量子力学习题精选与剖析

（第二版） 上册

钱伯初
曾谨言 著

科学出版社

内 容 简 介

本书是作者在北京大学和兰州大学讲授量子力学课程基础上，精选内容新颖、难度较大的习题汇集. 这些题大部分选自近年来国内外研究生试题和资格考试题，全部习题均给出了详细的分析和解答，其中有些解法是作者独创的. 这次再版，为配合大学生和研究生的需要，分成了上下册，上册包括 Schrödinger 方程、δ 势场中粒子的运动、谐振子、力学量的算符表示、中心力场、角动量、磁场中粒子的运动、定态微扰论、变分法、量子跃迁、弹性散射. 本书可以作为量子力学的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

量子力学习题精选与剖析　上册/钱伯初，曾谨言著 . 2 版. -北京：科学出版社，1999. 1

ISBN 7-03-006760-6

I. 量…　II. ① 钱… ② 曾…　III. 量子力学-高等学校-习题　IV. 0413. 1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 13163 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

北京双青印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1988 年 4 月第 一 版　　开本：850×1168　1/32

1999 年 1 月第 二 版　　印张：15 7/8

1999 年 1 月第三次印刷　　字数：418 000

印数：11 239—14 738

定 价：26.00 元

前　　言

物理学的各门基础理论课，如果脱离了在具体问题中的应用，初学者就很难深入理解和掌握其基本概念和原理的实质. 对于量子力学，尤其是这样. 凡是有一些教学和科研实践经验的人，对此都会有同感. 做习题就是一种初步地运用基本概念和原理来处理一些简单的或理想化了的问题的训练. 在教学中我们发现，有相当一部分学生，他们可以将教科书中讲述的原理原封不动地复述出来，但是不会做题，更不会应用基本原理去处理具体问题. 更有甚者，不少人在学过《高等量子力学》课程之后，仍对某些很简单的量子力学问题束手无策. 这种"知识多，能力差"的通病应该引起我们深思. 我们认为，通过基础课的教学，不仅要向学生传授知识，更重要的是培养思考和解决问题的能力.

从近年来国外许多大学的量子力学新教材、习题、试题以及研究生资格考试题来看，其特点是难度高，灵活性大，反映量子力学在各前沿研究领域中应用的内容较多. 特别是，国外许多大学的研究生资格考试题有相当大一部分是从科研前沿课题中直接提取出来的. 国内的学生碰到这些问题时，往往感到无从下手. 近年来，由于教学的需要，我们接触了大量的这类题. 为了满足国内广大师生的要求，我们精选了 370 道有代表性的习题，作了较深入和新颖的剖析，整理成本书. 书中习题的解答，绝大多数都是我们自己给出的，即原始的(original)而不是转抄的. 解法力求简明，直截了当. 有些题，给出了多种解法，以便读者对照比较，有利于深入了解各种解法之间的内在联系. 我们希望读者能够以研究的态度阅读本书，这样才能较好地领会并掌握各种方法的精神实质，做到举一反三. 我们相信，凡是认真钻研了这本书的读者，对于量子力学基本

概念和原理的理解程度,以及应用量子力学处理具体问题的能力,一定会有较大的提高.

希望本书的出版,对于进一步提高我国的量子力学教学水平有所裨益.不妥当和不正确之处,在所难免,诚恳希望广大读者提出批评指正.

作　者

1988 年

第二版序言

本书自1988年出版以来，受到广大读者和教师的热诚欢迎，作者曾经收到很多读者来信，认为：本书不仅对于帮助初学者确切掌握量子力学的基本概念和原理很有帮助，而且有助于初学者应用量子力学理论去处理和分析具体问题，以及掌握各种计算方法和技巧。这对于学习后继课和从事科研工作都很有用。一些有志深造的读者（包括研究生，出国留学生）几乎人手一册。本书还在台、港、澳和海外华裔读者中广泛流传。虽经大量重印，仍不能满足读者要求。

为适应目前国内情况，本书第二版分上、下两册发行，并增选了一些新的题目。大体说来，上册内容针对本科生量子力学课，下册则针对研究生的高等量子力学课。但此界线是很难划分的，读者可根据自己需要来选用。希望本书能对提高我国的量子力学教学水平有一点贡献。

作　者

1998年

目　录

第一章 Schrödinger 方程 一维运动

1.1 设 $\psi_1(\boldsymbol{r},t)$和 $\psi_2(\boldsymbol{r},t)$是Schrödinger方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V(\boldsymbol{r})\psi$$

的两个解,证明 $\int\psi_1^*\psi_2 d^3x$ 与时间无关.

证 ψ_1 和 ψ_2 分别满足 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_1+V\psi_1 \tag{1}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_2+V\psi_2 \tag{2}$$

以 ψ_1^* 左乘式(2),ψ_2 左乘式(1)之共轭方程,再相减,即得

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1^*\psi_2)&=\frac{\hbar^2}{2m}(\psi_2\nabla^2\psi_1^*-\psi_1^*\nabla^2\psi_2)\\&=\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot(\psi_2\nabla\psi_1^*-\psi_1^*\nabla\psi_2)\end{aligned}$$

再对全空间积分,得到

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{d}{dt}\int\psi_1^*\psi_2 d^3x&=\frac{\hbar^2}{2m}\int\nabla\cdot(\psi_2\nabla\psi_1^*-\psi_1^*\nabla\psi_2)d^3x\\&=\frac{\hbar^2}{2m}\oint(\psi_2\nabla\psi_1^*-\psi_1^*\nabla\psi_2)\cdot d\boldsymbol{s}\end{aligned} \tag{3}$$

其中,$d\boldsymbol{s}$ 为面元,按照波函数在无穷远处迅速趋于零的条件,式(3)右端之面积分为零,故得

$$\frac{d}{dt}\int\psi_1^*\psi_2 d^3x=0$$

亦即 $\int\psi_1^*\psi_2 d^3x$ 与时间无关.

1.2 粒子在一维势场 $V(x)$ 中运动，试证明：属于不同能级的束缚态波函数互相正交.

证 设 ψ_1、ψ_2 分别为属于能级 E_1、E_2 的束缚态波函数. 由于是一维束缚 态，ψ_1、ψ_2 都可以取为实函数，故只需证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1(x)\psi_2(x)\mathrm{d}x = 0$$

ψ_1 和 ψ_2 均应满足定态Schrödinger方程，即

$$\psi_1'' = \frac{2m}{\hbar^2}[V(x)-E_1]\psi_1 \tag{1}$$

$$\psi_2'' = \frac{2m}{\hbar^2}[V(x)-E_2]\psi_2 \tag{2}$$

以 ψ_2 左乘式(1)，ψ_1 左乘以(2)，再相减，即得

$$\begin{aligned}\frac{2m}{\hbar^2}(E_2-E_1)\psi_1\psi_2 &= \psi_2\psi_1''-\psi_1\psi_2'' \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\psi_2\psi_1'-\psi_1\psi_2')\end{aligned}$$

对全空间积分，得到(束缚态波函数在无穷远处必须趋于 0)

$$\begin{aligned}\frac{2m}{\hbar^2}(E_2-E_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1\psi_2\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\psi_2\psi_1'-\psi_1\psi_2')\mathrm{d}x \\ &= (\psi_2\psi_1'-\psi_1\psi_2')\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0\end{aligned}$$

因此，当 $E_2\neq E_1$，就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1\psi_2\mathrm{d}x = 0 \tag{3}$$

亦即 ψ_1 与 ψ_2 正交.

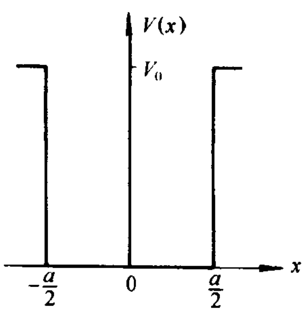

图 1.3

1.3 粒子在深度为 V_0，宽度为 a 的直角势阱(如图 1.3)中运动，求

(a) 阱口刚好出现一个束缚态能级(即 $E\approx V_0$)的条件；

(b) 束缚态能级总数. 并和无限深势阱作比较.

解 粒子能量 E 小于 V_0 时为束缚态，E 大于 V_0 时为游离态. 能量本征方程为

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\psi = 0 \tag{1}$$

令

$$\sqrt{2mV_0}/\hbar = k_0, \qquad \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar = \beta \tag{2}$$

式(1)可以写成

$$\begin{cases} \psi'' + \dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0, & |x| \leqslant a/2 \ (\text{阱内}) \quad (3) \\ \psi'' - \beta^2\psi = 0, & |x| \geqslant a/2 \ (\text{阱外}) \quad (4) \end{cases}$$

无限远处束缚态波函数应趋于 0，因此式(4)的解应取为

$$\psi(x) = Ce^{-\beta|x|}, \qquad |x| \geqslant a/2 \tag{5}$$

当阱口刚好出现束缚态能级时，$E \approx V_0$，$\beta \approx 0$，因此

$$\psi'(x) = \pm\beta Ce^{-\beta|x|} \approx 0, \qquad |x| \geqslant a/2 \tag{6}$$

阱内波函数可由式(3)解出，当 $E \approx V_0$，解为

$$\begin{aligned} &\text{偶宇称} \quad \psi(x) = \cos k_0 x, \\ &\text{奇宇称} \quad \psi(x) = \sin k_0 x, \end{aligned} \qquad |x| \leqslant a/2 \tag{7}$$

阱内、外 ψ 和 ψ' 应该连续，而由式(6)可知，$x = a/2$ 处，$\psi' = 0$，将这条件用于式(7)，即得

$$\begin{aligned} &\text{偶宇称} \quad \sin\frac{k_0 a}{2} = 0, \qquad k_0 a = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \cdots \\ &\text{奇宇称} \quad \cos\frac{k_0 a}{2} = 0, \qquad k_0 a = \pi, 3\pi, 5\pi, \cdots \end{aligned} \tag{8}$$

亦即阱口刚好出现束缚能级的条件为

$$k_0 a = n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{9}$$

即

$$\boxed{2mV_0 a^2/\hbar^2 = n^2\pi^2} \tag{10}$$

这种类型的一维势阱至少有一个束缚能级. 因此，如 $2mV_0a^2/\hbar^2 < \pi^2$，只存在一个束缚态，偶宇称(基态). 如 $2mV_0a^2/\hbar^2$

$=\pi^2$,除基态外,阱口将再出现一个能级(奇宇称态),共二个能级.如 $2mV_0a^2/\hbar^2=(2\pi)^2$,阱口将出现第三个能级(偶宇称).依此类推.由此可知,对于任何 V_0a^2 值,束缚态能级总数为

$$N=1+\left[\frac{a}{\hbar\pi}\sqrt{2mV_0}\right] \tag{11}$$

其中符号[A]表示不超过 A 的最大整数.

当粒子在宽度为 a 的无限深方势阱中运动时,能级为

$$E_n=\frac{1}{2m}\left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2, \qquad n=1,2,3,\cdots$$

则 $E\leqslant V_0$ 的能级数为

$$n=\left[\frac{a}{\pi\hbar}\sqrt{2mV_0}\right]=N-1 \tag{12}$$

也就是说,如果只计算 $E\leqslant V_0$ 的能级数,则有限深(V_0)势阱的能级数比无限深势阱的能级数多一个.注意,后者的每一个能级均一一对应地高于前者的相应能级(参看下册题5.5).

1.4 对于直角势阱(深度为 V_0,宽度为 a)的第 n 个束缚态 ψ_n、E_n,在 $V_0\gg E_n$ 条件下,计算

(a) 粒子在阱外出现的概率;

(b) $V(x)$ 和 $V^2(x)$ 的平均值,并和 E_n 比较.

解 以偶宇称态为例.能量本征方程[见题1.3,式(3)、(4)]可以写成

$$\begin{cases}\psi''+k^2\psi=0, & |x|\leqslant a/2\ (\text{阱内})\\ \psi''-\beta^2\psi=0, & |x|\geqslant a/2\ (\text{阱外})\end{cases} \tag{1}$$

其中

$$k=\sqrt{2mE}/\hbar, \qquad \beta=\sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar \tag{2}$$

注意在 $V_0\gg E$ 条件下,$\beta\gg k$.

式(1)的偶宇称解为

$$\begin{aligned}&\psi=\cos kx, && |x|\leqslant a/2\\ &\psi=Ce^{-\beta|x|}, && |x|\geqslant a/2\end{aligned} \tag{3}$$

$x=a/2$ 处 ψ 应连续，由此得出

$$C=\mathrm{e}^{\beta a/2}\cos\frac{ka}{2} \tag{4}$$

$x=a/2$ 处 ψ' 也应连续，由此得出

$$C=\frac{k}{\beta}\mathrm{e}^{\beta a/2}\sin\frac{ka}{2}$$

和式(4)相除，即得能级公式

$$\tan\frac{ka}{2}=\frac{\beta}{k} \tag{5}$$

在 $\beta\gg k$ 条件下，式(5)的解为

$$ka\approx n\pi,\qquad n=1,3,5,\cdots \tag{6}$$

代入式(2)，即得能级为

$$E_n=\frac{\hbar^2k^2}{2m}\approx\frac{1}{2m}\left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2 \tag{7}$$

这正是无限深势阱的能级公式．

现在计算粒子在阱内、外出现的概率．由式(3)、(4)容易求出

$$\begin{aligned}\int_{\text{阱外}}|\psi|^2\mathrm{d}x &= 2C^2\int_{a/2}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\beta x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{C^2}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta a}=\frac{1}{\beta}\cos^2\frac{ka}{2}\end{aligned} \tag{8}$$

$$\int_{\text{阱内}}|\psi|^2\mathrm{d}x = 2\int_0^{a/2}\cos^2 kx\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\left(1+\frac{\sin ka}{ka}\right) \tag{9}$$

考虑到 $ka\approx n\pi(n=1,3,5,\cdots)$，$\sin ka$ 和 $\cos(ka/2)$ 均接近于零，可知粒子出现在阱外概率远小于阱内概率．而且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2\mathrm{d}x\approx\int_{\text{阱内}}|\psi|^2\mathrm{d}x\approx\frac{a}{2}$$

$$\text{阱外概率}=\frac{\int_{\text{阱外}}|\psi|^2\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2\mathrm{d}x}\approx\frac{2}{\beta a}\cos^2\frac{ka}{2} \tag{10}$$

利用能级公式(5)，易得

$$1+\tan^2\frac{ka}{2}=\frac{k^2+\beta^2}{k^2}=\frac{V_0}{E}$$

$$\boxed{\cos^2\frac{ka}{2}=\frac{E}{V_0}} \tag{11}$$

代入式(10)，即得

$$\text{阱外概率}=\frac{2E}{a\beta V_0}\approx\frac{2\hbar}{a\sqrt{2mV_0}}\frac{E}{V_0} \tag{12}$$

考虑到 $V_0\gg E$ 和能级公式(7)，易见

$$\sqrt{2mV_0}\gg n\pi\hbar/a \tag{13}$$

因此，

$$\text{阱外概率}\ll\frac{2E}{n\pi V_0} \tag{14}$$

最后计算 $V(x)$和 $V^2(x)$平均值．利用式(12)，

$$\overline{V(x)}=(\text{阱外概率})\ V_0\approx\frac{2\hbar E}{a\sqrt{2mV_0}} \tag{15}$$

$$\overline{V^2}=(\text{阱外概率})\ V_0^2\approx\frac{\hbar E}{ma}\sqrt{2mV_0} \tag{16}$$

再利用式(13)，即可和 E_n(即 E)作出比较，

$$\boxed{\overline{V(x)}\ll\frac{2E_n}{n\pi},\qquad \overline{V^2}\gg\frac{n\pi\hbar^2E}{ma^2}\approx\frac{2}{n\pi}E_n^2} \tag{17}$$

1.5 粒子在无限深方势阱(宽度为 a)中运动，处于第 n 个束缚态 ψ_n，求粒子对于每一侧阱壁的平均作用力．

解 无限深方势阱可以视为有限深(深度为 V_0)势阱当 $V_0\longrightarrow\infty$的极限情形，即

$$V(x)=\begin{cases}0, & |x|<a/2\\ V_0, & |x|\geqslant a/2\end{cases}\qquad (V_0\longrightarrow\infty) \tag{1}$$

粒子所受作用力为$-\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$，粒子对阱壁的作用力为

$$F(x)=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=V_0\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)-V_0\delta\left(x+\frac{a}{2}\right) \tag{2}$$

其中第一项作用于阱壁右侧($x=a/2$)，第二项作用于阱壁左侧

$(x=-a/2)$. 第一项的平均值为

$$\langle F_{右}\rangle=\frac{\int|\psi|^2V_0\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\mathrm{d}x}{\int|\psi|^2\mathrm{d}x}=\frac{V_0\left|\psi\left(\frac{a}{2}\right)\right|^2}{\int|\psi|^2\mathrm{d}x} \tag{3}$$

其中积分均为全空间积分. 利用题 1.5 的计算结果,容易算出

$$\langle F_{右}\rangle\approx\frac{2V_0}{a}\cos^2\frac{ka}{2}=\frac{2E_n}{a} \tag{4}$$

V_0/E 越大,式(4)越准确.

由对称性,显然有

$$\langle F_{左}\rangle=-\langle F_{右}\rangle \tag{5}$$

式(4)可作如下解释:设固定阱壁左侧而令右侧徐缓向外移动距离 Δa,则粒子对外作功 $\langle F_{右}\rangle\Delta a$,结果导致能级降低,根据能量守恒定律,应有

$$\langle F_{右}\rangle=-\frac{\partial E_n}{\partial a}=-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)=\frac{2}{a}E_n$$

此即式(4).

1.6 粒子在图示之势场

$$V(x)=\begin{cases}V_0, & |x|\leqslant a\\ 0, & a<|x|<L\\ \infty & |x|\geqslant L\end{cases}$$

中运动,求能级公式,并讨论如下极限情况:

$$a\longrightarrow 0,\quad V_0\longrightarrow\infty,\quad 2aV_0\longrightarrow U_0(\text{有限值})$$

解 由于 $V(x)\geqslant 0$,所以 $E>0$. 由于 $V(-x)=V(x)$,所以能量本征态有确定宇称. 在 $V(x)\longrightarrow\infty$处,波函数应该趋于 0,所以边界条件为

$$\psi(x)=0,\quad |x|\geqslant L \tag{1}$$

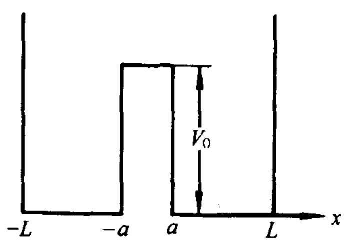

图 1.6

(a) 偶宇称态

1° $E<V_0$,令

$$k=\sqrt{2mE}/\hbar$$
$$\xi=\sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar \tag{2}$$

能量本征方程可以写成

$$\psi''-\xi^2\psi=0, \qquad |x|<a$$
$$\psi''+k^2\psi=0, \qquad a<|x|<L \tag{3}$$

满足边界条件(1)的解为

$$\psi=\mathrm{ch}\xi x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\xi x}+\mathrm{e}^{-\xi x}), \qquad |x|<a$$
$$\psi=A\sin k(L-x). \qquad a<x<L \tag{4}$$

($-L<x<-a$ 区间的 ψ,可以按偶函数条件写出,从略.)由 $x=a$ 处 ψ'/ψ 的连续条件,即可得出能级方程

$$k\cot k(L-a)=-\xi\mathrm{th}\xi a \tag{5}$$

其中

$$\mathrm{th}\ x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$$

2° $E>V_0$,令

$$\eta=\sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar \tag{6}$$

能量本征方程可以写为

$$\psi''+\eta^2\psi=0, \qquad |x|<a$$
$$\psi''+k^2\psi=0, \qquad a<|x|<L \tag{7}$$

满足边界条件(1)的解为

$$\psi=\cos\eta x, \qquad |x|<a$$
$$\psi=B\sin k(L-x). \qquad a<x<L \tag{8}$$

($-L<x<-a$ 区间的 ψ,按偶函数条件写出,从略.).由 $x=a$ 处 ψ'/ψ 的连续条件,即可得出能级方程

$$k\cot k(L-a)=\eta\tan\eta a \tag{9}$$

(b) 奇宇称态

1° $E<V_0$,定态方程仍为式(3),满足边界条件式(1)的解为

$$\begin{aligned}
&\psi=\mathrm{sh}\xi x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\xi x}-\mathrm{e}^{-\xi x}), && |x|<a \\
&\psi=C\sin k(L-x), && a<x<L
\end{aligned} \tag{10}$$

$(-L<x<-a$ 区间的 ψ，按奇函数条件写出，从略．）能级方程为

$$k\cot k(L-a)=-\xi\coth\xi a \tag{11}$$

其中

$$\coth x=1/\mathrm{th}\ x=(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})/(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})$$

2° $E>V_0$，定态方程仍为式(7)，满足边界条件(1)的解为

$$\begin{aligned}
&\psi=\sin\eta x, && |x|<a \\
&\psi=D\sin k(L-x), && a<x<L
\end{aligned} \tag{12}$$

$(-L<x<-a$ 区间的 ψ，按奇函数条件写出，从略．）能级方程为

$$k\cot k(L-a)=-\eta\cot\eta a \tag{13}$$

讨论 如 $a\longrightarrow 0, V_0\longrightarrow\infty$，但 $2aV_0\longrightarrow U_0$，则

$$\int_{-a}^{a}V(x)\mathrm{d}x=2aV_0=U_0$$

相当于在 $x=0$ 处存在一个 δ 势垒

$$V(x)=U_0\delta(x), \qquad |x|<L \tag{14}$$

只需考虑 $E<V_0$ 的情形．

(a) 偶宇称态

这时，可取下列近似：

$$\xi^2 a\approx 2mV_0 a/\hbar^2=mU_0/\hbar^2$$

$$\xi a\ll 1, \quad \mathrm{th}\xi a\approx\xi a, \quad \xi\mathrm{th}\xi a\approx mU_0/\hbar^2$$

式(5)变成

$$k\cot kL=-mU_0/\hbar^2 \tag{5'}$$

这和后面题 2.4 所得的结果一致．

(b) 奇宇称态

取上述近似后，式(11)变成

$$\tan kL=-ka\longrightarrow 0 \tag{11'}$$

解为

$$k=\frac{n\pi}{L}, \qquad E=\frac{1}{2m}\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2, \qquad n=1,2,3,\cdots$$

这结果等价于平底无限深势阱，因为奇宇称态 $\psi(0)=0$，中央的 δ 势垒不起作用(参看题 2.4).

1.7 粒子作自由运动，已知 $t=0$ 时初始波函数为

$$\psi(x,0)=(2\pi a^2)^{-1/4}\exp\left[\mathrm{i}k_0(x-x_0)-\left(\frac{x-x_0}{2a}\right)^2\right], \quad a>0.$$

(a) 求 $t=0$ 时波包宽度 Δx，动量涨落 Δp 及 p 表象中的波函数 $\varphi(p)$；(b) 求 $t>0$ 时波函数 $\psi(x,t)$ 以及 $\overline{x}(t)$，Δx；(c) 讨论此波包的运动特征.

解 为了简化，计算过程中将取 $\hbar=1$，在最后结果中再添上. 先讨论 $t=0$ 时波包的形状

$$|\psi(x,0)|^2=(2\pi a^2)^{-1/2}\mathrm{e}^{-(x-x_0)^2/2a^2} \tag{1}$$

为 Gauss 型分布. 按照平均值公式

$$\overline{f(x)}=\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2 f(x)\mathrm{d}x$$

容易算出 $t=0$ 时

$$\begin{aligned} &\overline{x}=x_0, \qquad \overline{x^2}=a^2+x_0^2 \\ &\Delta x=(\overline{x^2}-\overline{x}^2)^{1/2}=a \end{aligned} \tag{2}$$

即 $t=0$ 时波包中心在 x_0 处，波包宽度为 a.

令

$$\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(k)\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}k \tag{3}$$

$\varphi(k)$即动量表象中的初始波函数. 根据 Fourier 变换公式

$$\begin{aligned}\varphi(k)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \\ &=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/4}\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0} \\ &\quad\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\exp\left[-\left(\frac{x-x_0}{2a}\right)^2-\mathrm{i}(k-k_0)(x-x_0)\right]\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp[-\mathrm{i}kx_0 - a^2(k-k_0)^2] \tag{4}$$

计算中利用了积分公式(A)(见本题末附注). 由式(4)

$$|\varphi(k)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \mathrm{e}^{-2a^2(k-k_0)^2} \tag{5}$$

即动量的概率分布也呈 Gauss 型分布. 由平均值公式

$$\overline{f(k)} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(k)|^2 f(k) \mathrm{d}k$$

容易算出

$$\bar{k} = k_0, \qquad \overline{k^2} = k_0^2 + \frac{1}{4a^2} \tag{6}$$

由于 $p=\hbar k$,因此

$$\bar{p} = \hbar k_0, \qquad \overline{p^2} = \hbar^2 k_0^2 + \frac{\hbar^2}{4a^2}$$

$$\Delta p = (\overline{p^2} - \bar{p}^2)^{1/2} = \hbar/2a \tag{7}$$

这是 $t=0$ 时的动量分布特征. 由于是自由粒子,动量守恒,动量概率分布也守恒,因此式(7)也是任意时刻的动量分布特征. 由式(2)及式(7),可得

$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2. \qquad (t=0\ 时) \tag{8}$$

在式(3)中,令

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \longrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \qquad \omega = \frac{\hbar k^2}{2m} = \frac{k^2}{2m} \qquad (\hbar = 1)$$

即得 $t>0$ 时波函数 $\psi(x,t)$,即

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) \exp\left(\mathrm{i}kx - \frac{\mathrm{i}k^2 t}{2m}\right) \mathrm{d}k \tag{9}$$

将式(4)代入上式,并利用积分公式(B)(见本题末附注),即得

$$\psi(x,t) = \frac{\exp[\mathrm{i}k_0(x-x_0) - \mathrm{i}tk_0^2/2m]}{(2\pi)^{1/4}(a+\mathrm{i}t/2ma)^{1/2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{4}\left(x - x_0 - \frac{k_0 t}{m}\right)^2 \frac{1-\mathrm{i}t/2ma^2}{a^2+(t/2ma)^2}\right] \tag{10}$$

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left[a^2 + \left(\frac{t}{2ma}\right)^2\right]^{1/2}}$$