面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

工科数学分析基础

下册

马知恩　王绵森　主编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

工科数学分析基础

下 册

马知恩 王绵森 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112 号

本书是教育部"高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向 21 世纪课程教材和教育部工科数学学科"九五"规划教材．同时又是普通高等教育"九五"国家级重点教材．本书分上、下两册出版．第 1—4 章为上册，主要内容为一元微积分与无穷级数；第 5—8 章为下册，主要内容为多元函数微积分，常微分方程组，无限维分析入门．

本书在实数完备性基础上讲解极限理论，介绍了一致连续、一致收敛和含参变量积分等内容，以拓宽和加强基础；运用向量、矩阵等代数知识表述分析中的有关内容，研究微分方程组和空间曲线与曲面；使用现代数学的语言、术语和符号，并为学习现代数学开设内容展示窗口和延伸发展的接口；扩大应用实例的范围，突出数学思想方法的讲解，加强应用数学能力的培养；习题分为 A、B 两类，并配有综合练习题，书末有习题答案与提示．

本书可作为高等理工科院校对数学要求较高的非数学类专业本科生教材，也可供其他专业选用和社会读者阅读．

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析基础　下册/马知恩，王绵森主编．—北京：高等教育出版社，1999
ISBN 7-04-006975-X

Ⅰ．工…　Ⅱ．①马…　②王…　Ⅲ．数学分析　Ⅳ．017

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 25736 号

工科数学分析基础　下册
马知恩　王绵森　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　　话	010—64054588	传　　真	010—64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	1998 年 11 月第 1 版
印　　张	27	印　　次	1999 年 7 月第 2 次印刷
字　　数	490 000	定　　价	28.10 元

面向21世纪课程教材

普通高等教育“九五”
国家级重点教材

目　　录

第五章　多元函数微分学及其应用 …… 1
第一节　n 维 Euclid 空间点集拓扑初步 …… 1
1.1　n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ …… 1
1.2　$\mathbf{R}^n$ 中点列的极限 …… 2
1.3　$\mathbf{R}^n$ 中的开集与闭集 …… 4
1.4　$\mathbf{R}^n$ 中的紧集与区域 …… 9
习题 5.1 …… 10
第二节　多元函数的极限与连续性 …… 11
2.1　多元函数的概念 …… 11
2.2　多元函数的极限与连续性 …… 13
2.3　多元连续函数的性质 …… 17
习题 5.2 …… 18
第三节　多元数量值函数的导数与微分 …… 20
3.1　方向导数与偏导数 …… 20
3.2　全微分 …… 25
3.3　梯度及其与方向导数的关系 …… 33
3.4　高阶偏导数和高阶全微分 …… 37
3.5　多元复合函数的偏导数和全微分 …… 39
3.6　由一个方程确定的隐函数的微分法 …… 46
习题 5.3 …… 48
第四节　多元函数的 Taylor 公式与极值问题 …… 51
4.1　多元函数的 Taylor 公式 …… 52
4.2　无约束极值,最大值与最小值 …… 55
4.3　有约束极值,Lagrange 乘数法 …… 65
习题 5.4 …… 68
第五节　多元向量值函数的导数与微分 …… 69
5.1　向量值函数的方向导数与偏导数 …… 69
5.2　向量值函数的导数与微分 …… 71
5.3　微分运算法则 …… 75
5.4　由方程组所确定的隐函数的微分法 …… 77
习题 5.5 …… 82
第六节　多元函数微分学在几何上的简单应用 …… 83

6.1 空间曲线的切线与法平面 …… 83
6.2 弧长 …… 89
6.3 曲面的切平面与法线 …… 93
习题 5.6 …… 101
第七节 空间曲线的曲率与挠率 …… 103
7.1 Frenet 标架 …… 103
7.2 曲率 …… 107
7.3 挠率 …… 115
7.4 Frenet 公式 …… 118
习题 5.7 …… 119
综合练习题 …… 120
第六章 多元函数积分学及其应用 …… 121
第一节 多元数量值函数积分的概念与性质 …… 121
1.1 物体质量的计算 …… 121
1.2 多元数量值函数积分的概念 …… 123
1.3 积分存在的条件和性质 …… 126
习题 6.1 …… 127
第二节 二重积分的计算 …… 127
2.1 二重积分的几何意义 …… 127
2.2 直角坐标系下二重积分的计算法 …… 128
2.3 极坐标系下二重积分的计算法 …… 135
2.4 曲线坐标下二重积分的计算法 …… 140
习题 6.2 …… 145
第三节 三重积分的计算 …… 148
3.1 化三重积分为单积分与二重积分的累次积分 …… 148
3.2 柱面与球面坐标下三重积分的计算法 …… 152
习题 6.3 …… 161
第四节 重积分的应用 …… 162
4.1 重积分的微元法 …… 163
4.2 应用举例 …… 166
习题 6.4 …… 170
第五节 含参变量的积分与反常重积分 …… 171
5.1 含参变量的积分 …… 171
5.2 含参变量的反常积分 …… 175
5.3 反常重积分 …… 178
习题 6.5 …… 181
第六节 第一型线积分与面积分 …… 182

6.1　第一型线积分 …… 182
6.2　第一型面积分 …… 186
习题 6.6 …… 191
第七节　第二型线积分与面积分 …… 193
7.1　场的概念 …… 194
7.2　第二型线积分 …… 196
7.3　第二型面积分 …… 202
习题 6.7 …… 210
第八节　各种积分的联系及其在场论中的应用 …… 213
8.1　Green 公式 …… 213
8.2　平面线积分与路径无关的条件 …… 218
8.3　Stokes 公式与旋度 …… 226
8.4　Gauss 公式与散度 …… 232
8.5　几种重要的特殊向量场 …… 239
习题 6.8 …… 245
综合练习题 …… 247
第七章　常微分方程 …… 249
第一节　常微分方程的基本知识 …… 249
1.1　微分方程与微分方程组 …… 249
1.2　微分方程及其解的几何解释 …… 254
1.3　可积组合与首次积分 …… 257
习题 7.1 …… 264
第二节　线性微分方程组 …… 265
2.1　齐次线性微分方程组 …… 266
2.2　非齐次线性微分方程组 …… 271
习题 7.2 …… 275
第三节　常系数线性微分方程组 …… 276
3.1　常系数齐次线性微分方程组的求解 …… 277
3.2　常系数非齐次线性微分方程组的求解 …… 286
习题 7.3 …… 294
第四节　高阶线性微分方程 …… 295
4.1　高阶线性微分方程解的结构 …… 296
4.2　高阶常系数线性微分方程的求解 …… 297
4.3　高阶变系数线性微分方程的求解问题 …… 310
习题 7.4 …… 314
第五节　微分方程的定性分析方法初步 …… 316
5.1　自治系统与非自治系统 …… 316

5.2 稳定性的基本概念 …… 318
5.3 判定稳定性的 Liapunov 函数法 …… 320
5.4 由线性近似系统判定稳定性 …… 326
习题 7.5 …… 339
综合练习题 …… 340
第八章 无限维分析入门 …… 342
第一节 从有限维空间到无限维空间 …… 342
1.1 多维空间概念的现实基础 …… 342
1.2 为什么要研究无限维空间 …… 344
1.3 数学中空间概念的含义 …… 347
第二节 赋范线性空间与压缩映射原理 …… 348
2.1 内积空间 …… 348
2.2 赋范线性空间 …… 351
2.3 赋范线性空间的收敛性与拓扑结构 …… 354
2.4 空间的完备性 …… 358
2.5 压缩映射原理及其应用 …… 361
习题 8.2 …… 365
第三节 Lebesgue 积分与 $L^p([a,b])$ 空间 …… 367
3.1 从 R 积分到 L 积分 …… 367
3.2 点集的 Lebesgue 测度与可测函数 …… 369
3.3 Lebesgue 积分 …… 374
3.4 $L^p([a,b])$ 空间 …… 380
习题 8.3 …… 382
第四节 Hilbert 空间与最佳逼近问题 …… 383
4.1 正交投影与正交分解 …… 383
4.2 最佳逼近问题 …… 387
4.3 Hilbert 空间的正交系与 Fourier 展开 …… 390
4.4 $L^2([a,b])$ 空间的 Fourier 展开与最佳均方逼近 …… 394
习题 8.4 …… 397
习题答案与提示 …… 398
参考文献 …… 420

第五章　多元函数微分学及其应用

在上册中，我们讨论了一元函数微积分，研究的对象是仅依赖于一个自变量的一元函数．然而，在实际问题中常会遇到依赖于两个或两个以上自变量的所谓多元函数，因此，还需要讨论多元函数的微积分．多元函数微积分的基本概念、理论和方法是一元函数微积分中相应概念、理论和方法的推广与发展，它们既有许多相似之处，又有很多本质上的不同．读者在学习多元函数微积分的时候，要善于将它与一元函数微积分进行比较，既要注意它们的共同点和相互联系，更要注意它们之间的区别，研究所出现的新情况和新问题．这样，才能深刻理解，融会贯通．

本章讨论多元函数微分学．首先简要介绍 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中点集拓扑的初步知识，在此基础上将极限、连续的概念推广到多元函数．然后重点讲解多元函数（包括多元数量值函数与多元向量值函数）的导数、微分与微分法以及它们的应用，包括利用多元函数微分讨论曲线和曲面的一些基本性质．

第一节　n 维 Euclid 空间点集拓扑初步

由于多元函数的定义域是 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的子集，因此，本节先介绍 $\mathbf{R}^n$ 中点集拓扑的初步知识．

1.1　n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$

在线性代数中已经学习过 n 维 Euclid 空间及有关的概念，现就其中主要之点概述如下．

我们称一个 $n(n\geqslant 2)$ 元有序实数组

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad(x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n)$$

为一个 **n 维实向量**，记 n 维实向量全体所构成的集合为

$$\mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，定义两个向量的加法为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),\tag{1.1}$$

向量与数 $\alpha\in\mathbf{R}$ 的乘法为

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n),\tag{1.2}$$

则 $\mathbf{R}^n$ 构成一个 **n 维实向量空间(或 n 维实线性空间)**.

在 n 维实向量空间中定义两个向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**内积**为

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\tag{1.3}$$

则 $\mathbf{R}^n$ 按照内积(1.3)构成一个 **n 维 Euclid 空间**.

n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的向量也称为点,向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量 x_i 也称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标. $\mathbf{R}^n$ 中的点(向量)常用小写黑体英文字母 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 等表示,有时也用大写英文字母 P、Q 等来表示 $\mathbf{R}^n$ 中的点.

$\mathbf{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{x}$ 的**长度(或范数)**定义为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},\tag{1.4}$$

两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的**距离**定义为

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.\tag{1.5}$$

$\mathbf{R}^n$ 中上述概念是三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中相应概念的直接推广.

1.2 $\mathbf{R}^n$ 中点列的极限

现在,我们仿照数列(即 $\mathbf{R}$ 中的点列)极限概念和有关性质来讨论 $\mathbf{R}^n$ 中的点列极限概念和有关性质.

定义 1.1(点列的极限) 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列, $\boldsymbol{x}_k=(x_{k,1},x_{k,2},\cdots,x_{k,n})$, $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一点,若当 $k\to\infty$ 时, $\rho(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{a})\to0$,即

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+,\text{使得}\forall k>N,\text{恒有}\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|<\varepsilon,\tag{1.6}$$

则称点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的**极限存在**,且称 $\boldsymbol{a}$ 为它的**极限**,记作

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}\quad\text{或}\quad\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{a}(k\to\infty).$$

这时也称点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ **收敛于 $\boldsymbol{a}$**.

定理1.1 设点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}\subseteq\mathbf{R}^n$,点 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$,则 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$ 的充要条件是 $\forall i=1,2,\cdots,n$,都有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{k,i}=a_i$.

证 由于 $\forall i=1,2,\cdots,n$,恒有

$$|x_{k,i}-a_i|\leqslant\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|.$$

根据定义 1.1 立即可证明必要性.下面证明充分性.设 $\forall i=1,2,\cdots,n$,都有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{k,i}=a_i$,则

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_i\in\mathbf{N}_+,\text{使得}\forall k>N_i,\text{恒有}|x_{k,i}-a_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

令 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_n\}$,则 $\forall k>N$,必有

$$|x_{k,i}-a_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

从而 $\forall k>N$,我们有

$$\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{k,i}-a_i)^2}<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$. ▍

定理 1.1 表明,$\mathbf{R}^n$ 中点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$ 等价于该点列的各个坐标(或分量)所构成的数列 $\{x_{k,i}\}$ 分别收敛于点 $\boldsymbol{a}$ 的相应坐标(或分量)a_i.因此,它把研究 $\mathbf{R}^n$ 中点列的收敛问题转化为实数列的收敛问题.这样,第一章中所讨论过的收敛数列的许多性质就可以利用该定理很容易地推广到 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列.读者不难证明下面的定理.

定理1.2 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列,则

(1) $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的极限是唯一的;

(2) $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是有界点列,即 $\exists M(\in\mathbf{R})>0$,使得 $\forall k\in\mathbf{N}_+$,恒有 $\|\boldsymbol{x}_k\|\leqslant M$;

(3) 若 $\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{y}_k\to\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{x}_k\pm\boldsymbol{y}_k\to\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$,$\alpha\boldsymbol{x}_k\to\alpha\boldsymbol{a}$,$\langle\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{y}_k\rangle\to\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,其中 $\alpha\in\mathbf{R}$;

(4) 若 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$,则它的任一子列也收敛于 $\boldsymbol{a}$.

由于 $\mathbf{R}^n$ 中的向量不能比较大小,也不能相除,因此,数列极限中与单调性、保序性、确界以及商有关的概念与命题不能推广到 $\mathbf{R}^n$ 中的点列.但是,闭区间套定理、Bolzano - Weierstrass 定理与 Cauchy 收敛原理在 $\mathbf{R}^n$ 中仍然成立.

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbf{R}^n$,称点集

$$\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中的 n 维闭区间,记作 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$.显然,

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n].$$

当 $n=1$ 时，它就是直线 $\mathbf{R}$ 上的闭区间 $[a_1,b_1]$；当 $n=2$ 时，它是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的闭矩形 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$；当 $n=3$ 时，它是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的闭长方体 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$. 下面证明 $\mathbf{R}^n$ 中的闭区间套定理.

定理1.3（闭区间套定理） 设 $\{[\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_k]\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个闭区间套，即

(1) $[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1]\supseteq[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2]\supseteq\cdots\supseteq[\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_k]\supseteq\cdots$；

(2) $\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{b}_k-\boldsymbol{a}_k\|=0$，其中 $\boldsymbol{a}_k=(a_{k,1},a_{k,2},\cdots,a_{k,n})\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{b}_k=(b_{k,1},b_{k,2},\cdots,b_{k,n})\in\mathbf{R}^n$，则存在唯一的 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$，使

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}[\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_k]=\{\boldsymbol{\xi}\}.$$

证 由于每个 $\{[a_{k,i},b_{k,i}]\}(i=1,2,\cdots,n)$ 都是直线 $\mathbf{R}$ 上的闭区间套，因此根据直线上的闭区间套定理，对于每个 $i=1,2,\cdots,n$，都存在唯一的实数 $\xi_i\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a_{k,i},b_{k,i}]$. 令 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n$，且 $\boldsymbol{\xi}\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_k]$. ▌

利用定理 1.3，仿照第一章中定理 3.9 的证法容易证明下面的定理.

定理1.4（Bolzano－Weierstrass 定理） $\mathbf{R}^n$ 中的有界点列必有收敛子列.（$\mathbf{R}^n$ 中点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的收敛子列的极限也称为 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的**极限点**.）

设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点列，若

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N}_+,\text{使得}\ \forall k>N\ \text{及}\ p\in\mathbf{N}_+,\text{恒有}\ \|\boldsymbol{x}_{k+p}-\boldsymbol{x}_k\|<\varepsilon,$$

则称 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的**基本点列**或 **Cauchy 点列**. 类似于定理 1.1 不难证明，$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 Cauchy 点列的充要条件是 $\forall i=1,2,\cdots,n$，$\{x_{k,i}\}$ 都是 Cauchy 数列. 根据第一章中所介绍的数列的 Cauchy 收敛原理，立即可以得到 $\mathbf{R}^n$ 中点列的 Cauchy 收敛原理如下.

定理1.5（Cauchy 收敛原理） $\mathbf{R}^n$ 中点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\mathbf{R}^n$ 中点的充要条件为 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Cauchy 点列.

这个定理刻画了空间 $\mathbf{R}^n$ 的完备性，就是说，$\mathbf{R}^n$ 中的 Cauchy 点列必收敛于 $\mathbf{R}^n$ 中的点. 现代数学中就是以此作为抽象空间完备性定义的，关于这个问题在第八章中再作进一步说明.

1.3 $\mathbf{R}^n$ 中的开集与闭集

本段简要地介绍 $\mathbf{R}^n$ 中点集的基本知识，包括开集、闭集与区域等. 虽然这些概念都是在空间 $\mathbf{R}^n$ 中定义的，但读者可以在平面 $\mathbf{R}^2$ 中去理解它们.

定义1.2 设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$. 若存在 A 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，

$x_k \neq a(k=1,2,\cdots)$,使得 $x_k \to a(k\to\infty)$,则称 a 是 A 的一个**聚点**.A 的所有聚点构成的集合称为 A 的**导集**,记作 A'.集合 $\bar{A}=A\cup A'$ 称为 A 的**闭包**.若 $a\in A$,但 $a \overline{\in} A'$,则称 a 为 A 的**孤立点**.若 $A'\subseteq A$,则称 A 为**闭集**.

由定义易见,集 A 的聚点不一定属于 A.若 A 的所有聚点都属于 A,则 A 是闭集.因此,若 A 是闭集,$\{x_k\}$是 A 中的任一点列,且 $x_k\to a(k\to\infty)$,则 $a\in A$.反之亦真.这说明闭集对于极限运算是封闭的.

例如,设 $A=\left\{\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\middle| k\in \mathbf{N}_+\right\}$是一平面点集,则点$(0,0)$是 A 的唯一聚点,它不属于 A,并且 $A'=\{(0,0)\}$,$\bar{A}=A\cup\{(0,0)\}$,A 中的所有点都是它的孤立点.A 不是闭集,但 $\bar{A}=A\cup\{(0,0)\}$是闭集.

定义1.3　设 $a\in\mathbf{R}^n$,$\delta>0$,称点集

$$U(a,\delta)=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x-a\|<\delta\}$$

为以 a 为中心、δ 为半径的**开球**或点 a 的 δ **邻域**,称

$$\mathring{U}(a,\delta)=U(a,\delta)\setminus\{a\}$$

为点 a 的**去心** δ **邻域**.它们分别简记为 $U(a)$与 $\mathring{U}(a)$.

在直线 $\mathbf{R}$ 上,开球 $U(a,\delta)$就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$;在平面 $\mathbf{R}^2$ 上,开球 $U(a,\delta)$就是 $a=(a_1,a_2)$为中心,δ 为半径的圆周$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2=\delta^2$ 内的所有点构成的集合(称为开圆盘);在空间 $\mathbf{R}^3$ 中,它就是以 $a=(a_1,a_2,a_3)$为中心,δ 为半径的球面$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2=\delta^2$ 内的所有点构成的集合,也就是通常所说的开球.

与数列极限类似,$\mathbf{R}^n$ 中点列收敛的概念也可以用邻域来刻画.设$\{x_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列,若

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+,\text{使得}\forall k>N,\text{恒有 } x_k\in U(a,\varepsilon),$$

则称点列$\{x_k\}$收敛于 a,a 是$\{x_k\}$的极限.

定理1.6　设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集,$a\in\mathbf{R}^n$,则 $a\in A'$的充要条件为 $\forall\varepsilon>0$,$\mathring{U}(a,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$.这就是说,$a$ 为A 的聚点当且仅当a 的任何ε 邻域中都含有 A 中除a 之外的点.

证　必要性　设 $a\in A'$,根据定义 1.2,存在 A 中的点列$\{x_k\}$,$x_k\neq a(k=1,2,\cdots)$,使得$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$.用邻域来表示,即 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,使得 $\forall k>N$,恒有 $x_k\in\mathring{U}(a,\varepsilon)$.由于$\{x_k\}\subseteq A$,从而得知,$\forall\varepsilon>0$,$\mathring{U}(a,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$.

充分性　若 $\forall\varepsilon>0$,$\mathring{U}(a,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$,则 $\forall k\in\mathbf{N}_+$,取 $\varepsilon_k=\frac{1}{k}$,必存在点 $x_k\in\mathring{U}(a,\varepsilon_k)\cap A$.这就是说,存在 A 中的点列$\{x_k\}$,$x_k\neq a(k=1,2,\cdots)$,并且

$\| \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a} \| < \varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$，从而 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$，故 $\boldsymbol{a} \in A'$. ▌

由定义 1.2，若 $A' = \varnothing$，则 A 为闭集. 因此，单点集和有限点集都是闭集.

定义1.4　设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$.

(1) 若存在 $\delta > 0$，使 $U(\boldsymbol{a}, \delta) \subseteq A$，则称 $\boldsymbol{a}$ 是集 A 的**内点**. 由 A 的所有内点构成的集称为 A 的**内部**，记作 A° 或 $\mathrm{int}A$；

(2) 若存在 $\delta > 0$，使 $U(\boldsymbol{a}, \delta) \cap A = \varnothing$，则称 $\boldsymbol{a}$ 是集 A 的**外点**. A 的所有外点构成的集称为 A 的**外部**，记作 $\mathrm{ext}A$；

(3) 若对任何 $\delta > 0$，$U(\boldsymbol{a}, \delta)$ 中既含有 A 中的点，也含有 A 的余集 A^c 中的点，则称 $\boldsymbol{a}$ 为集 A 的**边界点**. A 的所有边界点构成的集称为 A 的**边界**，记作 ∂A.

由定义易见，$\mathbf{R}^n$ 中的任一点是且仅是 A 的内点、外点与边界点中的一种，即

$$\mathbf{R}^n = A^\circ \cup \partial A \cup \mathrm{ext}A,$$

且右端三个点集互不相交(图 1.1).

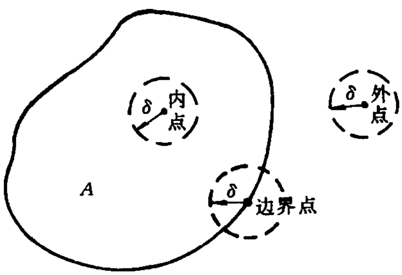


图 1.1

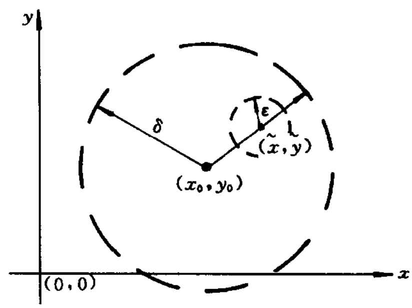


图 1.2

例1.1　设 $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$，证明 $A^\circ = A$，

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \delta^2\};$$

$$\overline{A} = A \cup \partial A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant \delta^2\}.$$

证　题中关于边界 ∂A 和闭包的结论是显然的，下面证明 $A^\circ = A$. 由定义知 $A^\circ \subseteq A$，因此只要证明 $A \subseteq A^\circ$. 设 $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in A$，取 $\varepsilon < \delta - \sqrt{(\tilde{x} - x_0)^2 + (\tilde{y} - y_0)^2}$，则点 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 的 ε 邻域 $U((\tilde{x}, \tilde{y}), \varepsilon) \subseteq A$，因而 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 是 A 的内点(图 1.2)，故 $A \subset A^\circ$. ▌

由定义易见，对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任一点集 A，必有

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

特别地，称开球与它的边界之并为**闭球**，记作

$$\overline{U}(\boldsymbol{a},\delta)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\leqslant\delta\}.$$

例1.2　设 $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=0, 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$. 由定义 1.4 易知，$A^\circ=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 1<x^2+y^2<4\}$，$\mathrm{ext}A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x^2+y^2<1, x^2+y^2>4\}$，$\partial A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1, x^2+y^2=4\}\cup\{(0,0)\}$，原点 $(0,0)$ 是 A 的孤立点，$\overline{A}=A\cup\partial A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=0, 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$（图 1.3）.

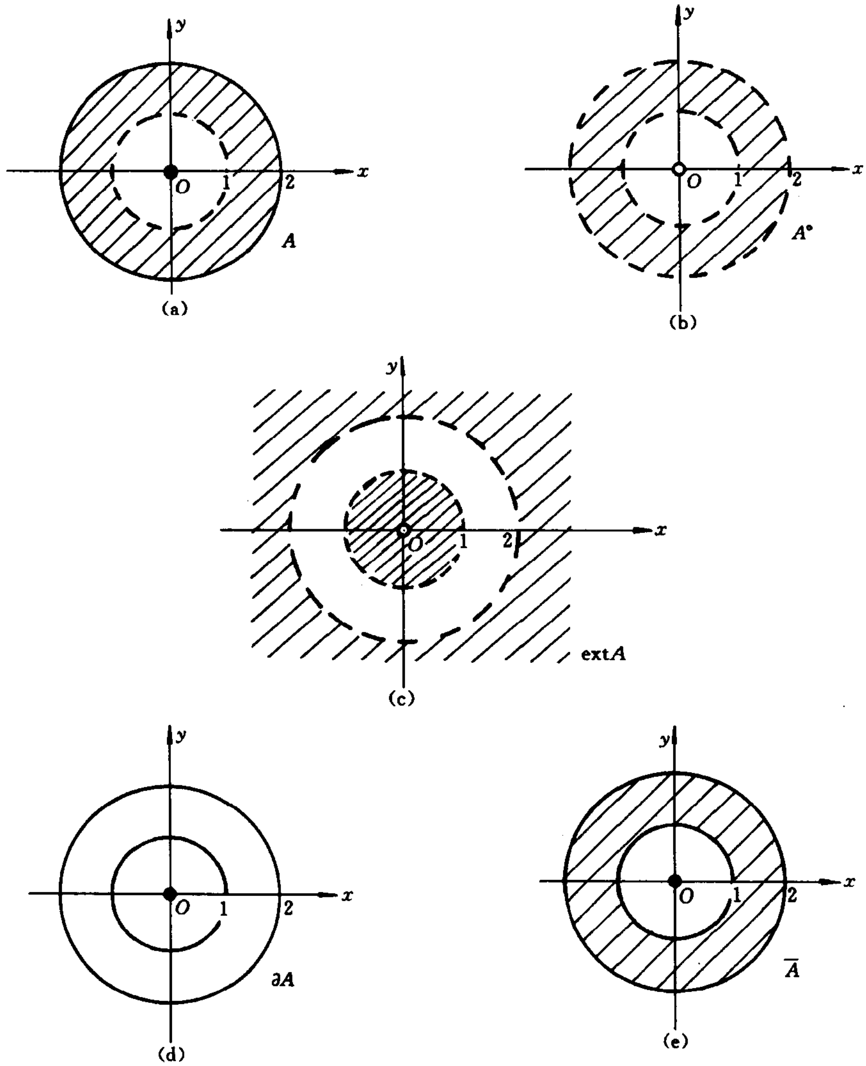


图 1.3

定义1.5　设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$，若 $A^\circ=A$，即 A 中的点全是 A 的内点，则称 A 为

开集.

下面的定理刻画了开集与闭集的关系.

定理1.7　$A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是开集的充要条件为 A^c 是闭集.

证　必要性　设 A 是开集,故 $A^\circ=A$.为了证明 A^c 是闭集,只要证明 $(A^c)'\subseteq A^c$.若 $(A^c)'=\varnothing$,则显然有 $(A^c)'\subseteq A^c$.若 $(A^c)'\neq\varnothing$,设 $\boldsymbol{x}\in(A^c)'$,则 $\forall\,\varepsilon>0$,

$$\mathring{U}(\boldsymbol{x},\varepsilon)\cap A^c\neq\varnothing.$$

由内点的定义知 $\boldsymbol{x}\,\overline{\in}\,A^\circ=A$,即 $\boldsymbol{x}\in A^c$,故 $(A^c)'\subseteq A^c$.

充分性　设 A^c 是闭集,则 $(A^c)'\subseteq A^c$.为了证明 A 是开集,由于 $A^\circ\subseteq A$,所以只要证明 $A\subseteq A^\circ$.设 $\boldsymbol{x}\in A$,则 $\boldsymbol{x}\,\overline{\in}\,A^c$.又因 A^c 为闭集,故有 $(A^c)'\subseteq A^c$,所以有 $\boldsymbol{x}\,\overline{\in}\,(A^c)'$.根据定理 1.6,必 $\exists\,\delta_0>0$,使 $\mathring{U}(\boldsymbol{x},\delta_0)\cap A^c=\varnothing$,故 $\mathring{U}(\boldsymbol{x},\delta_0)\subseteq A$,即 $\boldsymbol{x}\in A^\circ$,所以 $A\subseteq A^\circ$.　▌

例1.3　$\mathbf{R}^n$ 中的开球 $U(\boldsymbol{a},\delta)$ 与开区间

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\mid a_i<x_i<b_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

都是开集.闭球 $\overline{U}(\boldsymbol{a},\delta)$ 与闭区间

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\{\boldsymbol{x}\in(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

都是闭集.例 1.2 中的 A° 与 $\mathrm{ext}A$ 都是开集,∂A 与 $\overline{A}$ 是闭集.

读者应当注意,开集与闭集是常常碰到的两类点集,但是还存在着很多其他类型的点集.例如,直线 $\mathbf{R}$ 上的有理点集与无理点集既不是开集,又不是闭集,因为它们都没有内点,而且实数都是它们的聚点.因此,不能说一个点集"非开即闭".

下面的定理刻画了开集的特征.

定理1.8　在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中,开集有如下性质:

(1) 空集 $\varnothing$ 与全空间 $\mathbf{R}^n$ 是开集;

(2) 任意多个开集的并是开集;

(3) 有限多个开集的交是开集.

证　根据定义,性质(1)显然成立.

(2) 设 $A_\alpha\subseteq\mathbf{R}^n$($\alpha\in\Lambda$,$\Lambda$ 称为指标集)是一族开集.任取 $\boldsymbol{x}\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$,则必 $\exists\,\alpha_0\in\Lambda$ 使 $\boldsymbol{x}\in A_{\alpha_0}$.由于 A_{α_0} 是开集,所以 $\exists\,\delta>0$,使 $U(\boldsymbol{x},\delta)\subseteq A_{\alpha_0}\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$,即 $\boldsymbol{x}$ 是 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 的内点,故 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 是开集.

(3) 设 $A_k\subseteq\mathbf{R}^n$($k=1,2,\cdots,m$)是开集,任取 $\boldsymbol{x}\in\bigcap\limits_{k=1}^{m}A_k$,则 $\boldsymbol{x}\in A_k$($k=1$,

$2,\cdots,m$).由于 A_k 是开集,所以 $\forall k=1,2,\cdots,m$,$\exists\,\delta_k>0$,使 $U(\boldsymbol{x},\delta_k)\subseteq A_k$.取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}$,则

$$U(\boldsymbol{x},\delta)\subseteq U(\boldsymbol{x},\delta_k)\subseteq A_k(k=1,2,\cdots,m).$$

因此,$U(\boldsymbol{x},\delta)\subseteq\bigcap\limits_{k=1}^{m}A_k$,即 $\boldsymbol{x}$ 是 $\bigcap\limits_{k=1}^{m}A_k$ 的内点,故 $\bigcap\limits_{k=1}^{m}A_k$ 是开集. ▌

由此定理,读者不难利用对偶原理(第一章定理 1.2)证明闭集的三个对应的基本性质:

(1) 空集 $\varnothing$ 和全空间 $\mathbf{R}^n$ 是闭集;

(2) 任意多个闭集的交是闭集;

(3) 有限多个闭集的并是闭集.

1.4　$\mathbf{R}^n$ 中的紧集与区域

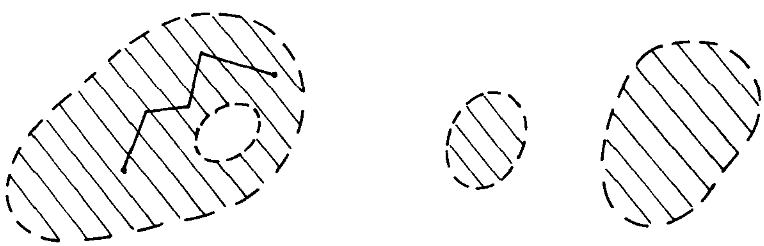
设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集,如果存在一个常数 $M>0$,使得对于所有的 $\boldsymbol{x}\in A$,都有 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant M$,则称 A 是**有界集**,否则称为**无界集**.显然,有界集的几何含义是它能包含在 $\mathbf{R}^n$ 中一个以原点 $\mathbf{0}$ 为中心、M 为半径的闭球 $\overline{U}(\mathbf{0},M)$ 中.

定义1.6　若 A 中任何点列都有收敛子列,则称 A 是**列紧的**(或**相对紧的**).若 A 是列紧闭集,则称 A 为**紧集**.

根据 Bolzano - Weierstrass 定理,$\mathbf{R}^n$ 中的有界点集 A 必为列紧集.因而,若 A 是有界闭集,则 A 必为紧集.反之不难证明,若 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是紧集,则 A 必为有界闭集.

定义1.7　设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是一个点集,如果 A 中的任意两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 都能用完全属于 A 的有限个线段联结起来,则称 A 是**连通集**.连通的开集称为**区域**.区域与它的边界之并称为**闭区域**.

显然,$\mathbf{R}^2$ 中的开圆盘是区域,闭圆盘是闭区域.图1.4(a)中的集合是区



(a)　　(b)

图 1.4