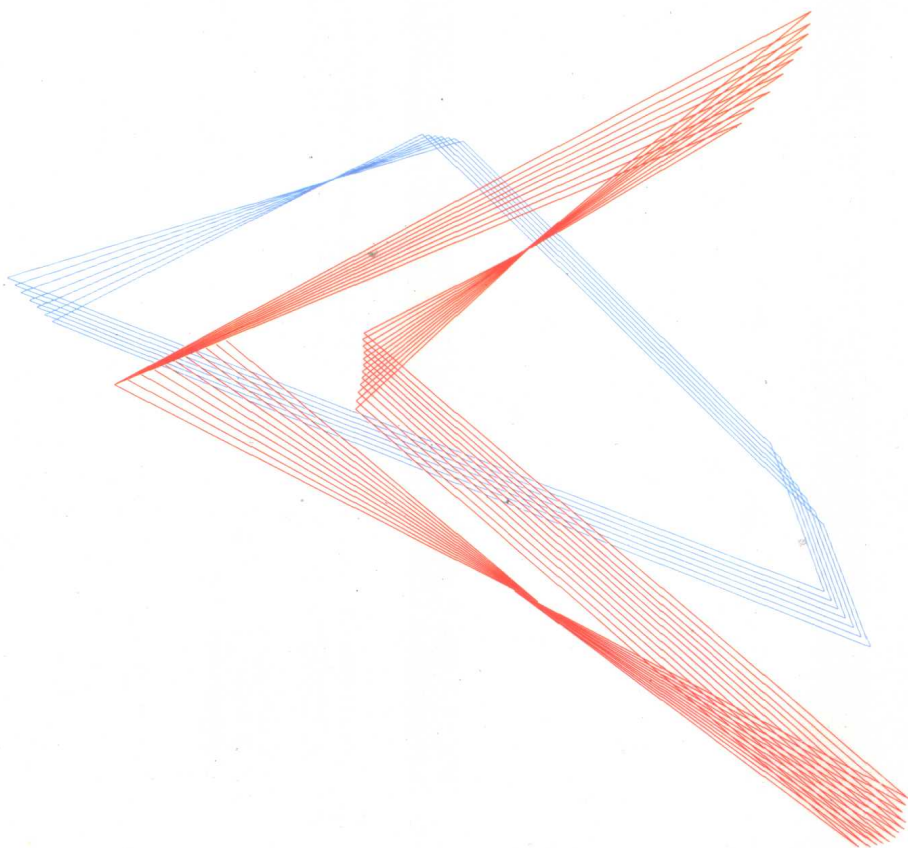


概率论与数理统计 试题精选题解



廖玉麟 刘恺 编



华中科技大学出版社

概率论与数理统计 试题精选题解

廖玉麟 编
刘 凯

华中科技大学出版社
(华中理工大学出版社)

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计试题精选题解/廖玉麟 刘凯 编
武汉:华中科技大学出版社, 2001年1月
ISBN 7-5609-2299-6

I. 概…

II. ①廖… ②刘…

III. ①概率论-解题 ②数理统计-解题

IV. O21-44

概率论与数理统计试题精选题解

廖玉麟 刘凯 编

责任编辑:李立鹏
责任校对:郭有林

封面设计:秦茹
责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

录 排:华中科技大学出版社照排室

印 刷:湖北省通山县印刷厂

开本:850×1168 1/32

印张:12.75

字数:307 000

版次:2001年1月第1版

印次:2001年1月第1次印刷

印数:1—4 000

ISBN 7-5609-2299-6/O·217

定价:14.80元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本书是为学习概率论与数理统计的读者编写的,目标明确.一是帮助读者克服学习概率论与数理统计中的两个主要困难——概念难于建立;方法难于掌握.其二是准备概率论与数理统计考试.

全书内容为随机事件与概率,随机变量及概率分布,高维随机变量及其分布,随机变量的数字特征、极限定理,数理统计初步共五章.

每章内容由三部分组成:1)试题详解.包括解题具体步骤及注意事项;评注,对较难的题先给出启发性分析;再详解.2)“是”“非”题,并对“是”、“非”给出例证说明.3)填空选择题.

前 言

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律的一门数学分支. 随机现象无所不在. 概率论与数理统计的研究自然也就广泛地涉及到自然科学、工程技术、经济和人文学科. 它已成为高等工科院校工程数学的主干课程之一.

由于随机现象的不确定性, 因此使人感到把握不定, 从而给学习带来了困难. 教学实践表明, 学习概率论与数理统计的困难主要是: 概念难于建立, 方法难于掌握. 因此, 需要一本好的学习辅助读物, 切实地帮助学生克服这两方面的困难.

本书的主要特点是: 在参阅研究了大量的试题, 并结合学生在学习产生的疑问与常犯的的错误, 精选出极具启发性、典型性和针对性的题目, 通过对这些题的分析解答, 为初学者和自学者运用所学教材知识去独立正确解题搭上一座桥梁, 培养学习者的综合、分析与实际运用能力. 为使学生准确掌握概念, 采用了“是”、“非”题的形式, 给出“是”、“非”的例证说明, 以清除在学习中对概念的模糊理解.

本书与《高等数学试题精选题解》、《线性代数试题精选题解》是一套系列丛书. 它们不但能使你更好的学好这三门课程, 而且能协助你顺利通过硕士研究生的入学数学考试.

编者感谢帮助过我们的同行和专家们, 对为本丛书的出版、发行付出巨大辛劳的华中理工大学出版社的有关同志表示衷心的感谢! 限于水平, 书中难免错漏, 诚恳地希望得到广大师生和读者的批评指正, 使之日臻完善.

编者

1999年9月22日

目 录

第一章 随机事件与概率	(1)
§ 1.1 随机事件	(1)
§ 1.2 古典概型概率计算	(8)
§ 1.3 条件概率和独立条件概率	(25)
§ 1.4 是非题	(57)
§ 1.5 选择填空题	(70)
第二章 随机变量及概率分布	(83)
§ 2.1 离散型随机变量的概率分布	(83)
§ 2.2 连续型随机变量的概率密度与分布函数	(104)
§ 2.3 一维随机变量函数 $Y=f(X)$ 的分布律及概率密度 ...	(117)
§ 2.4 是非题	(127)
§ 2.5 填空选择题	(132)
第三章 多维随机向量及其分布	(143)
§ 3.1 二维离散型随机向量及其分布律	(144)
§ 3.2 二维连续型随机向量及其分布	(153)
§ 3.3 二维随机变量函数的分布	(175)
§ 3.4 是非题	(217)
§ 3.5 填空选择题	(225)
第四章 随机变量的数字特征、极限定理	(241)
§ 4.1 一维随机变量的数字特征	(241)
§ 4.2 一维随机变量函数的数字特征	(270)
§ 4.3 二维随机向量的数字特征	(283)
§ 4.4 是非题	(315)
§ 4.5 填空选择题	(324)
第五章 数理统计初步	(338)
§ 5.1 基本概念	(338)

§ 5.2	参数估计	(349)
§ 5.3	假设检验	(368)
§ 5.4	是非题	(382)
§ 5.5	选择填空题	(394)

第一章 随机事件与概率

§ 1.1 随 机 事 件

熟悉随机事件的运算,掌握随机事件的性质,正确理解符号与概率术语,是进行概率计算的基础和前提.事件运算服从下列规律:

交换律

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A.$$

结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

补元律

$$A \cup \bar{A} = \Omega; \quad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

De-Morgan 律

对有限个或可列无限个事件 A_i , 恒有

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \bar{A}_i.$$

一、符号与术语

利用已知事件表示待求事件,或利用已知概率的事件表示待求事件,是解答概率题的基本功,需熟练掌握.(常用符号与术见表 1-1)

1.1.1. 用事件 A, B, C 表示下列事件:

表 1-1

符号	概率论术语
Ω	样本空间;必然事件
$\emptyset$	不可能事件
$\omega \in \Omega$	样本点
$\{\omega\}$	基本事件
$A \subset \Omega$	事件 A
$A \subset B$	事件 A 含于事件 B ; 事件 A 发生, 事件 B 必发生
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等; 事件 A 与事件 B 同时发生或同时不发生
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少发生一个
$A \cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生
$\bar{A}$	事件 A 的逆事件, 事件 A 不发生
$A - B = A\bar{B}$	事件 A 发生而事件 B 不发生
$A \cap B = \emptyset$	事件 A 与事件 B 互不相容

注: 今后常将 $A \cap B$ 写成 AB .

$$A_1 = \{A, B, C \text{ 都发生}\},$$

$$A_2 = \{A \text{ 发生而 } B, C \text{ 不发生}\},$$

$$A_3 = \{A, B, C \text{ 中恰有一个发生}\},$$

$$A_4 = \{A, B, C \text{ 中至少有一个发生}\},$$

$$A_5 = \{A, B, C \text{ 都不发生}\},$$

$$A_6 = \{A, B, C \text{ 中不多于两个发生}\}.$$

解 $A_1 = ABC,$

$$A_2 = A - B - C,$$

$$A_3 = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C, A_4 = A \cup B \cup C.$$

A, B, C 中至少有一个发生. 也即是: 三个中恰有一个发生, 或者三个中恰有两个发生, 或者三个都发生. 因此, A_4 又可表成

$$A_4 = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}BC.$$

$$A_5 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \text{ 或 } A_5 = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}.$$

$$A_6 = AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

A, B, C 中不多于两个发生, 也可表为 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 中至少有一个发生, 故 A_6 又可表为

$$A_6 = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}.$$

A_6 还可理解为三个事件不能同时发生, 故又可表为

$$A_6 = \overline{ABC}.$$

1.1.2 设 A, B, C 为随机事件, 证明

$$1) \quad \bar{A}B \cup A\bar{B} \cup \bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{B};$$

$$2) \quad \overline{(A-B) \cup (B-A)} = AB \cup \bar{A}\bar{B}.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } 1) \quad \bar{A}B \cup A\bar{B} \cup \bar{A}\bar{B} &= (\bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}) \cup A\bar{B} \\ &= \bar{A}(B \cup \bar{B}) \cup A\bar{B} \\ &= \bar{A} \cup A\bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A}\bar{B}. \end{aligned}$$

2) 因为 $A-B = A\bar{B}$, 故

$$\begin{aligned} \overline{(A-B) \cup (B-A)} &= \overline{A\bar{B} \cup \bar{A}B} = \overline{A\bar{B}} \cap \overline{\bar{A}B} \\ &= (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \\ &= \bar{A}\bar{B} \cup B\bar{B} \cup \bar{A}A \cup AB \\ &= \bar{A}\bar{B} \cup AB. \end{aligned}$$

1.1.3 设随机事件 A, B 互不相容, 已知 $P(A) = p, P(B) = q$, 试求 $P(A \cup B), P(\bar{A} \cup \bar{B}), P(AB), P(\bar{A}\bar{B})$ 和 $P(\bar{A}\bar{B})$.

解 因为 A, B 互不相容, 故有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = p + q.$$

由于 $AB = \emptyset$, 故 $B \subset \bar{A}$, 所以

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p,$$

$$P(AB) = P(\emptyset) = 0,$$

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - p - q.$$

1.1.4 设 $P(A_n) = 1, n = 1, 2, \dots$, 试证 $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

证 由 $P(A_n) = 1, n = 1, 2, \dots$, 可知 $P(\bar{A}_n) = 0, n = 1, 2, \dots$, 故

$$0 \leq P(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(\bar{A}_n) = 0,$$

从而有

$$P(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}) = 0,$$

所以

$$P(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}) = 1.$$

1.1.5 证明:对任意事件 A 与 B , 有

$$P(A \cup B)P(AB) \leq P(A)P(B).$$

证 因为 $A \cup B$ 可表示成下列互不相容事件的和

$$A \cup B = (A - B) + (B - A) + AB,$$

故

$$\begin{aligned} P(A \cup B)P(AB) &= P(A - B)P(AB) \\ &\quad + P(B - A)P(AB) + P(AB)P(AB) \\ &\leq P(A - B)P(B - A) + P(A - B)P(AB) \\ &\quad + P(B - A)P(AB) + P(AB)P(AB) \\ &= [P(A - B) + P(AB)][P(B - A) + P(AB)] \\ &= P(A)P(B). \end{aligned}$$

1.1.6 设 $P(A) = p, 0 < p < 1, P(B) = 1 - \sqrt{p}$, 证明

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) > 0.$$

证 $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cup \overline{B})$

$$\begin{aligned} &= 1 - p + \sqrt{p} - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &\geq 1 - p + \sqrt{p} - 1 = \sqrt{p}(1 - \sqrt{p}) > 0. \end{aligned}$$

1.1.7 设 A, B 相互独立, $P(A) > 0$, 证明 $A, B, A \cup B$ 相互独立的充要条件是: $P(A \cup B) = 1$.

证 充分性. 设 $P(A \cup B) = 1$. 由 A, B 相互独立知

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad (1)$$

$$P[A \cap (A \cup B)] = P(A) = P(A)P(A \cup B), \quad (2)$$

$$P[B \cap (A \cup B)] = P(B) = P(B)P(A \cup B), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} P[A \cap (A \cup B) \cap B] &= P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ &= P(A)P(A \cup B)P(B). \end{aligned} \quad (4)$$

由式(1), (2), (3), (4)可知 $A, B, A \cup B$ 相互独立.

必要性. 设 $A, B, A \cup B$ 相互独立, 故有

$$P[A \cap (A \cup B)] = P(A)P(A \cup B).$$

又因 $P[A \cap (A \cup B)] = P(A),$

所以 $P(A)P(A \cup B) = P(A).$ 又 $P(A) > 0,$

即 $P(A \cup B) = 1.$

1.1.8 证明: 对于事件 $A, B,$ 关系式

$$P^2(AB) + P^2(\bar{A}B) + P^2(A\bar{B}) + P^2(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{4}$$

成立的充要条件是: $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{1}{4}.$

证 充分性. 由 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{1}{4}$ 知 A 与 B 独立, 故 $A, \bar{B}$ 独立, $\bar{A}, B$ 独立, $\bar{A}, \bar{B}$ 独立, 于是

$$\begin{aligned} & P^2(AB) + P^2(\bar{A}B) + P^2(A\bar{B}) + P^2(\bar{A}\bar{B}) \\ &= [P(A)P(B)]^2 + [P(\bar{A})P(B)]^2 \\ & \quad + [P(A)P(\bar{B})]^2 + [P(\bar{A})P(\bar{B})]^2 \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right]^2 + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right]^2 + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right]^2 + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right]^2 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

必要性. 设

$$P^2(AB) + P^2(\bar{A}B) + P^2(A\bar{B}) + P^2(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{4}. \quad (1)$$

因为 $\Omega = AB + \bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B},$ 故

$$P(\Omega) = 1 = P(AB) + P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}\bar{B}). \quad (2)$$

将式(2)两边平方, 并注意到式(1), 可得

$$\begin{aligned} & P(AB)P(\bar{A}B) + P(AB)P(A\bar{B}) + P(AB)P(\bar{A}\bar{B}) \\ & \quad + P(\bar{A}B)P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)P(\bar{A}\bar{B}) + P(A\bar{B})P(\bar{A}\bar{B}) \\ &= \frac{3}{8}. \end{aligned} \quad (3)$$

依据式(1)和式(3)有

$$\begin{aligned}
& [P(AB) - P(\bar{A}B)]^2 + [P(AB) - P(A\bar{B})]^2 \\
& + [P(AB) - P(\bar{A}\bar{B})]^2 + [P(\bar{A}B) - P(A\bar{B})]^2 \\
& + [P(\bar{A}B) - P(\bar{A}\bar{B})]^2 + [P(A\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B})]^2 \\
& = 3[P^2(AB) + P^2(\bar{A}B) + P^2(A\bar{B}) + P^2(\bar{A}\bar{B})] \\
& - 2[P(AB)P(\bar{A}B) + P(AB)P(A\bar{B}) + P(AB)P(\bar{A}\bar{B}) \\
& + P(\bar{A}B)P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)P(\bar{A}\bar{B}) + P(A\bar{B})P(\bar{A}\bar{B})] \\
& = 0,
\end{aligned}$$

因此, $P(AB) = P(\bar{A}B) = P(A\bar{B}) = P(\bar{A}\bar{B})$, 由式(2)可知

$$P(AB) = P(\bar{A}B) = P(A\bar{B}) = P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{4}.$$

又因

$$A = AB + A\bar{B}, B = AB + \bar{A}B, \text{故}$$

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = \frac{1}{2}.$$

1.1.9 设一个工人生产了四个零件, A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品 ($i=1, 2, 3, 4$), 试用 A_i 表示下列各事件:

- 1) 没有一个是次品; 2) 至少有一个次品; 3) 只有一个次品;
4) 至少有 3 个不是次品.

解 1) $A_1A_2A_3A_4$;

2) $\bar{A}_1A_2A_3A_4 \cup A_1\bar{A}_2A_3A_4 \cup A_1A_2\bar{A}_3A_4 \cup A_1A_2A_3\bar{A}_4$
 $\cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4 \cup \bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4 \cup \bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4 \cup A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4$
 $\cup A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4 \cup \bar{A}_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4 \cup A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4$
 $\cup \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4$ 或 $\overline{A_1A_2A_3A_4}$;

3) $\bar{A}_1A_2A_3A_4 \cup A_1\bar{A}_2A_3A_4 \cup A_1A_2\bar{A}_3A_4 \cup A_1A_2A_3\bar{A}_4$;

4) $A_1A_2A_3\bar{A}_4 \cup A_1A_2\bar{A}_3A_4 \cup A_1\bar{A}_2A_3A_4 \cup \bar{A}_1A_2A_3A_4 \cup$
 $A_1A_2A_3A_4$.

1.1.10 写出下列各随机试验的样本空间:

- 1) 记录一个小班数学考试的平均分数(设以百分制记分);
2) 同时掷三颗骰子, 记录三颗骰子点数之和;

3) 10 个产品中有 3 只次品,每次从中取一只(不放回抽样)直到 3 只次品都取出,记录抽取的次数;

4) 生产产品直到得到 10 件正品,记录生产产品的总件数;

5) 一个小组有 A, B, C, D, E 五个人,要选正副组长各一人(一个人不能兼二职),观察选举结果;

6) 甲、乙二人下棋一局,观察棋赛结果;

7) 一口袋中有许多红色、白色、蓝色乒乓球,在其中任取 4 只,观察它们具有哪几种颜色;

8) 对某工厂出厂的产品进行检查,合格的盖上“正品”,不合格的盖上“次品”,如连续查出两个次品就停止检查,或检查 4 个产品就停止检查,记录检查结果;

9) 有 A, B, C 三只盒子, a, b, c 三只球,将三只球装入三只盒子中,使每只盒子装一只球,观察装球情况;

10) 将一尺之棰折成三段,观察各段的长度.

解 1)某小班的人数为 n ,每个人的考分可为 $0, 1, \dots, 100$,于是该小班的平均考分可为 $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n \times 100}{n}$,故样本空间

$$\Omega = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n \times 100}{n} \right\};$$

2) 掷一个骰子可能出现的点数为 $1, 2, \dots, 6$,掷三颗骰子可能出现的点数之和为 $3, 4, \dots, 18$,故样本空间

$$\Omega = \{3, 4, \dots, 18\};$$

3) 要将 3 只次品都取出,抽取的次数至少要 3 次,最多是 10 次(因为只有 10 产品),故

$$\Omega = \{3, 4, \dots, 10\};$$

4) 要得到 10 件正品,产品的总数至少应该是 10 件,故样本空间为

$$\Omega = \{10, 11, 12, \dots\};$$

5) 写在前表示正组长,写在后表示副组长,于是样本空间是 $\Omega = \{AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, DA,$

$DB, DC, DE, EA, EB, EC, ED\}$;

6) 甲、乙两个人下一局棋只可能有如下三种情况:甲胜乙负,乙胜甲负,和局,故样本空间为

$$\Omega = \{\text{甲胜乙负, 乙胜甲负, 和局}\};$$

7) 设 r, w, b 分别表示红色、白色、蓝色, rw 表示红色和白色, rb 表示红色和蓝色, wb 表示白色和蓝色, rgb 表示红、白、蓝三色, 样本空间为

$$\Omega = \{r, w, b, rw, rb, wb, rgb\};$$

8) 设 1 表示正品, 0 表示次品. 由题设可知, 样本空间为

$$\Omega = \{00, 0100, 0101, 0110, 0111, 100, 1010, 1011, \\ 1100, 1101, 1110, 1111\};$$

9) 设 A, B, C 为三个盒子, A_a 表示球 a 放在盒子 A 中, 其余类推, 于是样本空间为

$$\Omega = \{A_a B_b C_c, A_b B_c C_a, A_c B_a C_b, A_b B_c C_a, A_c B_a C_b, A_c B_b C_a\};$$

10) 设 x, y, z 分别表示折成的第一段、第二段、第三段的长度, 它们应满足的关系: $0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1$. 于是样本空间为

$$\Omega = \{(x, y, z) | x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z = 1\}.$$

§ 1.2 古典概型概率计算

古典概型概率计算的要点是: 给定样本点并计算它的总数, 然后再计算事件 A 中包含的样本点数. 这就归结为计数问题.

计数的基本工具主要是两个基本原理和排列组合方法.

一、计数方法

1. 乘法原理

设执行 A_1 程序可用 n_1 种方法去完成, 执行 A_2 程序可用 n_2

种方法去完成. 假定执行 A_1 的每一种方法后可继而执行 A_2 的任一种方法, 则由 A_1 继而接 A_2 的整个程序可用 $n_1 \cdot n_2$ 种方法去完成. 该计数法则称为乘法原理.

注: 这个原理可推广到任何有限个程序的情形.

1.2.1 制成某产品必须通过三个控制台, 每个控制台对产品作一项特性检查并作出相应的标记. 第一个控制台有三个可能的等级, 后两个控制台各有 4 种可能的等级, 则产品可能打上的记号共有多少种?

解 产品通过每一个程序(控制台)时被分别打上记号, 因为第一个程序有三种方法(等级), 第二个程序有 4 种方法, 第三个程序有 4 种方法, 由乘法原理知, 可能打上的标记共有

$$N/\text{种} = 3 \times 4 \times 4 = 48.$$

1.2.2 把 r 个球放到 n 只盒子中去. 试问有多少种不同的放法?

解 这相当于为每个球选择一只盒子, 每个球都有 n 个盒子可放. 由乘法原理知: r 个球的不同放法有

$$N/\text{种} = \underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{r \uparrow} = n^r.$$

2. 加法原理

设 A_1 程序可用 n_1 种方法去完成, A_2 程序可用 n_2 种方法去完成, 且不能同时执行 A_1 和 A_2 , 那么能完成 A_1 或 A_2 的方法共有 $n_1 + n_2$ 种. 这种法则叫做加法原理.

注: 这一原理也可推广至有限个程序的情形.

1.2.3 从甲地到乙地有三条汽车路线和两条火车路线, 试问从甲地到乙地共有多少条路线可走?

解 这相当于对 A_1 程序(乘汽车)来说有三种方法, 两 A_2 程序(乘火车)来说有两种方法. 由加法原理知, 从甲地到乙地共有

$$N = 3 + 2 = 5$$

条路线可走.

3. 关于有序样本

在概率计算的问题中,我们常常遇到将元素一个一个地选择出来,这样就与顺序有关.它有两种选择的方式:

1) 有放回的抽样.由于选出来记录后又放回去,因此,元素允许被重复选取.如果从 n 个元素中选取 r 个元素,则由乘法原理知共有

$$N = n^r$$

个容量为 r 的样本.

2) 不放回抽样.这时元素取出后就不再放回,故元素就不可能被重复选到.因此样本容量就不能超过总体容量 n ,即 $r \leq n$.由乘法原理知,容量为 r 的样本个数是

$$P_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1).$$

当 $r > n$ 时, $P_n^r = 0$; 如果 $r = n$, 则有 $P_n^r = n!$.

4. 不考虑顺序的问题

组合问题. 我们已知

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

且有

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}.$$

1.2.4 从 9 个人可以选出多少个 3 人委员会?

解 因为两个委员会若由同样的成员组成,则这两个委员会便相同,即与选出的成员的顺序无关.它是一个组合问题,故

$$N = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} = 84 \text{ (种可能的委员会).}$$

1.2.5 由 9 面不同的旗可以得到多少种由 3 面旗组成的信号?

解 因为 3 面旗亮出的顺序不同,就得到不同的信号,故该问题与顺序有关,故有