上海研究生教育用书

凸分析与非光滑分析

胡毓达　孟志青　著

上海科学技术出版社

上海市研究生教育专项经费资助项目

凸分析与非光滑分析

胡毓达　孟志青　著

上 海 科 学 技 术 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

凸分析与非光滑分析/胡毓达,孟志青著.一上海:
上海科学技术出版社,2000.9
上海研究生教育用书
ISBN 7-5323-5525-X

Ⅰ.凸... Ⅱ.①胡...②孟... Ⅲ.凸分析-研究生-教材 Ⅳ.O174.13

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第41258号

责任编辑 赵序明

上海科学技术出版社出版发行
(上海瑞金二路450号 邮政编码200020)
上海新华印刷厂印刷 新华书店上海发行所经销
2000年9月第1版 2000年9月第1次印刷
开本850×1156 1/32 印张12 插页4 字数312 000
印数1-1 500 定价:25.00元

内 容 提 要

本书论述凸分析与非光滑分析的基本理论，特别是较系统地介绍了有关集值映射的广义微分的研究进展．全书共 8 章：第 1 章至第 3 章是凸分析部分，包括凸集、凸函数和凸映射以及凸函数的次微分；第 4 章概述非光滑的 Lipschitz 函数的广义次微分；第 5 章则利用切锥引进并讨论函数的切导数和切微分；第 6 章至第 8 章研究集值映射的广义微分，其中第 6 章考虑锥凸集值映射的锥次微分；第 7 章进而讨论一般集值映射的锥弱次微分；第 8 章则从另一角度研究集值映射的切导数和切微分．

本书适用于作大学硕士和博士研究生的教材或主要教学参考书，也可供大学本科高年级学生选读．同时，它也是从事现代分析、数学规划、向量极值、最优控制和数理经济等领域研究的学者的重要参考书．

前　言

凸分析和非光滑分析是 20 世纪 60 年代至 80 年代相继发展形成的现代数学分支. 作为描述和解决非光滑问题的有力工具,它们在非线性最优化、多目标决策、最优控制、对策论、变分学、逼近理论以及数理经济等领域有着广泛的应用. 事实上,凸分析主要研究的凸函数(凸泛函)在通常意义下是非光滑的,因此从这一意义上说,凸分析也是非光滑分析的组成部分和重要基础,而非光滑分析则是凸分析研究的延伸和发展.

本书是我自 1986 年至 1998 年间在上海交通大学先后为应用数学专业的硕士和博士研究生讲授凸分析、非光滑分析和现代分析课的基础上,经过选择整理写成的. 全书脱稿后,于 2000 年 2 月至 6 月在温州大学对该校和温州师范学院的数学教师以及访问学者试讲了部分内容,并稍作修改。

书中的第 1 章至第 3 章是相对成熟的凸分析部分,第 2 章中有关映射的拟凸性的内容,主要是我和学生胡一凡博士以及访问学者凌晨副教授合作的工作. 第 4 章关于 Lipschitz 函数的广义次微分和第 5 章函数的切微分,部分取材于 F. H. Clarke 的著作[11]. 第 5 章和第 8 章的部分内容,参考了 J. P. Aubin 和 I. Ekeland 的书[16],以及 B. S. Morduckhovich 的论文[28]. 第 6 章至第 8 章是集值映射的广义微分部分,其基本概念先是由我和学生徐永明博士开始引进,而后则是和孟志青博士共同进行了较系统研究的结果. 本书的第 1 章至第 3 章由我执笔撰写. 1994 年至 1995 年间,湘潭大学数学系孟志青副教授作为访问学者来我处进修,他除了与我合作进行有关集值映射的广义微分的研究之外,还曾在我讲授的非光滑分析课中分讲了部分内容. 为此,本书的第 4 章至第 8 章先

由他整理出初稿，经我们多次讨论调整，最后由我作修改、补充和统一定稿.

阅读本书一般需要有泛函分析的基本知识. 特别是从第 5 章以后，读者最好能熟悉非线性泛函的某些近代理论，同时对其中一些比较简洁的推证要进行仔细地研读。

在本书的写作过程中，陆晋奎教授、王晓敏副教授和杨雷博士曾协助我补充和查对了有关资料，丁鸿生讲师和于丽英博士则为打印本书的手稿付出了辛勤的劳动. 在此，一并致以衷心感谢！

限于作者水平，书中难免存在不妥和谬误之处，恳望专家和读者不吝批评指正.

胡毓达

2000 年 1 月 1 日于上海交通大学

2000 年 7 月 7 日补写于温州大学

符 号 说 明

$\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$	线性空间
$\mathscr{L}$	线性子空间
$\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{Z}$	线性拓扑空间
$\mathscr{X}^*$, $\mathscr{Y}^*$, $\mathscr{Z}^*$	线性拓扑空间 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{Z}$ 的对偶空间
$\mathscr{H}$	Hilbert 空间
$\mathscr{B}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$	Banach 空间
$\mathscr{B}^*$	Banach 空间 $\mathscr{B}$ 的对偶空间
R^n, R^m	n 维,m 维 Euclid 空间
R	实数域
R_+	非负实数域
S, T, M	集合
$\mathrm{co}S$	集合 S 的凸包
$\mathrm{aff}S$	集合 S 的仿射包
$\mathrm{lin}S$	集合 S 的线性包
S^i	集合 S 的代数内部
S^{ri}	集合 S 的相对代数内部
S^a	集合 S 的代数闭包
S^b	集合 S 的代数边界
$\mathrm{int}S$	集合 S 的内部
$\mathrm{ri}S$	集合 S 的相对内部
$\mathrm{cl}S$, $\overline{S}$	集合 S 的闭包
∂S	集合 S 的边界
$\boldsymbol{d}\perp S$	Banach 空间中向量 $\boldsymbol{d}$ 垂直于集合 S
$S^{\perp}$	Banach 空间中集合 S 的垂直集

H	超平面
H_+^C, H_-^C	由超平面 H 界定的闭半空间
H_+^0, H_-^0	由超平面 H 界定的开半空间
$U(\boldsymbol{x})$	线性拓扑空间中点 $\boldsymbol{x}$ 的邻域
U, $U(\boldsymbol{O})$	线性拓扑空间中原点的邻域
$U(\boldsymbol{x}, \delta)$	Banach 空间中点 $\boldsymbol{x}$ 的 δ-邻域
$B_\delta(\boldsymbol{x})$	Banach 空间中以点 $\boldsymbol{x}$ 为中心，δ 为半径的超球
B	Banach 空间中的开单位球(或闭单位球)
$(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)$	线性空间中点 $\boldsymbol{x}^1$ 与 $\boldsymbol{x}^2$ 之间的开线段
$[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2]$	线性空间中点 $\boldsymbol{x}^1$ 与 $\boldsymbol{x}^2$ 之间的闭线段
$(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2]$,$[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)$	线性空间中点 $\boldsymbol{x}^1$ 与 $\boldsymbol{x}^2$ 之间的半开半闭线段
$\Vert \cdot \Vert_{\mathscr{B}}$, $\Vert \cdot \Vert$	Banach 空间上的范数
$\Vert \cdot \Vert_p$	Euclid 空间上的 p-范数
$\Vert M \Vert_{m\times n}$	$m\times n$ 阶矩阵 M 的范数
K	线性空间中的锥
K^*	锥 K 的对偶锥
K^{**}	锥 K 的双对偶锥
K^+	锥 K 的严格对偶锥
K^-	锥 K 的负对偶锥
R_+^n	n 维 Euclid 空间中的非负锥
S^-	集合 S 的负对偶集(极化集)
cone$S$	集合 S 的锥包
f, g	线性空间上的实值函数(实泛函)
$\boldsymbol{f}$	线性空间上的实值向量函数
$\langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x} \rangle$	线性空间上线性泛函 $\boldsymbol{x}^*$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的值
φ	线性拓扑空间上的映射
φ^*	线性映射 φ 的对偶算子
ψ	线性拓扑(Banach)空间上的集值映射

L	线性空间到线性空间的线性映射
$L(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$	线性拓扑空间 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的连续线性映射(算子)集合
$\mathrm{dom} f$	广义实值函数 f 的有效域
$\mathrm{epi} f$	实值函数 f 的上图象
$\mathrm{hyp} f$	实值函数 f 的下图象
$\mathrm{co}(f)$	实值函数 f 的凸包(函数)
$\mathrm{cl}(f)$	实值函数 f 的闭包(函数)
$\liminf\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0} f(\boldsymbol{x})$	实值函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的下极限
$\limsup\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0} f(\boldsymbol{x})$	实值函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的上极限
$\mathrm{dom}\psi$	集值映射 ψ 的有效域
$\mathrm{graph}\psi$	集值映射 ψ 的图象
$K\text{-}\mathrm{epi}\psi$	集值映射 ψ 的 K-上图象
$\mathrm{Ker}\psi$	集值映射 ψ 的核
$\mathrm{Im}\psi$	集值映射 ψ 的象
$H_S(f, c)$	集合 S 上函数 f 关于 c 的水平集
$H_S(\varphi, c)_K$	集合 S 上映射 φ 关于 c 的 K-水平集
$\mathrm{K\text{-}bou}\{\boldsymbol{y}^1, \cdots, \boldsymbol{y}^m\}$	线性拓扑空间中向量组 $\{\boldsymbol{y}^1, \cdots, \boldsymbol{y}^m\}$ 的 K-有界集
f^*	凸函数 f 的共轭函数
f^{**}	凸函数 f 的二次共轭函数
g^*	凹函数 g 的共轭函数
d_S, $d_S(\boldsymbol{x})$	Banach 空间中集合 S 上的距离函数
μ_S, $\mu_S(\boldsymbol{x})$	线性拓扑空间中凸集 S 上的 Minkowski 函数(泛函)
μ_a, $\mu_a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\omega})$	$\mathscr{Y}\times\mathrm{int}K$ 上关于 $a\in\mathscr{Y}$ 的 Minkowski 泛函
δ_S, $\delta_S(\boldsymbol{x})$	线性空间中凸集 S 上的指示函数
σ_S, $\sigma_S(\boldsymbol{x})$	线性空间的对偶空间中集合 S 的支撑函数
l, $l(\boldsymbol{x})$	线性空间上的仿射函数

$T_S(\boldsymbol{x}^0)$	线性拓扑空间中凸集 S 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的切锥
$N_S(\boldsymbol{x}^0)$	线性拓扑空间中凸集 S 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的法锥
$T_S^0(\boldsymbol{x}^0)$	Banach 空间中集合 S 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 G-切锥（广义切锥）
$N_S^0(\boldsymbol{x}^0)$	Banach 空间中集合 S 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 G-法锥（广义法锥）
$Q_S(\boldsymbol{x}^0)$	Banach 空间中集合 S 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的相依锥
$T_S^H(\boldsymbol{x}^0)$	Banach 空间中集合 S 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 H-切锥（超切锥）
$T_S^D(\boldsymbol{x}^0)$	Banach 空间中集合 S 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 D-切锥（相依切锥）
$T_S^C(\boldsymbol{x}^0)$	Banach 空间中集合 S 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 C-切锥（Clarke 切锥）
$N_S^C(\boldsymbol{x}^0)$	Banach 空间中集合 S 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 C-法锥（Clarke 法锥）
$G_{K\text{-epi}\psi}(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$	集合 K-epi ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处的 G-切锥
$N_S^M(\boldsymbol{x}^0)$	集合 S 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 M-法锥
$N_S^F(\boldsymbol{x}^0, \varepsilon)$	集合 S 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 F-法锥(Frechet-ε 法锥)
$N_{K\text{-epi}\psi}(x^0, y^0)$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处的法锥
$\mathscr{E}(Y, K)$	线性拓扑空间中集合 Y 的 K-有效点集
$\mathscr{E}_w(Y, K)$	线性拓扑空间中集合 Y 的 K-弱有效点集
$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$	Euclid 空间上实值函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的梯度
$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)$	Euclid 空间上实值函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 Hesse 矩阵
$J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)$	Euclid 空间上实值向量函数 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 Jacobi 矩阵
$f'(\boldsymbol{x}^0)$	Banach 空间上实值函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 Fréchet 导数

φ'_{x^0}	线性拓扑空间上映射 φ 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 Gâteaux 导数
$D_S\varphi(\boldsymbol{x}^0)$	Banach 空间上映射 φ 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的严格导数
$f'_+(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{d})$	实值函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的右方向导数
$f'_-(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{d})$	实值函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的左方向导数
$f'(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{d})$	实值函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的方向导数
$f^0(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{d})$	Lipschitz 函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的 G-方向导数(广义方向导数)
$f^D(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{d})$	正常函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的 D-切导数
$f^C(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{d})$	正常函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的 C-切导数(上图象导数)
$f^H(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{d})$	实值函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的 H-切导数
$\partial f(\boldsymbol{x}^0)$	凸函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的次微分
$\partial^0 f(\boldsymbol{x}^0)$	函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 G-次微分
$\partial_1^0 f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$	Lipschitz 函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_1$ 处的 G-偏次微分
$\partial_2^0 f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$	Lipschitz 函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_2$ 处的 G-偏次微分
$\partial^0 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)$	Lipschitz 向量函数 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 G-次微分
$\partial^C f(\boldsymbol{x}^0)$	正常函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 C-切微分
$\partial^M f(\boldsymbol{x}^0)$	广义实值函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 M-次微分
$\partial^\infty f(\boldsymbol{x}^0)$	广义实值函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 M-奇异次微分
$\psi'(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0; \boldsymbol{d})$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的 K-方向导数集合
$\psi'_w(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0; \boldsymbol{d})$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的 K-弱方向导数集合
$\psi_w^0(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0; \boldsymbol{d})$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的 GK-弱方向导数集合

$\psi_w^C(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0; \boldsymbol{d})$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的 CK-弱方向导数集合
$\psi^T(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处的切导数
$\psi^D(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处的 D-切导数
$\psi^C(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处的 C-切导数
$\partial\psi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)_{\boldsymbol{p}}$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处关于 $\boldsymbol{p}$ 的 K-次微分
$\partial_w\psi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)_{\boldsymbol{p}}$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处关于 $\boldsymbol{p}$ 的 K-弱次微分
$\partial\psi(\boldsymbol{x}^0)_{\boldsymbol{p}}$	集值映射 ψ 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处关于 $\boldsymbol{p}$ 的 K-次微分
$\partial_w\psi(\boldsymbol{x}^0)_{\boldsymbol{p}}$	集值映射 ψ 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处关于 $\boldsymbol{p}$ 的 K-弱次微分
$\partial_w^0\psi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)_{\boldsymbol{p}}$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处关于 $\boldsymbol{p}$ 的 GK-弱次微分
$\partial_w^C\psi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)_{\boldsymbol{p}}$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处关于 $\boldsymbol{p}$ 的 CK-弱次微分
$\partial^T\psi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处的切微分
$\partial^C\psi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处的 C-切微分
$\partial\psi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)_L$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处的算子 K-次微分
$\partial_w\psi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)_L$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处的算子 K-弱次微分
$\partial_w^0\psi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)_L$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处的算子 GK-弱次微分
$\partial_w^0\psi(\boldsymbol{x}^0)_L$	集值映射 ψ 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的算子 GK-弱次微分
$\partial_w^C\psi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)_L$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处的算子 CK-弱次微分
$\partial_w^C\psi(\boldsymbol{x}^0)_L$	集值映射 ψ 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的算子 CK-弱次微分
$\partial^M\psi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处的 M-次微分
$\partial^{MC}\psi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处的 MC-次微分
$\partial^{MF}\psi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$	集值映射 ψ 在点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$处的 MF-次微分

目　　录

前　言

符号说明

第 1 章　凸集 ········· 1

§1.1　凸集及有关性质 ········· 1

§1.2　凸集的结构性质 ········· 11

§1.3　凸集分离定理 ········· 19

§1.4　凸锥和对偶锥 ········· 32

第 2 章　凸函数和凸映射 ········· 41

§2.1　凸函数及有关性质 ········· 41

§2.2　凸函数的连续性和对偶性 ········· 58

§2.3　广义凸函数 ········· 75

§2.4　凸映射和广义凸映射 ········· 88

第 3 章　凸函数的次微分 ········· 114

§3.1　凸函数的方向导数 ········· 114

§3.2　次梯度和次微分 ········· 120

§3.3　次微分的性质 ········· 130

§3.4　凸规划的最优性条件 ········· 142

第 4 章　Lipschitz 函数的 *G*-次微分 ········· 153

§4.1　*G*-方向导数 ········· 153

§4.2　*G*-次微分 ········· 156

§4.3 G-次微分的性质 …… 168
§4.4 几何特性 …… 183
§4.5 有限维情况 …… 195
§4.6 Lipschitz 向量函数的 G-次微分 …… 203

第 5 章 函数的切导数和切微分 …… 209
§5.1 凸集的切锥 …… 209
§5.2 D-切锥和 C-切锥 …… 218
§5.3 D-切导数 …… 224
§5.4 C-切导数和 C-切微分 …… 228
§5.5 H-切导数 …… 231
§5.6 若干关系 …… 234

第 6 章 锥凸集值映射的锥次微分 …… 244
§6.1 锥次微分和锥弱次微分 …… 244
§6.2 存在性定理 …… 249
§6.3 基本特性 …… 266
§6.4 运算性质 …… 275
§6.5 锥方向导数和锥弱方向导数 …… 285

第 7 章 一般集值映射的锥弱次微分 …… 294
§7.1 有效 Hahn-Banach 定理 …… 294
§7.2 C-锥弱次微分 …… 301
§7.3 G-锥弱次微分 …… 309
§7.4 算子锥次微分 …… 317

第 8 章 集值映射的切导数和切微分 …… 323
§8.1 切导数和切微分 …… 323
§8.2 D-切导数 …… 332
§8.3 C-切导数和 C-切微分 …… 335

§8.4　M-次微分 ………………………………………………… 341

参考文献 ………………………………………………………… 361

第 1 章 凸 集

凸集是凸分析的研究对象和基本内容. 它的有关概念和理论，则是凸分析和非光滑分析的基础和重要研究工具.

这一章将论述凸集及有关的概念和性质. 特别是，介绍有着广泛应用的在不同空间情况的几个凸集分离定理. 同时还讨论作为重要特殊凸集的凸锥及其对偶锥.

§1.1 凸集及有关性质

本节阐述具有所谓凸性的集合及有关概念，并且介绍它们的基本性质.

设 $\mathscr{V}$ 是实线性空间，它不止含有一个点.

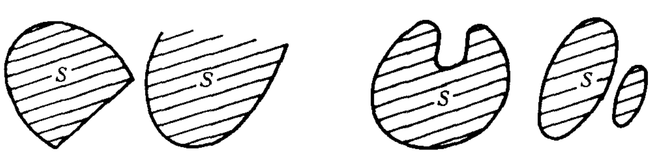
定义 1.1.1 设集合 $S \subset \mathscr{V}$. 若对任意的 $\lambda \in (0, 1)$ 有

$$\lambda \boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2 \in S \quad \forall \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in S,$$

则称 S 是($\mathscr{V}$ 中的)凸集或集合 S 是凸的.

我们约定：空集是凸集.

图 1.1.1 的(a)和(b)分别是凸集和不是凸集的图示.



(a) (b)

图 1.1.1

例 1.1.1　以下集合是相应空间中的凸集.

Euclid 空间 R^n 中的超平面:

$$H = \{x \in R^n \mid a^T x = \beta,\ a \in R^n,\ \beta \in R\}.$$

Euclid 空间 R^n 中的开半空间:

$$H_+^0 = \{x \in R^n \mid a^T x > \beta,\ a \in R^n,\ \beta \in R\}.$$

Banach 空间 $\mathscr{B}$ 中以 x^0 为中心,δ 为半径的超球:

$$B_\delta(x^0) = \{x \in \mathscr{B} \big| \|x - x^0\| < \delta,\ x^0 \in \mathscr{B},\ \delta > 0\}.$$

特别地,$\mathscr{B}$ 中的开单位球:

$$B = \{x \in \mathscr{B} \big| \|x\| < 1\},$$

其中 $\|x\|$ 是 x 的范数.

线性空间 $\mathscr{V}$ 中的闭线段:

$$[x^1,\ x^2] = \{x \in \mathscr{V} \mid x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2,$$

$$x^1,\ x^2 \in \mathscr{V},\ \lambda \in [0,\ 1]\}.$$

线性空间 $\mathscr{V}$ 中的正系数多项式集合:

$$P = \{p \in \mathscr{V} \mid p \text{ 是 } R \text{ 上正系数单变量多项式}\}.$$

先叙述关于凸集的一些简单性质.

定理 1.1.1　设集合 $S \subset \mathscr{V}$. S 是凸集当且仅当

$$(\alpha_1 + \alpha_2)S = \alpha_1 S + \alpha_2 S \quad \forall \alpha_1,\ \alpha_2 \in R_+. \tag{1.1.1}$$

证明　必要性. 当 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 时,结论显然成立. 下设 $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$.

先证等式(1.1.1)的右端包含左端. 为此,设 $z \in (\alpha_1 + \alpha_2)S$,则存在 $x \in S$ 使 $z = (\alpha_1 + \alpha_2)x = \alpha_1 x + \alpha_2 x$. 因为 $\alpha_1 x \in \alpha_1 S$,$\alpha_2 x \in \alpha_2 S$,故 $z \in \alpha_1 S + \alpha_2 S$. 为证(1.1.1)的左端包含右端,设 $z \in$