21 数学天元基金

当代数学园地 9

完备李代数

孟道骥
朱林生 著
姜翠波

科学出版社
Science Press

当代数学园地 9

完备李代数

孟道骥　朱林生　姜翠波 著

科 学 出 版 社

2001

内 容 简 介

本书主要反映作者们对完备李代数系统化讨论所取得的主要结果. 这些结果包括完备李代数的基本性质、分解及其唯一性定理、同构定理以及完备李代数的结构的重要结论. 本书特点是指示了完备李代数与许多重要李代数(如半单李代数、可解李代数、幂零李代数以及 Kac-Moody 代数等)的关系,从而不仅可以发现而且可以构造完备李代数. 本书中还给出许多值得进一步探索研究的课题.

本书读者对象为高等院校数学系学生、研究生、教师及有关的研究人员.

图书在版编目 (CIP) 数据

完备李代数/孟道骥, 朱林生, 姜翠波著. - 北京: 科学出版社, 2001

(当代数学园地 9/姜伯驹主编)

ISBN 7-03-008258-3

Ⅰ. 完.. Ⅱ. ①孟 ...②朱 ...③姜 ... Ⅲ. 李代数

Ⅳ. O162.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 01518 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 2 月第 一 版 开本: 850 × 1168 1/32

2001 年 2 月第一次印刷 印张: 4 3/8

印数: 1 - 2 500 字数: 108 000

定价: 10.00 元

前　　言

首先要说明的是本书的署名是以年龄大小为序的. 第一作者仅因年长几岁, 姜翠波排在最后, 因为她最年轻.

严志达院士生前对我们的研究给予了充分的理解、支持和帮助, 并为本书写了推荐. 但我们未能来得及将此书呈他审阅、批评、指正, 是我们的最大遗憾.

理解、支持和帮助我们从事完备李代数研究的还有陈省身、段学复、聂灵沼及万哲先等先生. 我们也从王叔平、许以超等先生及许多同行那里得到帮助. 因为有了这许多的帮助我们才能克服种种困难将研究工作持续到如今. 在此我们愿以此书向他们表示衷心的感谢.

目前越来越多的人, 特别是从事李代数研究的年轻人对完备李代数产生了兴趣, 希望对它作一个比较系统的介绍. 这本小册子如能对读者有所助益, 则是我们的最大满足. 这本书对我们来说, 不仅是对前一阶段工作的回顾, 也是一个再学习、再创造的过程. 我们对读者的希望, 则是多批评指正, 因为这是对我们的最大的帮助, 最大的促进.

国家自然科学基金和高等学校博士学科点专项科研基金的资助, 科学出版社编辑先生的辛勤劳动也是作者要衷心感谢的. 我们还要感谢任斌先生和王立云女士在百忙中对书稿做了校对.

孟道骥

1999 年 10 月于南开大学

目　录

引　论 1

第一章　准备知识 5

§1.1　李代数的 Levi 分解 5

§1.2　李代数的导子代数 10

§1.3　李代数的扩张及全形 13

§1.4　抛物子代数 16

第二章　完备李代数的基本性质 19

§2.1　导子塔定理 19

§2.2　完备李代数 25

§2.3　完备李代数的分解及其唯一性 30

§2.4　完备李代数的根基 38

第三章　某些特殊完备李代数 51

§3.1　某些导子代数及全形的完备性 51

§3.2　模单完备李代数 56

§3.3　完备李代数的一个判断定理 57

§3.4　半单李代数的抛物子代数 62

§3.5　构造完备李代数 65

第四章　可解完备李代数 72

§4.1　一般性质 72

§4.2　可解完备李代数的结构 77

§4.3　极大秩可解李代数 80

§4.4　非极大秩可解完备李代数 83

第五章　完备李代数的若干问题 93

§5.1　完备李代数的 Killing 型与极大环面 93

§5.2 完备李代数与 Kac-Moody 代数 101
§5.3 具有交换幂零根基的完备李代数 107
§5.4 完备李代数与 Heisenberg 代数 111
§5.5 实完备李代数 120
参考文献 126

引　　论

如所周知，有限维李代数理论中，单 (或半单) 李代数，可解李代数和幂零李代数一直是人们关注的中心，而单 (半单) 李代数是了解得最透彻的.

最近 10 几年，完备李代数被越来越多的人所注意. 如果一个李代数 $\mathfrak{g}$ 的中心为零 (即 $C(\mathfrak{g}) = \{0\}$), 所有导子都是内导子 (即 $\operatorname{Der}\mathfrak{g} = \operatorname{ad}\mathfrak{g}$), 则称为完备李代数 (complete Lie algebra). 完备李代数的概念来源于完备群的概念. 一个群称为完备群 (complete group), 如果其中心为幺元，所有自同构为内自同构. 完备群的概念出现于 30 年代, 完备李代数的概念出现于 40 年代. 四五十年代，一些著名的李群李代数学者都对这类代数进行过研究，并将完备群的一些重要结果移植到完备李代数上. 特征零域上的半单李代数 (一般域上， Killing 型非退化的李代数) 是完备李代数. 除此之外，当时所知道的完备李代数寥寥无几，人们对完备李代数的重要性，以及对其本身的认识都很有限. 从 50 年代后半期到 80 年代的前半期，专门研究完备李代数的论文是非常少的. 由于李代数的导子代数和李代数的自同构群密切相关，因此导子代数一直是李代数理论中的一个重要课题. 许多有关完备李代数的结果隐藏在导子代数的课题之中. 从 80 年代的后半期完备李代数的研究又渐趋活跃，并取得一些有趣的结果.

在特征为零的域上，完备李代数包括了所有有限维的半单李代数，部分可解李代数，还有既非半单又非可解的李代数.

由于幂零李代数的中心非零，又有外导子，因而幂零李代数不是完备李代数. 虽然如此，完备李代数和幂零李代数仍有密不可分的关系. 事实上特征为零的域上的有限维完备李代数都是幂零李代数的全形的子代数.

域的特征为 $p(>0)$ 与特征为零则有很大的不同. 此时有的单李代数不一定是完备李代数，当然 Killing 型非退化的单与半单李

代数仍然是完备李代数. 完备李代数是否为幂零李代数的全形也是不清楚的问题.

Killing-Cartan 定理指出特征为零的域上的有限维李代数是半单李代数的充分必要条件是它可以分解为单理想的直和, 而且除这些单理想的次序外, 这种分解是唯一的. 这个定理说明, 半单李代数的研究可归结为单李代数的研究. 这个定理的证明基于特征为零的域上的半单李代数的等价条件是其 Killing 型非退化.

Killing 型退化的李代数这种证明就行不通了. 特别特征为 $p(>0)$ 的域上的半单李代数就没有相应的定理, 因而, 域的特征为 $p(>0)$ 时, 半单李代数的研究不能归结为单李代数的研究.

在 80 年代后半期证明了: 无论域的特征为何, 有限维完备李代数都可以分解为单完备理想的直和, 而且除这些单完备理想的次序外, 这种分解是唯一的. 所谓单完备理想是指这些理想本身是单完备李代数, 而单完备李代数是不可分解的完备李代数, 或等价地说, 其非平凡理想都是不完备的. 这个结论说明, 完备李代数的研究可归结为单完备李代数的研究. 分解存在性的证明并不难. 利用李代数 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{g}$ 自同态的性质可以证明如果一个李代数的中心为零, 又分解为不可分解的理想的直和, 则这种分解除这些理想的次序外是唯一的. 将此结论用于完备李代数则为完备李代数的分解唯一性.

由完备李代数的分解及其唯一性的结论也可以导出特征为零的域上的半单李代数的分解唯一性.

特征为零的代数闭域上的完备李代数的 Levi 分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n},$$

这里 $\mathfrak{s}, \mathfrak{r} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}, \mathfrak{n}$ 分别是 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数, 根基和极大幂零理想.

不仅如此, 而且 $\mathfrak{n}$ 是约化李代数 $\mathfrak{s} + \mathfrak{a}$ 的模. 这个模当然是完全可约的. 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{s}$ 的 Cartan 子代数, 则 $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大环面子代数. 此时 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ 的根子空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{a} \dot{+} \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

这里 $\mathfrak{g}_\alpha$ 满足

$$[h+t,\ x]=\alpha(h+t)x,\quad \forall h+t\in\mathfrak{h}+\mathfrak{a},\ x\in\mathfrak{g}_\alpha.$$

我们可以看出，完备李代数的这种分解与半单李代数对 Cartan 子代数的根子空间分解极其相似. 也与半单李代数一样，可以由此分解得到完备李代数的许多精细的性质. 因此这是完备李代数中重要结果之一.

例如，虽然完备李代数的 Killing 型可能是退化的，但在极大环面上的限制是非退化的，可将极大环面与其对偶空间等同. Killing 型在根系生成的实空间上也是正定的. 也可利用这种正定性来判断完备李代数何时是单完备的.

由于完备李代数与其导子代数 (等于内导子代数) 同构，故完备李代数一定是代数李代数.

从这里我们可以看到，代数李代数理论，幂零李代数理论，约化李代数及其表示理论在完备李代数的研究之中都大有用武之地.

有一段时期完备李代数的发展处于停顿，当初所知道的半单李代数之外的完备李代数太少是原因之一. 随着李代数理论的发展，到 80 年代后半期，所知道的完备李代数日益增多，完备李代数的一般理论也就随着发展起来了.

首先，在 80 年代后半期知道了复半单李代数的 Borel 子代数和抛物子代数是完备李代数，而且它们为单完备李代数当且仅当它们是单李代数的 Borel 子代数和抛物子代数.

其次，从 90 年代初又有了一些构造完备李代数的方法. 如构造幂零根基为交换李代数，或交换李代数与 Heisenberg 代数的和的完备李代数，构造极大秩的可解完备李代数，构造某些非极大秩的可解完备李代数等等.

第三，从某些无限维李代数，如广义 Kac-Moody 代数及其子代数， Virasoro 代数等等也可以构造出完备李代数.

第四，由一些李代数的导子代数，全形，全形的导子代数等也可以得到完备李代数.

对完备李代数的研究也加深了对李代数理论的一些基本问题的理解. 例如，从完备李代数理论可以知道，任何有限维单李代数

的导子代数一定是单完备李代数. 在特征为 $p(>0)$ 的域上存在单李代数是非完备的. 但它的导子代数是单完备的, 还可以证明也是半单的, 当然不是单的. 特征为 $p(>0)$ 的域上半单李代数的研究不能归结为单李代数的研究.

总之, 完备李代数是李代数理论中一个内容非常丰富的分支, 也是一个重要的分支. 它的研究虽然取得了很多重要的成果, 但远远没有完成, 看来也不是短期就可以完成的. 然而可以预期今后在完备李代数的结构, 分类, 实现, 表示, 子代数等方面以及完备李代数与李群, 微分几何等分支的联系等方面都会有很大的发展.

本书我们以李代数知识为基础来介绍完备李代数, 也便更多的人可以阅读.

其实, 如果以代数群与代数李代数的观点研究完备李代数不仅可使许多证明简单得多, 而且可以得到更深刻更丰富的成果. 王叔平先生在此方面有独到的建树.

另外, 值得一提的是, 一些法国数学家, 如 E. Angelopoulos, S. Benayadi, G. Favre 和 R. Carles 等, 也对完备李代数作过不少研究. 不过, 他们主要对满足完满 (perfect) 条件

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$$

(即其导代数等于本身) 的完备李代数进行了讨论.

也有将李代数的上同调用于完备李代数的讨论的.

还有一些学者, 将完备李代数的一些概念、结果推广到李超代数上, 而得到完备李超代数的概念及相应的结果.

我们不想涉及这些内容, 有兴趣的读者可参阅书后相应的参考文献. 我们这本小册子只是向读者介绍完备李代数的一些基本的结果, 并不打算也不可能将完备李代数的所有结果都包括进去.

第一章　准备知识

本章论述研究完备李代数时经常用到，但并非在每本李代数的教科书上都可以找到的一些基本事实.

§1.1　李代数的 Levi 分解

以 $\mathfrak{r}$ 表示有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 的根基，即 $\mathfrak{g}$ 的极大可解理想. 以 $\mathfrak{n}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的极大幂零理想. 则以下一些结果成立.

(1)　若 $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{n}_1$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 的可解，幂零理想，则 $\mathfrak{r}_1 \subseteq \mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}_1 \subseteq \mathfrak{n}$.

(2)　若 $\mathfrak{g}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的真理想，则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ 为半单李代数当且仅当 $\mathfrak{g}_1 \supseteq \mathfrak{r}$.

特别，如果 $\mathfrak{g}$ 不是可解李代数，则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是半单的.

(3)　$\mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}$ 均为 $\mathfrak{g}$ 的伴随模 $\mathfrak{g}$ 的子模，且

$$[\mathfrak{r},\ \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{n},\ [\mathfrak{g},\ \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{n}.$$

或者用模的语言，有 $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{n}$, $\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{n}$.

为方便起见，以下假定李代数 $\mathfrak{g}$ 的基域 $\mathbf{F}$ 的特征为零.

引理 1　设 $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{r}$, 且 $\mathfrak{r}$ 为单 $\mathfrak{g}$ 模，则有 $\mathfrak{g}$ 的半单子代数 $\mathfrak{s}$ 使得

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \dot{+} \mathfrak{r}$$

为空间直和.

证　(1) 由于 $[\mathfrak{r},\ \mathfrak{r}]$, $C(\mathfrak{g})$ 均为 $\mathfrak{g}$ 模 $\mathfrak{r}$ 的子模，因而有 $[\mathfrak{r},\ \mathfrak{r}] = 0$, $C(\mathfrak{g}) = 0$ 或 $C(\mathfrak{g}) = \mathfrak{r}$. 当 $C(\mathfrak{g}) = \mathfrak{r}$ 时，$\dim\mathfrak{r} = 1$. 当 $\dim\mathfrak{r} > 1$ 时，$C(\mathfrak{g}) = 0$.

(2) 以 W 表示 $\mathfrak{g}$ 的所有线性变换构成的线性空间，则由下式

$$x\cdot A = (\mathrm{ad}x)A - A(\mathrm{ad}x),\ x \in \mathfrak{g},\ A \in W$$

定义的 $\mathfrak{g}$ 在 W 上的作用使 W 成为 $\mathfrak{g}$ 模，而且

$$\begin{aligned}
&P=\{\mathrm{ad}x|x\in\mathfrak{r}\},\\
&Q=\{A\in W|A(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{r},\ A|_{\mathfrak{r}}=0\},\\
&R=\{A\in W|A(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{r},\ A|_{\mathfrak{r}}=\lambda(A)\mathrm{id}_{\mathfrak{r}}\}
\end{aligned}$$

均为 W 的子模，且满足

$$P\subseteq Q\subset R,\ \dim R=\dim Q+1,\ \mathfrak{r}\cdot R\subseteq P.$$

(3) 由 (2) 中结果知，$\mathfrak{r}$ 在商模 R/P, Q/P 上的作用是平凡的. 因而可定义 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 在 R/P 与 Q/P 上的作用，使它们成为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 模. 由于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是半单的，因而在 R/P 中有 Q/P 的一维补子模 $\mathbf{F}\bar{A}_0$, 这里 $A_0\in R$, $\lambda(A_0)\neq 0$, $\bar{A}_0$ 为 A_0 在商空间 R/P 中对应的元素. 于是 $\mathbf{F}\bar{A}_0$ 为平凡 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 模，也是平凡 $\mathfrak{g}$ 模. 即有

$$\mathfrak{g}\cdot A_0\subseteq P.$$

因而 $\mathfrak{g}\cdot A_0$ 为 P 的子模. 而且，易得

$$x\cdot A_0=-\lambda(A_0)\mathrm{ad}x,\ \forall x\in\mathfrak{r}.$$

于是

$$\mathfrak{g}\cdot A_0=P.$$

(4) 当 $C(\mathfrak{g})=0$ 时，易证 $\mathfrak{r}$, P 为同构的 $\mathfrak{g}$ 模，令

$$\mathfrak{s}=\{y\in\mathfrak{g}|y\cdot A_0=0\}.$$

显然 $\mathfrak{s}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数，而且

$$\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{r}=\dim\mathfrak{s},\ \mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}=0.$$

于是 $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dot{+}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}\simeq\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是半单的.

当 $C(\mathfrak{g})\neq 0$ 时，此时 $C(\mathfrak{g})=\mathfrak{r}$ 是 1 维的，$\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{r}$ 均为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 模. 由 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 半单，知有 $\mathfrak{r}$ 的补子模 $\mathfrak{s}$, 使得 $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dot{+}\mathfrak{r}$. 由

$\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{g}=0$, 知 $\mathfrak{s}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 模，即为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 于是 $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{r}$ 为理想直和. $\mathfrak{s}$ 是半单的. □

推论 若 $C(\mathfrak{g})=\mathfrak{r}$, 则 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解

$$\mathfrak{g}=C(\mathfrak{g})\oplus[\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}],$$

其中 $[\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}]$ 是 $\mathfrak{g}$ 的半单理想. □

定理 2 设 $\mathfrak{g}$ 是非可解李代数，则存在 $\mathfrak{g}$ 的半单子代数 $\mathfrak{s}$ 使得

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dot{+}\mathfrak{r} \tag{1.1.1}$$

为空间直和分解.

证 若 $\mathfrak{r}$ 是单 $\mathfrak{g}$ 模时，定理成立. 特别，$\dim\mathfrak{r}=1$ 时，定理成立. 对 $\dim\mathfrak{r}$ 用归纳法.

若 $\mathfrak{r}$ 不是单 $\mathfrak{g}$ 模，设 $\mathfrak{r}_1$ 为 $\mathfrak{r}$ 的非平凡子模，于是 $\mathfrak{r}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 且 $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}_1$ 为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}_1$ 的根基. 注意到 $\dim\mathfrak{r}/\mathfrak{r}_1<\dim\mathfrak{r}$, 由此知有 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}_1$ 的半单子代数 $\bar{\mathfrak{s}}$ 使得

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{r}_1=\bar{\mathfrak{s}}\dot{+}\mathfrak{r}/\mathfrak{r}_1.$$

因而在 $\mathfrak{g}$ 中有唯一的子代数 $\mathfrak{g}_1$ 使得 $\mathfrak{g}_1\supseteq\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{r}_1=\bar{\mathfrak{s}}$. 这时 $\mathfrak{r}_1$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的根基. 由 $\dim\mathfrak{r}_1<\dim\mathfrak{r}$, 知有 $\mathfrak{g}_1$ 的半单子代数 $\mathfrak{s}$ 使得 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{s}\dot{+}\mathfrak{r}_1$. 因而

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dot{+}\mathfrak{r}.$$ □

$\mathfrak{g}$ 的分解 (1.1.1) 称为 **Levi 分解**, $\mathfrak{s}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Levi 子代数**.

以 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 表示李代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构群，$\mathfrak{A}$ 表示由

$$\{\exp \mathrm{ad}x|x\in\mathfrak{n}\}$$

生成的 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的子群，π 表示 $\mathfrak{g}$ 对于分解 (1.1.1), 在 $\mathfrak{s}$ 上的投影.

引理 3 设 $\mathfrak{s}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的半单子代数，则

$$\mathfrak{s}_1\subseteq\mathfrak{s}\dot{+}\mathfrak{n},$$

且 $\pi(\mathfrak{s}_1)$ 与 $\mathfrak{s}_1$ 同构.

证 由于 $\mathfrak{s}_1$ 半单, 因而

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_1 &= [\mathfrak{s}_1,\ \mathfrak{s}_1]\\ &\subseteq [\mathfrak{s}+\mathfrak{r},\ \mathfrak{s}+\mathfrak{r}]\\ &= [\mathfrak{s},\ \mathfrak{s}]+[\mathfrak{g},\ \mathfrak{r}]\\ &\subseteq \mathfrak{s}+\mathfrak{n}.\end{aligned}$$

显然, $\ker \pi|_{\mathfrak{s}_1} = \mathfrak{s}_1 \cap \ker \pi = \mathfrak{s}_1 \cap \mathfrak{r} = 0$. 故 $\pi|_{\mathfrak{s}_1}$ 是一一的. 而 π 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{s}$ 上的同态映射, 因而 $\pi(\mathfrak{s}_1)$ 与 $\mathfrak{s}_1$ 是同构的. □

定理 4 设 $\mathfrak{s}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数. $\mathfrak{s}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个半单子代数, 则存在 $\theta \in \mathfrak{A}$ 使得

$$\theta(\mathfrak{s}_1) \subseteq \mathfrak{s}. \tag{1.1.2}$$

"$=$" 成立, 当且仅当 $\mathfrak{s}_1$ 也是 Levi 子代数.

证 我们用归纳法证明, 存在 $\theta \in \mathfrak{A}$ 使得

$$\theta(\mathfrak{s}_1) \subseteq \mathfrak{s}+\mathfrak{n}^{(k)}.$$

约定 $\mathfrak{n}^{(0)} = \mathfrak{n}$. $k=0$ 时, 由引理 3 知结论成立. 设 k 时成立, 此时不妨设

$$\mathfrak{s}_1 \subseteq \mathfrak{s}+\mathfrak{n}^{(k)}.$$

仍以 π 表示 $\mathfrak{g}$ 关于分解 (1.1.1) 在 $\mathfrak{s}$ 上的投影, 于是由

$$x\cdot y = [\pi(x),\ y],\ x \in \mathfrak{s}_1,\ y \in \mathfrak{n}^{(k)}$$

定义的 $\mathfrak{s}_1$ 在 $\mathfrak{n}^{(k)}$ 上的作用使 $\mathfrak{n}^{(k)}$ 成为 $\mathfrak{s}_1$ 模. $\mathfrak{n}^{(k+1)}$ 为子模. 且 $x-\pi(x) \in \mathfrak{n}^{(k)}$, $\forall x \in \mathfrak{s}_1$. 令 π_1 为 $\mathfrak{n}^{(k)}$ 到 $\mathfrak{n}^{(k)}/\mathfrak{n}^{(k+1)}$ 上的自然映射. 于是

$$f(x) = \pi_1(x-\pi(x)),\ x \in \mathfrak{s}_1$$

为 $\mathfrak{s}_1$ 到 $\mathfrak{n}^{(k)}/\mathfrak{n}^{(k+1)}$ 的线性映射，且满足

$$f([x,\ y]) = x\cdot f(y) - y\cdot f(x),\ \forall x,\ y\in \mathfrak{s}_1.$$

由 Whitehead 引理 ([28], p.77) 知有 $z\in \mathfrak{n}^{(k)}$ 使得

$$f(x) = x\cdot \pi_1(z),\ x\in \mathfrak{s}_1.$$

即

$$x - \pi(x) - [\pi(x),\ z] \in \mathfrak{n}^{(k+1)},\ \forall x\in \mathfrak{s}_1.$$

由 $z\in \mathfrak{n}^{(k)}$, 知 $\mathrm{ad}z$ 幂零, $\theta = \exp \mathrm{ad}z \in \mathfrak{A}$, 且

$$\begin{aligned}\theta(x) &= x + [z,\ \pi(x)] + [z,\ x-\pi(x)] + \frac{1}{2}[z,\ [z,\ x]] + \cdots \\ &\equiv \pi(x) + (x - \pi(x) - [\pi(x),\ z])\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{n}^{(k+1)}) \\ &\equiv \pi(x)\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{n}^{(k+1)}).\end{aligned}$$

故 $\theta(\mathfrak{s}_1)\subseteq \mathfrak{s} + \mathfrak{n}^{(k+1)}$.

由于 $\mathfrak{n}$ 是幂零的，故 k 充分大后 $\mathfrak{n}^{(k)} = 0$, 因而 $\theta(\mathfrak{s}_1)\subseteq \mathfrak{s}$.

由 (1.1.2) 及 Levi 子代数定义知 $\mathfrak{s}_1$ 为 Levi 子代数当且仅当 $\theta(\mathfrak{s}_1) = \mathfrak{s}$. □

此定理称为 Levi **子代数的共轭定理**, 即任何两个 Levi 子代数是共轭的.

$\mathfrak{g}$ 是特征零的代数闭域上的有限维李代数. 于是 $\mathfrak{g}$ 有 Levi 分解 (1.1.1).

$\mathfrak{g}$ 的极大幂零理想 $\mathfrak{n}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **nil 根基** (见 [28]).

我们知道李代数 $\mathfrak{g}$ 的线性变换 D 若满足

$$D([x,\ y]) = [Dx,\ y] + [x,\ Dy],\ \forall x,\ y\in \mathfrak{g},$$

则称为 $\mathfrak{g}$ 的一个 **导子**. 所有导子的集合 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 构成一个李代数，称为 $\mathfrak{g}$ 的 **导子代数**. 对于 $x\in \mathfrak{g}$, 决定 $\mathfrak{g}$ 的导子 $\mathrm{ad}x$ 如下:

$$\mathrm{ad}x(y) = [x,\ y],\ \forall y\in \mathfrak{g}$$

称为 $\mathfrak{g}$ 的一个 **内导子**. 所有内导子的集合 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的理想. 而且

$$\mathrm{ad}\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g}).$$

定理 5 设李代数 $\mathfrak{g}$ 是李代数 $\mathfrak{g}_1$ 的理想; 又 $\mathfrak{r}, \mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的根基, nil 根基; $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{n}_1$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 根基, nil 根基. 则有以下结果.

(1) $\mathfrak{r} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}_1, \mathfrak{n} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{n}_1$;

(2) $\forall D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g},\ D(\mathfrak{r}) \subseteq \mathfrak{n}$.

证 见 [28] Ch Ⅲ, §6, 定理 7. □

从此定理, 可得 $\mathfrak{g}$ 的理想

$$\mathfrak{n}_0 = [\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r} = [\mathfrak{g},\ \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{n}. \tag{1.1.3}$$

称 $\mathfrak{n}_0$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 **幂零根基**(nilpotent radical) (见 [22]). 显然, $\mathfrak{n}_0$ 是 $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}]$ 的根基.

若 $\mathfrak{g}$ 是可解李代数, $\mathfrak{n}$ 为其 nil 根基. 则

$$D(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{n}, \forall D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}.$$

§1.2 李代数的导子代数

下面我们假定 $\mathfrak{g}$ 是有限维的, 而且其基域 $\mathbf{F}$ 的特征为零. 为证明简单起见, 进一步假设 $\mathbf{F}$ 是代数封闭的.

定理 1 设 $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$, 则有

$$D = D_s + D_n,$$

这里 D_s, $D_n \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$, 且均为 D 的多项式, D_s 是半单的, D_n 是幂零的. 进一步, 若 $D = D_1 + D_2$, D_1, D_2 分别是半单的与幂零的, 且 $D_1D_2 = D_2D_1$, 则 $D_1 = D_s$, $D_2 = D_n$.

证 设 D 的最低多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$

令 $f_i(\lambda)=f(\lambda)/(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$, 因而有 $g_i(\lambda)$ 使得

$$f_i(\lambda)g_i(\lambda)\equiv 1\,(\mathrm{mod}(\lambda-\lambda_i)^{k_i}).$$

令

$$p(\lambda)=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i f_i(\lambda)g_i(\lambda),$$

$$q(\lambda)=\lambda-p(\lambda).$$

因而 $(\lambda-\lambda_i)^{k_i}|(p(\lambda)-\lambda_i)$. 设 $\mathfrak{g}$ 对 D 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{\lambda_1}(D)+\mathfrak{g}_{\lambda_2}(D)+\cdots+\mathfrak{g}_{\lambda_s}(D).$$

显然, 任何 $\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D)$ 都是 $D_s=p(D)$, $D_n=q(D)$ 的不变子空间, 且 $(D_s-\lambda_i\mathrm{id})\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D)=0$. 故 D_s 是半单的. $D_n^{k_i}\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D)=(D-D_s)^{k_i}\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D)=(D-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D)=0$, 于是 D_n 是幂零的.

若 $D=D_1+D_2$, $D_1D_2=D_2D_1$, 则 D_1, D_2 都与 D 可换, 因而都与 D_s, D_n 可换, 故 $D_s-D_1=D_2-D_n$ 既是半单的, 又是幂零的. 于是 $D_1=D_s$, $D_2=D_n$.

由于 $D\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$, 容易证明

$$[\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D),\ \mathfrak{g}_{\lambda_j}(D)]\subseteq\mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}(D).$$

若 $x\in\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D)$, $y\in\mathfrak{g}_{\lambda_j}(D)$, 则有

$$D_s([x,\ y])=(\lambda_i+\lambda_j)[x,\ y]=[D_sx,\ y]+[x,\ D_sy].$$

于是 $D_s\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$, $D_n=D-D_s\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$. □

为了进一步了解 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的结构, 需用下面定理.

定理 2 设 $\mathfrak{g}$ 是线性变换构成的代数李代数. 又设 $\mathfrak{n}$ 是由幂零线性变换构成的极大理想, 则 $\mathfrak{g}$ 有空间直和分解:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{s}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n},$$