在点 x_0 的某邻域内(点 x_0 本身可能除外)恒有

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x),$$

且　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,

则

$$\lim_{x\to x_0}h(x)=0.$$

夹逼定理的数列形式为：若 $\exists N$, $\ni\cdot$ 当 $n>N$ 时，恒有

$$x_n\leqslant z_n\leqslant y_n,$$

且　$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=A$,

则

$$\lim_{n\to+\infty}z_n=A.$$

准则Ⅱ　单调上升(或下降)且有上界(或下界)的数列必有极限.

(8) 两个重要极限

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

或

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}.$$

(9) 极限的不等式性质

(i) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$, 且 $A<B$, 则必 $\exists$ 正数 r, $\ni\cdot$ 当 $0<|x-x_0|<r$

时，恒有

$$f(x)<g(x).$$

(ii) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 且 ∃ 正数 r, ∋· 当 $0<|x-x_0|<r$ 时,恒有$f(x)<g(x)$, 则

$$A\leqslant B.$$

3. 连续性

(1) 函数在某一点处连续

定义 1　设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义. 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 否则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续,此时 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点.

定义 2　若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

可类似定义左连续. 左、右连续统称为单侧连续.

(2) 间断点的分类

(i) 可去(或可改)间断点

若 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义,但极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在; 或 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.

(ii) 第一类间断点

若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限都存在,但不相等: $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

可去间断点有时也称为第一类间断点.

(iii) 第二类间断点

若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在,则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

(3) 函数在某一区间连续

定义 3　若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点处都连续,则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续,记作 $f\in C(a, b)$.

定义 4　若 $f\in C(a, b)$, 且在点 a 处右连续,在点 b 处左连续,则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,记作 $f\in C[a, b]$.

(4) 连续函数的运算

定理 1(四则运算)　若 $f(x)$, $g(x)$ 在点 x_0 处连续,则

(i) 和、差、积

$$f(x)\pm g(x) \qquad f(x)\cdot g(x)$$

在点 x_0 处连续,

(ii) 当 $g(x_0)\neq 0$ 时,商

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

在点 x_0 处连续.

定理 2(复合函数的连续性) 设 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$. 若 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续,且 $y=f(u)$ 在对应点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续,则 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

定理 3(反函数的连续性) 若 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调上升(或下降),并且连续,则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在值域区间 $[f(a), f(b)]$(或 $[f(b), f(a)]$)上也严格单调上升(或下降),并且连续.

对于开区间 (a, b) 或无穷区间,有类似定理.

(5) 初等函数的连续性

一切初等函数在各自的定义域内都是连续的.

(6) 闭区间上连续函数的性质

定理 1(最大值、最小值定理) 若 $f\in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值和最小值,即 $\exists x_1, x_2\in[a, b]$, $\ni\cdot$ $f(x_1)=\max\limits_{x\in[a, b]}\{f(x)\}$, $f(x_2)=\min\limits_{x\in[a, b]}\{f(x)\}$.

推论 闭区间上的连续函数是有界的.

定理 2(中间值定理,或介值定理) 若 $f\in C[a, b]$, 且 $f(a)\neq f(b)$, μ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一实数,则在 (a, b) 内部至少存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=\mu$.

推论 1(零点存在定理) 若 $f\in C[a, b]$, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 则在 (a, b) 内部至少存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=0$.

推论 2 若 $f\in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 可以取到介于其最大值 M 与最小值 m 之间的一切实数.

二 一元函数微分学

1. 导数与微分

(1) 导数的概念

定义 1 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义. 给 x_0 以改变量 $\Delta x(\Delta x\neq 0)$, 使 $x_0+\Delta x$ 仍属于上述邻域,便得到 y 的相应改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, 作比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

令 $\Delta x\to 0$, 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数(或微商),记作

$$f'(x_0),\quad 或\ y'(x_0),\quad y'|_{x=x_0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

这时,称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导.

几何意义 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 处有不垂直于 x 轴的一条切线,且此切线的斜率等于 $f'(x_0)$(图 0-1-2).

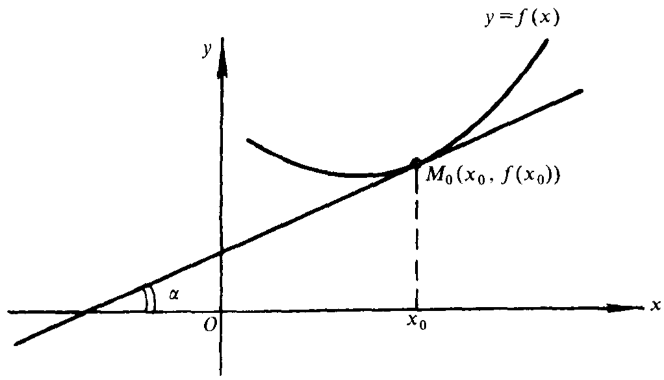

图 0-1-2

即 $$f'(x_0)=\tan\alpha \quad \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right).$$

易知，曲线 $y=f(x)$ 在点 M_0 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线方程为

$$y-y_0=\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (\text{当} f'(x_0)\neq 0).$$

定义 2　若 $y=f(x)$ 在开区间 X(有限或无穷)的每一点 x 处都可导，则在 X 内确定了一个新函数 $y'=f'(x)$，称为 $y=f(x)$ 的导函数.

(2) 可导与连续的关系

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则必在该点处连续.

(3) 单侧导数

左导数是指：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，

右导数是指：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

左、右导数统称为单侧导数.

定理　$f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Longleftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

(4) 导数的运算法则

(i) 四则运算法则

若 $u(x)$, $v(x)$ 在点 x 处可导，则它们的和、差、积、商(此时分母 $\neq 0$)在点 x 处可导，且有公式

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x),$$
$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

特别地，$[K\cdot u(x)]'=K\cdot u'(x)$　　K 为常数，

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \qquad v(x)\neq 0.$$

(ii) 复合函数求导法则

设 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$. 若 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，$y=f(u)$ 在对应点 $u(=\varphi(x))$ 处可导，则 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导，且有公式

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

(iii) 隐函数求导法则

若方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 为 x 的可导函数，则可在恒等式 $F[x,y(x)]=0$ 两边对 x 求导(这时要用到复合函数求导法则)，再解出 y' 即可.

(iv) 反函数求导法则

若函数 $y=f(x)$ 在开区间 X(有限或无穷)内严格单调，并且连续；又，$y=f(x)$ 在 X 的点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应点 $y_0(y_0=f(x_0))$ 处可导，且有公式

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

(5) 导数的基本公式

$$C'=0 \qquad (x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a \qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\sin x)'=\cos x \qquad (\cos x)'=-\sin x$$

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

(6) 高阶导数

设 $y=f(x)$ 在区间 X 内存在导函数 $y'=f'(x)$. 若 $f'(x)$ 在点 $x_0\in X$ 处可导，则称此导数为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的二阶导数，记作

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x},$$

或 $y''(x_0)$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$.

可类似定义 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶导数

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}.$$

一阶、二阶导数的物理意义：设物体的运动规律为 $s=s(t)$，则 $s'(t)=v(t)$ 为物体的瞬时速度，$s''(t)=v'(t)=a(t)$ 为物体的瞬时加速度.

(7) 微分的概念

定义 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义．给 x_0 以微小改变量 $\Delta x(\Delta x\neq 0)$，使 $x_0+\Delta x$ 仍在上述邻域内，便得到

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

若∃常数 A(与 Δx 无关)，使得

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\qquad(\text{当 }\Delta x\to 0),\tag{2.1}$$

则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，且称 $A\cdot\Delta x$ 为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记作

$$dy=A\cdot\Delta x,$$

或 $df(x_0)=A\cdot\Delta x$.

定理(可微与可导的关系) $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充要条件是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A=f'(x_0)$，即有

$$dy=f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

几何意义 在图 0-1-3 中，$f'(x_0)=\tan\alpha$，$\overline{PQ}=(\Delta x)\tan\alpha=f'(x_0)\cdot\Delta x=dy$，这就是微分，它是切线纵坐标的改变量．

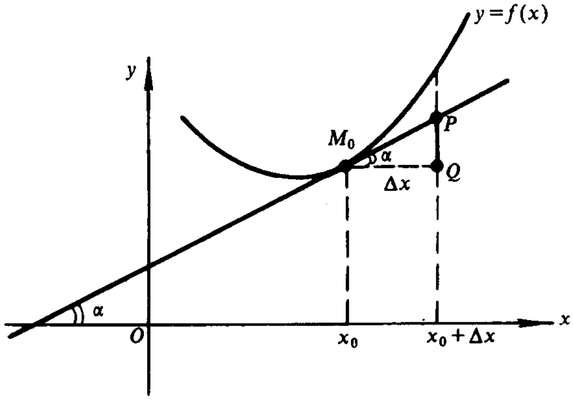

图 0-1-3

(8) 微分的计算

(i) 微分的基本公式

由 $\Delta x=dx$ 知

$$dC=0\qquad d(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}dx$$

$$d(a^x)=a^x\ln a\,dx\qquad d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx$$

$$d(e^x)=e^x dx\qquad d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

$$d(\sin x)=\cos x\,dx\qquad d(\cos x)=-\sin x\,dx$$

$$d(\tan x)=\frac{1}{\cos^2 x}dx\qquad d(\cot x)=-\frac{1}{\sin^2 x}dx$$

$$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\qquad d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx\qquad d(\operatorname{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$$

(ii) 微分的四则运算

若 $u(x)$, $v(x)$ 可微,则

$$\mathrm{d}(u \pm v)=\mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}(u \cdot v)=u\,\mathrm{d}v+v\,\mathrm{d}u,$$

特别地, $\mathrm{d}(K \cdot u)=K\mathrm{d}u$ $\quad K$为常数,

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2} \qquad (v \neq 0).$$

(iii) 复合函数求微分

设 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$. 若 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可微, $y=f(u)$ 在对应点 $u(=\varphi(x))$ 处可微,则 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可微,且有

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u, \tag{2.2}$$

其中 $\mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x$.

(2.2) 式所表示的性质称为一阶微分形式的不变性.

由一阶微分形式的不变性,可推出由参数方程所确定的函数的微分法:

若函数 $y=y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad t \in (\alpha, \beta)$$

给出, $\varphi'(t)$ 和 $\psi'(t)$ 在 (α, β) 内存在,且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}[\psi(t)]}{\mathrm{d}[\varphi(t)]}=\frac{\psi'(t)\mathrm{d}t}{\varphi'(t)\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

(9) 微分在近似计算中的应用

(i) 近似计算函数改变量

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微,则有近似公式

$$\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (\text{当 } |\Delta x| \ll 1). \tag{2.3}$$

(ii) 近似计算函数值

由 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 及 (2.3) 式得

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (|\Delta x| \ll 1). \tag{2.4}$$

当 $x_0=0$ 时, (2.4) 式可写为

$$f(x) \approx f(0)+f'(0) \cdot x \qquad (|x| \ll 1). \tag{2.5}$$

由 (2.5) 式可得到以下常用的近似公式: 当 $|x| \ll 1$ 时,有

$$\begin{array}{ll} \mathrm{e}^x \approx 1+x & \ln(1+x) \approx x, \\ \sin x \approx x & \tan x \approx x \\ \arcsin x \approx x & \arctan x \approx x, \\ (1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x & (\alpha \text{ 为实数}), \end{array}$$

特别地, $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x \quad (|x| \ll 1)$, $\qquad \sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x \quad (|x| \ll 1)$.

(iii) 估计误差

设有两个量 x, y. 量 x 由测量得到,量 y 由可微函数 $y=f(x)$ 求出. 若已知 x 的绝对误差 $|\Delta x|<\delta$, 则 y 的

绝对误差 $\qquad |\Delta y| \approx |f'(x) \cdot \Delta x| \leqslant |f'(x)| \cdot \delta,$