程维虎　来向荣　编

随机过程讲义

SuiJi GuoCheng JiangYi

北京工业大学出版社

随机过程讲义

程维虎　来向荣　编

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书介绍随机过程的一般理论。内容包括随机过程的基本概念、二阶矩过程、平稳过程和离散参数齐次可列马尔可夫过程等。本书还选入了部分国内外最新研究成果,材料丰富。

本书可作为高等理工科院校及高等师范院校数学类各专业随机过程课程的教材,也可作为其他人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程讲义/程维虎,来向荣编. —北京:北京工业大学出版社,2001.2

ISBN 7-5639-0976-1

Ⅰ.随… Ⅱ.①程…②来… Ⅲ.随机过程—高等学校—教材 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 03946 号

随机过程讲义

程维虎 来向荣 编

*

北京工业大学出版社出版发行

邮编:100022 电话:(010)67392308

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

*

2001 年 3 月第 1 版 2001 年 3 月第 1 次印刷

850mm×1168mm 32 开本 7.75 印张 189 千字

印数:1～1000 册

ISBN 7-5639-0976-1/G·526

定价:13.00 元

前　　言

本书是根据 1997 年 4 月全国地方重点院校教材编写研讨会的精神，参照 1997 年 10 月“高等学校理科数学类教材编写大纲讨论会”制定的“概率论与随机过程编写大纲”，结合编者多年来教学与科研体会而编写的。本书可作为高等理工科院校及高等师范院校数学类专业概率论与随机课程的教材，也可作为实际工作人员的参考书。

全书由程维虎、来向荣合作完成。在本书的编写中，编者广泛地听取了同行专家的意见，尽量吸纳他人之长。在取材与写作上，编者做了如下方面的努力：

(1) 尽量保证理论叙述的完整性与严谨性，对该课程中最基本的概念、定理及公式做较全面及严格的叙述，并尽量阐述其实际意义。

(2) 精选能够加深和理解基本概念、定理及公式的例题与习题。

(3) 对一些定理仅给出条件和结论，并指明参考文献，以保证教学重点的完成。

(4) 在保证基本内容完整的同时，充分反映国内外的最新研究成果。

在本书编写过程中，我们得到了高旅端、黄振侃、赵一夫等同志的关心与帮助，得到了北京工业大学教材委员会、北京工业大学出版社的大力支持与帮助，得到了北京市教育委员会基金的资助。编者借此机会一并致谢。

由于编者水平有限，不当乃至谬误之处在所难免，恳请国内同行及广大读者不吝赐教。

编　者

2001 年 1 月

目　　录

第一章　随机过程的基本概念

客观世界中的许多随机现象表示着事物随机变化的过程. 随机现象不能仅用一个随机变量来描述,需要用一族随机变量来描述,这就是随机过程. 本章将介绍随机过程的基本概念、随机过程的有限维分布族和随机过程的分类.

§1.1　随机过程的定义

定义 1.1.1　设(Ω,F,P)是概率空间,T 是实数集的某个子集,若对每个 $t\in T$,$X(t,\omega)$是概率空间(Ω,F,P)上的随机变量,则称这族随机变量$\{X(t,\omega),t\in T\}$为(Ω,F,P)上的一个随机过程,简称过程. T 为过程的参数集.

易见,我们在概率论中所学过的多维随机变量和随机变量序列,都可以看成是随机过程.

如果参数 t 表示时间,$X(t,\omega)$表示某系统在时刻 t 的状态,则随机过程$\{X(t,\omega),t\in T\}$表示该系统的状态 $X(t,\omega)$随时间 t 的变化而变化的情况,且在时刻 t 的状态不能完全由 t 来确定,它还受随机因素 ω 的影响,于是,称集合$\{X(t,\omega),t\in T,\omega\in\Omega\}$为过程的状态空间.

定义 1.1.2　对每个固定的 $\omega\in\Omega$,$X(t,\omega)$是 T 上的实值函数,称此函数为过程相应于 ω 的样本函数(或轨道,或现实).

易见,一个样本函数可看成是对随机过程的一次观察值.

上面所定义的随机过程为一元随机过程. 如果对每个 $t\in T$,$X(t,\omega)$,$Y(t,\omega)$都是(Ω,F,P)上的随机变量,则称随机变量族

$\{X(t,\omega),Y(t,\omega),t\in T\}$为$(\Omega,F,P)$上的一个二元随机过程. 类似,对自然数$n>2$,可定义$n$元随机过程.

一元随机过程$\{X(t,\omega),t\in T\}$可简写为$\{X(t),t\in T\}$或$\{X_t,t\in T\}$;二元随机过程$\{X(t,\omega),Y(t,\omega),t\in T\}$可简写为$\{X(t),Y(t),t\in T\}$或$\{X_t,Y_t,t\in T\}$等.

§1.2 随机过程的有限维分布函数族

定义 1.2.1 设$\{X(t),t\in T\}$是某概率空间上的一元随机过程,对任意固定的$t\in T$,$F(t;x)$表示$X(t)$的分布函数,则称$\{F(t;x),t\in T\}$为过程的一维分布函数族. 对任意固定的$t_1,t_2\in T$,以$F(t_1,t_2;x_1,x_2)$表示$X(t_1),X(t_2)$的联合分布函数,则称$\{F(t_1,t_2;x_1,x_2),t_1,t_2\in T\}$为过程的二维分布函数族.

一般地,对任意固定的自然数n,任意固定的$t_1,\cdots,t_n\in T$,以$F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)$表示$X(t_1),\cdots,X(t_n)$的联合分布函数,则称$\{F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n),t_1,\cdots,t_n\in T\}$为过程的$n$维分布函数族,$\{F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n),t_1,\cdots,t_n\in T,n\geqslant 1\}$为过程的有限维分布函数族.

固定$t_1,\cdots,t_n\in T$,可以得到过程的一个n维分布函数. 当$t_1,\cdots,t_n$在T中变动,n在自然数集中变动时,就得到了过程的有限维分布函数族.

过程的有限维分布函数族满足如下的相容性条件:

1. 对$1,\cdots,n$的任一排列$j_1,\cdots,j_n$,均有

$$F(t_{j_1},\cdots,t_{j_n};x_{j_1},\cdots,x_{j_n})=F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n). \tag{1.2.1}$$

2. 对任意固定的自然数$m<n$,均有

$$F(t_1,\cdots,t_m;x_1,\cdots,x_m)$$
$$=F(t_1,\cdots,t_m,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_m,\infty,\cdots,\infty)$$

$$\equiv \lim_{x_{m+1},\cdots,x_n\to+\infty} F(t_1,\cdots,t_m,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_m,\cdots,x_n). \tag{1.2.2}$$

注:(1.2.1)式的成立,是因为事件的乘法满足交换律;(1.2.2)式的成立,是根据概率论中联合分布函数确定了边缘分布函数的定理.

下面撇开随机过程,定义抽象的有限维分布函数族.

定义 1.2.2 对任意固定的自然数 n,若 n 元实变实值函数 $F(x_1,\cdots,x_n)$满足:

(1) $F(x_1,\cdots,x_n)$是每个变元的单调不减函数;

(2) $F(x_1,\cdots,x_n)$是每个变元的左连续函数;

(3) 当某个变元趋于$-\infty$时函数的极限值为零,当所有变元趋于$+\infty$时函数的极限值为1;

(4) 对任意的 n,任意的实数 $a_j<b_j$,$j=1,\cdots,n$,均有

$$F(b_1,\cdots,b_n)-\sum_{i=1}^{n}F_i+\sum_{i<j}F_{ij}-\sum_{i<j<k}F_{ijk}+\cdots+(-1)^nF_{1\cdots n}\geqslant 0,$$

其中,F_i 是将 $F(b_1,\cdots,b_n)$中的 b_i 换成 a_i 后的值,对 $i<j$,F_{ij}是将 $F(b_1,\cdots,b_n)$中的 b_i 换成 a_i,b_j 换成 a_j 后的值,等等,则称 $F(x_1,\cdots,x_n)$为抽象的 n 元分布函数.

实际上,由(3)与(4)可推导出(1)来,我们将(1)单独列出是为了醒目.另外,当 $n=1$ 时,(4)化成了(1).

定理 1.2.1(柯尔莫哥洛夫定理) 设 T 是实数集的子集,对自然数 n,$t_1,\cdots,t_n\in T$,$F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)$作为 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数是抽象的 n 元分布函数,抽象分布函数族$\{F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n),t_1,\cdots,t_n\in T,n\geqslant 1\}$满足前面所提到的相容性条件(1)和(2),则存在一个概率空间上的一个随机过程$\{X(t),t\in T\}$,其有限维分布函数族恰为$\{F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n),t_1,\cdots,t_n\in T,n\geqslant 1\}$.

定理的证明可参见文献[2]第 4－5 页.

下面顺带介绍一下随机过程的有限维特征函数族.

设$\{X(t),t\in T\}$是某概率空间上的一元随机过程,对任意固定的$t_1,\cdots,t_n\in T$,以$\varphi(t_1,\cdots,t_n;\theta_1,\cdots,\theta_n)$表示$n$维随机变量$[X(t_1),\cdots,X(t_n)]$的特征函数,即$\varphi(t_1,\cdots,t_n;\theta_1,\cdots,\theta_n)=E\exp[\mathrm{j}\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k X(t_k)]$,其中,$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$;$\theta_1,\cdots,\theta_n$是实变量.

称$\{\varphi(t_1,\cdots,t_n;\theta_1,\cdots,\theta_n),t_1,\cdots,t_n\in T,n\geqslant 1\}$为过程的有限维特征函数族,它满足如下的相容性条件:

3. 对$1,\cdots,n$的任一排列$j_1,\cdots,j_n$,有

$$\varphi(t_{j_1},\cdots,t_{j_n};\theta_{j_1},\cdots,\theta_{j_n})=\varphi(t_1,\cdots,t_n;\theta_1,\cdots,\theta_n).\tag{1.2.3}$$

4. 对任意固定的自然数$m<n$,有

$$\begin{aligned}&\varphi(t_1,\cdots,t_m;\theta_1,\cdots,\theta_m)\\&=\varphi(t_1,\cdots,t_m,\cdots,t_n;\theta_1,\cdots,\theta_m,0,\cdots,0).\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

(1.2.3)式的成立,是因为数的加法满足交换律;(1.2.4)式的成立,可由特征函数的定义直接验证.

§1.3 随机过程的常见类型

以随机过程的有限维分布函数的特性为标志,随机过程有以下一些常见类型.

1. 独立增量过程:这种过程的增量是相互独立的随机变量,即对任给的$t_1,\cdots,t_n\in T$,$X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$相互独立.

2. 马尔可夫过程:在已知这种过程现在的条件下,过程的将来不依赖于过程的过去.

3. 二阶矩过程:这种过程的每个随机变量均存在二阶矩.常见的二阶矩过程有正交增量过程、宽平稳过程和正态过程等.

随机过程的类型又可按其参数集或状态空间是离散集还是连续集来划分，如离散参数可列状态随机过程，连续参数可列状态随机过程，连续参数连续状态随机过程等.

第二章　二阶矩过程引论

§2.1　二阶矩过程的定义

设 $Z=X+\mathrm{j}Y$，其中 X 与 Y 是概率空间 (Ω,F,P) 上的实值随机变量，$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$，则称 Z 为 (Ω,F,P) 上的复值随机变量.

设 T 是实数集的子集，若对每个 $t\in T$，$Z(t)$ 是 (Ω,F,P) 上的一个复值随机变量，则称复值随机变量族 $\{Z(t),t\in T\}$ 为 (Ω,F,P) 上的一个复值随机过程，T 为过程的参数集. 以 $X(t)$，$Y(t)$ 分别表示 $Z(t)$ 的实部和虚部系数，则复值随机过程 $\{Z(t),t\in T\}$ 相当于一个二元实值随机过程 $\{X(t),Y(t),t\in T\}$.

设 n 是自然数，对任意固定的 $t_1,\cdots,t_n\in T$，称 $2n$ 维实值随机变量 $[X(t_1),\cdots,X(t_n),Y(t_1),\cdots,Y(t_n)]$ 的分布函数为 n 维复值随机变量 $[Z(t_1),\cdots,Z(t_n)]$ 的分布函数. 由此定义可知：若 $X(t)$，$Y(t)$ 分别是 $Z(t)$ 的实部和虚部系数，则二维实值随机变量 $[X(t),Y(t)]$ 的分布函数就是复值随机变量 $Z(t)$ 的分布函数.

对复值随机变量 $Z=X+\mathrm{j}Y$，当 EX、EY 存在时，称 $EX+\mathrm{j}EY$ 为 Z 的数学期望，简称期望，记作 EZ；当 $E|Z-EZ|^2$ 存在时，称其为 Z 的方差，记作 DZ.

对两个复值随机变量 $Z_1=X_1+\mathrm{j}Y_1$，$Z_2=X_2+\mathrm{j}Y_2$，当 $E(Z_1-EZ_1)\overline{(Z_2-EZ_2)}$ 存在时，称其为 Z_1，Z_2 的协方差，记作

$$\operatorname{cov}(Z_1,Z_2).$$

对复值随机过程 $\{Z(t),t\in T\}$，当 $t\in T$ 时，若 $EZ(t)$ 皆存在，则它是 T 上的函数，称其为过程的期望函数，记作 $m(t)$；当 $t\in T$

时，若 $E|Z(t)-EZ(t)|^2$ 皆存在，则它是 T 上的函数，称其为过程的方差函数，记作 $D(t)$；当 $t,s\in T$ 时，若 $\mathrm{cov}[Z(s),Z(t)]$ 皆存在，则它是 $T\times T$ 上的函数，称其为过程的协方差函数，记作 $\Gamma(s,t)$.

定义 2.1.1 设 $\{Z(t),t\in T\}$ 是复值随机过程，若对每个 $t\in T$，$E|Z(t)|^2$ 存在，则称此过程为二阶矩过程.

命题 2.1.1 设 Z 是复值随机变量，若 $E|Z|^2$ 存在，则 EZ，DZ 存在，且有 $DZ=E|Z|^2-|EZ|^2$.

证 设 X,Y 分别表示 Z 的实部和虚部系数，则 $|Z|^2=X^2+Y^2$，由假设知 $E(X^2+Y^2)$ 存在. 由 $EX^2\leqslant E(X^2+Y^2)$ 及 $EY^2\leqslant E(X^2+Y^2)$ 可知，EX^2，EY^2 存在. 由概率论知识可知，EX、EY 存在，所以 EZ 存在. 另外，由

$$
\begin{aligned}
|Z-EZ|^2 &= (Z-EZ)\overline{(Z-EZ)} \\
&= (Z-EZ)(\overline{Z}-\overline{EZ}) \\
&= |Z|^2 - Z\,\overline{EZ} - \overline{Z}EZ + EZ\,\overline{EZ}
\end{aligned}
$$

及 $\overline{EZ}=E\,\overline{Z}$，可知 DZ 存在，且有

$$
\begin{aligned}
DZ &= E|Z-EZ|^2 \\
&= E|Z|^2 - EZ\,\overline{EZ} \\
&= E|Z|^2 - |EZ|^2.
\end{aligned}
$$

命题 2.1.2 设 Z 是复值随机变量，若 DZ 存在，则 $E|Z|^2$ 存在，且有 $DZ=E|Z|^2-|EZ|^2$.

证 由 DZ 存在，知 EZ 存在. 由

$$
|Z-EZ|^2 = |Z|^2 - Z\,\overline{EZ} - \overline{Z}EZ + EZ\,\overline{EZ}
$$

及 $\overline{EZ}=E\,\overline{Z}$，可知 $E|Z|^2$ 存在，且有

$$
\begin{aligned}
DZ &= E|Z-EZ|^2 \\
&= E|Z|^2 - |EZ|^2.
\end{aligned}
$$

定理 2.1.1 设 $\{Z(t),t\in T\}$ 是复值随机过程，若对每个 $t\in T$，$E|Z(t)|^2$ 存在，则过程的期望函数 $m(t)$、方差函数 $D(t)$ 均存

在，且有 $D(t)=E|Z(t)|^2-|m(t)|^2$；如果过程的方差函数 $D(t)$ 存在，则对每个 $t\in T$，$E|Z(t)|^2$ 存在，且有

$$D(t)=E|Z(t)|^2-|m(t)|^2. \tag{2.1.1}$$

证 由命题 2.1.1 及命题 2.1.2 可得.

定理 2.1.2 设 $\{Z(t),t\in T\}$ 是复值随机过程，则以下三命题等价：

(i) 对每个 $t\in T$，$E|Z(t)|^2$ 存在；

(ii) 过程的方差函数 $D(t)$ 存在；

(iii) 过程的协方差函数 $\Gamma(s,t)$ 存在.

证 (i)与(ii)等价由定理 2.1.1 可得. 现设(ii)成立. 对 s、$t\in T$，有

$$\begin{aligned}
&|E[Z(s)-EZ(s)]\overline{[Z(t)-EZ(t)]}| \\
\leqslant\ &E|[Z(s)-EZ(s)][Z(t)-EZ(t)]| \\
&\quad\text{（由施瓦茨不等式得）} \\
\leqslant\ &\sqrt{E|Z(s)-EZ(s)|^2E|Z(t)-EZ(t)|^2} \\
=\ &\sqrt{D(s)D(t)},
\end{aligned}$$

这表明 $\Gamma(s,t)$ 存在，即(iii)成立.

反之，如果(iii)成立，则由 $\Gamma(t,t)=D(t)$，可知(ii)成立，即(ii)与(iii)等价，定理 2.1.2 得证.

由定理 2.1.2 不难看出，定理 2.1.2 中的(i)，(ii)，(iii)均可作为二阶矩过程的定义.

定理 2.1.3 设 $\{Z(t),t\in T\}$ 是复值二阶矩过程，$X(t)$，$Y(t)$ 分别是 $Z(t)$ 的实部及虚部系数，则 $\{X(t),t\in T\}$，$\{Y(t),\in T\}$ 都是实值二阶矩过程.

证 由 $|Z(t)|^2=X^2(t)+Y^2(t)$ 知，$E[X^2(t)+Y^2(t)]$ 存在，从而 $E[X^2(t)]$，$E[Y^2(t)]$ 存在，定理得证.

§2.2 协方差函数的性质

定理 2.2.1 二阶矩过程$\{Z(t),t\in T\}$的协方差函数$\Gamma(s,t)$是埃尔密特的，即对$\forall\ s,t\in T$，有$\Gamma(s,t)=\overline{\Gamma(t,s)}$.

证 设$s,t\in T$，有

$$\begin{aligned}\Gamma(s,t)&=E[Z(s)-m(s)]\ \overline{[Z(t)-m(t)]}\\&=E\ \overline{\overline{[Z(t)-m(t)]}\ [Z(s)-m(s)]}\\&=E\ \overline{\overline{[Z(t)-m(t)]}\ \overline{\overline{[Z(s)-m(s)]}}}\\&=\overline{E\ \overline{[Z(t)-m(t)]}\ \overline{\overline{[Z(s)-m(s)]}}}\\&=\overline{\Gamma(t,s)}.\end{aligned}$$

系 2.2.1 实值二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$的协方差函数$\Gamma(s,t)$是对称的，即对$\forall\ s,t\in T$，有$\Gamma(s,t)=\Gamma(t,s)$.

定理 2.2.2 二阶矩过程$\{Z(t),t\in T\}$的协方差函数$\Gamma(s,t)$是非负定的，即对任意固定的自然数n、任意的$t_1,\cdots,t_n\in T$，以及T上的任意复值函数$\theta(t)$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\Gamma(t_k,t_i)\theta(t_k)\ \overline{\theta(t_i)}\geqslant 0.$$

证

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\Gamma(t_k,t_i)\theta(t_k)\ \overline{\theta(t_i)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\{E[Z(t_k)-m(t_k)]\ \overline{[Z(t_i)-m(t_i)]}\}\theta(t_k)\ \overline{\theta(t_i)}\\&=E\Big\{\sum_{k=1}^{n}\theta(t_k)[Z(t_k)-m(t_k)]\Big\}\overline{\Big\{\sum_{i=1}^{n}\theta(t_i)[Z(t_i)-m(t_i)]\Big\}}\\&=E\Big|\sum_{k=1}^{n}\theta(t_k)[Z(t_k)-m(t_k)]\Big|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

注意到，定理 2.2.1 可由定理 2.2.2 推出，现详述如下：

先取 $n=1$. $\theta(t)\equiv 1$,由定理 2.2.2,对 $t\in T$,有 $\Gamma(t,t)\geqslant 0$;再取 $n=2$,并任意取定 $t_1,t_2\in T$,令 $\theta_1(t)$满足 $\theta_1(t_1)=1$, $\theta_1(t_2)=\mathrm{j}\equiv\sqrt{-1}$,由定理 2.2.2,有

$$\Gamma(t_1,t_1)-\mathrm{j}\Gamma(t_1,t_2)+\mathrm{j}\Gamma(t_2,t_1)+\Gamma(t_2,t_2)\geqslant 0,$$

由此式及 $\Gamma(t_1,t_1)\geqslant 0$, $\Gamma(t_2,t_2)\geqslant 0$ 知,$-\mathrm{j}\Gamma(t_1,t_2)+\mathrm{j}\Gamma(t_2,t_1)$是实数,$\Gamma(t_1,t_2)$的实部与 $\Gamma(t_2,t_1)$的实部相等,记为(1);

对上述取定的 $t_1,t_2\in T$,令 $\theta_2(t)$满足 $\theta_2(t_1)=\theta_2(t_2)\equiv 1$,由定理 2.2.2,有

$$\Gamma(t_1,t_1)+\Gamma(t_1,t_2)+\Gamma(t_2,t_1)+\Gamma(t_2,t_2)\geqslant 0,$$

由此式及 $\Gamma(t_1,t_1)\geqslant 0$,$\Gamma(t_2,t_2)\geqslant 0$ 知,$\Gamma(t_1,t_2)+\Gamma(t_2,t_1)$也是实数,$\Gamma(t_1,t_2)$的虚部系数与$-\Gamma(t_2,t_1)$的虚部系数相等,记为(2).

由(1)与(2)可得,$\Gamma(t_1,t_2)=\overline{\Gamma(t_2,t_1)}$,其中 t_1,t_2 可从 T 中任意取定,从而定理 2.2.2 得证.

注意到,从上述论证中可得如下一般结论:如果二元实变复值函数是非负定的,则它必是埃尔米特的.

定理 2.2.3 设 T 是实数集的某个子集,如果 $T\times T$ 上的二元复值函数 $\Gamma(s,t)$是非负定的,则存在一个概率空间上的一个二阶矩过程$\{Z(t),t\in T\}$,其协方差函数恰为 $\Gamma(s,t)$,如果 $\Gamma(s,t)$是实值的,则相应的二阶矩过程也是实值的.

证明可参见文献[1]第 12—15 页、文献[2]第 32—35 页.

从定理 2.2.3 的证明可以看到,如果以 $X(t)$,$Y(t)$分别表示 $Z(t)$的实部和虚部系数,则对任意固定的自然数 n,任意的 $t_1,\cdots,t_n\in T$,n 维复值随机变量$[Z(t_1),\cdots,Z(t_n)]$的分布函数,即 $2n$ 维实值随机变量$[X(t_1),\cdots,X(t_n),Y(t_1),\cdots,Y(t_n)]$的分布函数是 $2n$ 维正态分布的分布函数.这种随机过程称作正态过程,它是特殊的二阶矩过程.

从定理 2.2.3 的证明还可以看到,存在正态过程满足定理