高等学校教学用书

高等代数教程

A. Г. 庫洛什著

高等教育出版社

高等学校教学用書

高等代数教程

A. Г. 庫洛什著
柯召譯

高等教育出版社

本書原系根据苏联技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的庫洛什（А. Г. Курош）著“高等代数教程”（Курс высшей алгебры）1952年修訂版（第三版）譯出的，現由譯者根据1955年修訂版（第四版）修訂。原書經苏联高等教育部審定为國立大学及师范学院教科書。

本書爲代数学的引論，述及羣，环，域，代数等基本概念，前半爲線代数引論，后半討論具有各种不同系数的多項式理論。

高等代数教程

А. Г. 庫洛什著

柯召譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

商務印書館上海廠印刷　新華書店總經售

書號13010·164　開本850×1168 1/32　印張13　字數332,000

一九五三年八月商務初版 共印12,500

一九五五年八月新一版

一九五六年十月第二版

一九五六年十二月上海第四次印刷

印數25,501—30,500　定價(8)¥1.50

目　錄

第四版序

在准备發行第四版时，对本書做了很多重要的改变。在这里，我考慮到近几年來在莫斯科大学代数教学的經驗，我也考慮到寫信給我或者在彼此交談中对我提出來的意見和要求，以及在大学的代数討論会上討論这本書的一些意見。当然不是把所有的意見都吸收進去，而且有些意見是彼此互相抵消的。我每次收到关于这本書的意見时，我都是对它做愼重的考慮而且表示誠恳的謝意。

在这本書中增加了一些新的部分，有的問題是因为現在列入了大学基礎課的教学大綱中，有的是因为和本書的主要材料有着直接联系，同时也不需要增加很多的篇幅。我們增加了討論化二次型到主軸上去的一个整章（第九章），用依次消去未知量的方法（§ 8）來开始綫性方程組的理論。加進去一節关于有理分式对簡分式的分解式，这就是 § 36。还有在 § 26 中，增加了关于二次型的分解条件，在 § 31 中增加了分解为質因式的乘積不是唯一的這种数环的例子，在 § 33 中現在可以找到拉格蘭日的內插公式，而且在 § 49 中証明了用牛顿法計算根的近似值的收斂性。

在本書的很多地方做了新的敍述。在 § 16 中改变了向量綫性相关性的討論，使得它完全避免了用到代換定理。关于結式（§ 40）問題要比这本書的前一版說得更簡潔些。对于这本書的組織也做了些改变，如对調了第三和第四章，弥补了在敍述綫性方程組理論时有割裂的缺陷。

其余一些变动不大的地方，就不必一一的列举出來，祇是有一个虽然不是非常触目的改动，但是很主要的，我們要把它提出來。大学和师

范学院的基礎課程高等代数的教学大綱中所包含的材料，可以按照这样或那样的次序來進行，所以使得所用的書有各种不同的可能的方法來敍述是很有用的。高等代数教程中常常不从复数和一般的域的概念开始而从行列式和綫性方程組开始。在本書的前一版中是这样來組織教材的，使得行列式和綫性方程組的理論，都是直接在任意的域上來討論的；虽然基本上这样不会使讀者增加多少困难，但是無疑的，这样很可能会使他們害怕。因此，在这本書上的第二到第四章中，都去了关于任意域的提法，讀者可以把所有說到的数都当做实数來看待。在这三章的每一章的末尾都做了一些不多的改变說明怎样把这些材料轉移到任意的基域上去。

另一方面，有时在师范学院中，对于多項式代数的討論，还是从基本定理的証明(利用达拉姆倍尔引的)开始，而后依靠这个定理來展开的。在这里，我們首先給出了多項式的可除性的一般理論，特别的，討論了关于多項式对不可約因式的分解式。考慮到所說的这个問題，我們在 § 43 的前一半中，从基本定理推出了一些推論，虽然它們是讀者在閱讀第六章时就已經知道了的，也就是說，在多項式的可除性理論中所已經熟悉的。

在前两段中所說到的东西，都做了相应的变动，使得这本書对于师范学院的学生來說，更容易接受一些，至于我做到了怎样的程度，將为师范学院中主講代数的数学家所評定。

我們注意，在本書前两版中的結語，現在已經用緒言来替代它。它在本書中的作用相当于講授时第一講所起的作用。

最后，星标所記的各節，是大学中做为基礎課程的高等代数的教学大綱中所不必需的材料。

1954 年 8 月，阿·庫洛什序于莫斯科。

第二版序摘錄

本書第一版是在 1946 年出版的。在第一版的序言里面，特别作了下面的敍述：

“为数学的古老分支之一的代数學，在数学中有很光桀的地位。在最近几十年，代数学業已經过重大的改造，其結果不但擴大了代数的研究范圍，而且也加深了代数的方法和結果在那些和它相接近的各門科学中的影响。在近代，代数学已經把很多独立的科学联合在一起，这些科学都各有各的專門研究对象和專門方法，而且在这些科学中有很多正在繼續蓬勃的發展着…。

在大学第一、二年所講授的高等代数这一課程的內容，和它的名称是不相称的，祇是代数学的一个引論… 高等代数教程中包含这样的一些內容，要是沒有它們的話，那末数學、力学、物理学和天文学都不能繼續講授，因此它的教学大綱基本上是很少变动的。 然而不能因此就允許代数学和高等代数教程間有概念上的裂痕，亦不許可高等代数教程仍旧停留在十九世紀的代数概念的水平…。

現在这本書是根据著者在莫斯科大学多年講授的高等代数这一課程的內容寫出的，著者力求尽一切可能做到不超出平常教学大綱所規定的范圍，同时也要避免前面所說的那种和現代代数学脫節的缺点。”

我覺得迫切需要改編大学的代数学教本以適应苏維埃代数学已經达到的更高的水平。苏維埃的科学家几乎在代数所有的各部門都獲得了極大的成績而且在一系列的部門中都居于領導的地位。

本書第一版在苏联很多大学中採用，亦就是很明顯的在某种程度上適合于大学的教学需要。同时，也發覺了这本書的某些章節，特别是

它的开始部分，对于大学一年級学生來說是不容易为他們所充分接受。这就迫使我在准备本書出第二版的过程中，認眞地把它重寫过，但是終究保存了它的基本形式。我要指出那些改寫过的最主要的地方。

首先，本書現在开头的一節，是关于数环和数域的概念，而緊接着在下面的几節是关于环和域的一般概念；所有这几節都配备有很多的例子。其次，把复数域的構造和它的唯一性的証明分开，因而就不需要預先知道二域同構的概念。

重寫本書綫性代数基礎那一部分时，我必須考慮到大学的高等代数这門課程現在系講授三个学期，而其中最后一个学期是关于矩陣論的較深奥的一些問題。我認为沒有必要來擴大这一本書——因为第三学期的教本完全可以採用去年出版的阿·伊·馬力茨夫的“綫性代数基礎”和伊·蒙·盖尔方德的“綫性代数學”二書。相反的，从本書取消了关于向量空間的綫性变換这一節。此外，矩陣論基礎和綫性方程組理論現在就不再和綫性子空間这一概念發生联系，这就使得教程中所指出的各部分的敍述有顯著的便利。

可惜，著者对于数值系数多項式理論各章的內容未能很好地予以發揮。在本書第一版序言中，对于这个理論曾作如下的闡述：“在代数学的这一部分，現在已經是很完备。在过去特别是十九世紀，代数学家進行了大量的研究工作，和積累了巨大的資料。我們对于这种資料的系統化和闡明，其中那些是就現代科学的發展水平來看仍旧有价值的，那些已經被看做过时的是很有兴趣的，然而这是超出了第一年課程的講授范圍以外”。我以为这里所說的完全保有它的价值。

个别問題的敍述有很多的修改，在这方面我指出有結式論，关于对称多項式的唯一性定理和根的存在定理。較重要的补充有关于二次型的恆正性的判定。

1949 年，阿·庫洛什序于莫斯科

緒　言

数学系学生的数学教育是从学習三个基礎課程开始的。这三个課程就是数学分析，解析几何和高等代数。这三个在很多地方是有联系的，而且有些地方是彼此重复的学科，共同的構成了近代数学的基礎。

本書所討論的高等代数比初等代數要提高一步，是中学初等代数課程的基本內容的很自然的擴展。中学代数課程的中心內容，無可否認的是关于解方程的問題。讀者应該記得，方程的研究是从一个祇含一个未知量的一次方程这种很簡單的情形來开始的，然后从两方面去發展。一方面，討論含有两个未知量两个一次方程的方程組，以及含有三个未知量三个一次方程的方程組；另一方面，研究一个祇含一个未知量的二次方程和某些很容易化为二次方程的特殊类型的高次方程（例如四次方程）。

在高等代数課程中，这两个方向都得到進一步的發展，把它們分成了两个大的部門。其中的一个叫做綫性代数基礎，它是从任意的一次方程組或者叫做綫性方程組这个問題的研究开始的。为了解出方程的个数等于未知量的个数的这种綫性方程組，我們要研究行列式这个工具的理論。对于从初等代数的观点來看是不習慣的但是在应用上却非常重要的問題，就是方程的个数不等于未知量的个数的这种綫性方程組的研究，行列式这个工具是不够用的。在这里，我們發現特別需要研究矩陣的理論。矩陣是排列在一个有一些行和列的正方或長方的表式上的一組数。矩陣論是深奥的而且它的应用范圍也不祇限于線方程組理論。另一方面，研究綫性方程組时，还要引進多維空間（也叫向量空間）的探討。不懂得数学的人，把多維（首先是四維的）空間和空洞的而

且往往是錯誤的說法相結合，其实这是一个純粹数学的概念，甚至于基本上是一个代数的概念，而且在很多数學的研究中，还有在物理學和力學中，都是重要的工具。

高等代数教程的第二个一半叫做多項式代数，从事于一个祇含一个未知量但是有任意次数的方程的研究。考慮到二次方程的解有公式存在这一事实，很自然的就想找出高次方程的解的对应公式。在歷史上这部分代数就發展起來而且已經在十六世紀找到了三次和四次方程的解的公式。以后就开始尋找五次和更高次方程的解的公式，要从方程的系数用一些根式，可能是多層的根式來表出它的根，但这是一个失敗的嘗試。这种嘗試一直繼續到十九世紀的初期，最后証明了这种公式是不可能找到的，而且对于次数等于或大于五次的方程，都有这样的整数系数的具体例子存在，它的根是不可能利用根式來寫出的。

不能得出高次方程的解的公式并不能算做很悲慘的事情——即使对于三次和四次方程來說，这种公式是存在的，但是非常麻煩而且几乎是沒有什么实際用途的。另一方面，在解決物理或工程問題时，所提出的这些方程的系数，常常是从測量的結果所得出來的数值，祇是一些近似值，所以我們也祇需要知道在已知准确度內根的近似值。这就需要研究求出方程近似解的各种方法，在高等代數教程中，我們祇說到其中一些簡單的方法。

但是多項式代数的中心問題不是具体的來找出方程的根，而是关于根的存在問題。已知实系数二次方程不一定有实根存在。把数擴大到全部复数，我們就能得出任何实系数二次方程的根，而且从三次和四次方程的解的公式來看，这个現象对于它們也是正确的。是否有这样的五次或更高次的方程存在，它并沒有一个复数根，或是为了求出这种方程的根，必須把复数擴大到更大的一类数？我們給出了一个重要的定理來回答这个問題。这个定理断定了，每一个有任意的数值系数的方程，不管它的系数是实数或是复数，都有复数（在特殊情形可能是实

数)根，而且一般的說，根的个数和方程的次数是相同的。

我們这样簡略的描繪了高等代数教程的內容。还要指出，高等代数祇是內容很丰富，分支很多的，經常在發展着的代数学的开端。我們試圖來提出在高等代数教程范圍以外的这些代数分支的非常簡略的一个描述。

在我們的数程中所說到的綫性代数，祇是它的初等部分，綫性代数基本上是討論矩陣理論以及和矩陣結合的向量空間綫性变換理論的一个大的学科。和它有关系的还有型論，不变量論和張量代数，对微分几何有重要的作用。向量空間理論在代数以外的泛函分析(無限維空間)中得到進一步的發展。由于綫性代数在数學、力学、物理学和技術科学中有着各种各样的重要应用，到現在它还在各种代数分支中佔首要地位。

有数十年之久，多項式代数發展为研究关系一个祇含一个未知量有任意次数的方程的学科，現在基本上已經完成了。它一方面在复变数函数論的某些部門中，獲得了進一步的發展，基本上成長为域論。关于域論，我們在下面还要提到。至于較深奥的，关于有許多个未知量、不是綫性而是任意次的方程組問題，合併了高等代数教程中所研究的两个方向，但是在我們的教程中几乎沒有接触到它。这个是代数的另一分支叫做代数几何所討論的問題。

关于可以用根式解出的方程要適合什么条件这个問題已經为法國数学家迦羅華(1811—1832)所徹底解决。他的工作指出了代数發展的新方向，这已經在二十世紀，由于德國女代数学家安·諾透(1828—1935)的工作形成了对于代数学的任务的新的觀点。現在已經是無可置辯的，方程的研究不再是代数学的中心任务。代数学所研究的正确对象，是和数的加法或乘法相类似的，但是任意的，可能不是在数值上施行的代数运算。

中学生在物理学課程中，已經遇到过力的加法运算。在大學和师范学院基礎課程中所研究的数学分支已經給出很多代数运算的例子

——如矩陣，函数的加法和乘法，对空間变換，对向量的运算等等。这些运算和平常对于数值的运算相类似的取同样的名称，但是在数值情形所常有的某些性質，有时会不再存在。例如，常常遇到的而且在很重要的場合，那些运算会是不可易的（乘積和因子的次序有关）而且有时还会是不可羣的（三个因子的乘積和括号的安排有关）。

对于不多的几种很重要的代数体系有很系統的研究。我們所說的代数体系是指由有某些性質的元素所構成的集合，而且对于这些元素确定了一些代数运算。例如域，就是一种特殊的代数体系。它和实数系或复数系相类似，在它里面，确定了加法和乘法运算，这些运算都是可易和可羣的，適合把它們結合起來的分配律（就是平常的去括号的規則能夠成立），而且都有逆运算——減法和除法——存在。域論很自然的提供了方程理論的進一步的發展領域，它的主要分支——代数数域論和代数函数域論——是它同数論和复变数函数論的对应的結合。

比域的概念更廣泛些的是环的概念。它和域不同的是，在这里不要求除法的可施行性，此外乘法也可能是不可易的，甚至于是不可羣的。全部整数（包含負整数），祇含一个未知量的全部多項式，和全部有实变数的实函数都可做为环的簡單的例子。环論包含了这种老的代数分支，如超复數系論和理想数論，它和許多数学科学，特別是和泛函分析有关联，而且在物理学中已經得到一些用途。

还有应用范圍很大的分支叫做羣論。羣是指这样的代数体系，它祇有一个基本运算，这个运算虽然是不一定可易的，但必須是可羣的，而且对于这个运算有逆运算存在——如果把基本运算叫做乘法，那么它的逆运算就叫做除法。例如，全部整数的集合对于加法运算來說，全部正实数的集合对于乘法运算來說都構成羣。羣在迦羅華理論中，在关于方程的用根式可解性問題上已經起了很大的作用，近來它們在域論中，几何的很多分支中，拓扑学中，还在数学以外的結晶学中，理論物理学中，都是重要的工具。总之，由于羣論的廣大应用范圍，它在所有

的代数分支中所佔的地位僅次于綫性代数。

就在近一、二十年中提出了并且發展了一个新的代数領域叫做結構論。結構是指这样的代数体系，它有两个运算——加法和乘法。这些运算必須是可易和可羣的，还要適合下面的条件：一个元素和它自己的和与積仍旧等于它自己；如果两个元素的和等于其中的一个，那么它們的積就等于其另一个，反过來也是对的。对于全部自然數，其对应运算为取最小公倍数和最大公約数，就是結構的一个例子。結構和羣論、环論以及集合論有很有趣味的联系；一个古老的几何分支，叫做投影几何的，基本上是結構論的一部分；还要提到的是結構論在电網理論中有它的用途。

在羣論、环論和結構論的某些部分之間，存在着顯著的类似之点，这就提出了代数体系的一般理論。到現在为止，祇是对于这个理論做了些初步工作，但是已經描繪出它的輪廓，而且發現它和数理邏輯有关系，容許有重大的發展前途。

上面所說的情况，当然不能包含代数学的所有各式各样的內容。特别是在其他数学領域的边緣上，有代数的若干部門存在。如拓扑代数，它研究这样的代数体系，对于这个体系中的元素(例如取所有的实数为这个体系的元素)确定了一些和某些收歛性有关的連續运算。和拓扑代数鄰近的有連續羣(或者叫李羣)論，在几何的若干不同問題中，在理論物理中，在水力学中都有很多的应用。还有有序代数体系理論，是結合几何基礎的研究所發生的，在泛函分析中找到了用途。最后，微分代数学已在开始發展，建立了代数学和微分方程論之間新的关系。

無可否認的，代数学的輝煌發展，达到今天的成就，决不是偶然的現象——它是数學总的發展的一部分，很顯著的是为了必須回答从其他数学科学向代数学提出的問題所引起來的。另一方面，代数学自身的發展对于它鄰近的分支的發展，已經顯示出而且正在顯示出很大的影响，还由于它的廣大应用范圍而特别增強，这是近世代数的特征，所

以有时我們还說現在遇到了数学的“代数化”。

我們在上面所給出的对于代数学的描述，不但是很簡略的，而且还沒有給出关于这个学科的發展歷史的敍述。所以我們將用代数學史的很簡短的描述來結束我們的緒言。

有些代数問題，特別是解最簡單的方程，已經为巴比倫人，而后为古代数学家所知道。这个时期代数研究的高峯是希臘(亞力山大的)数学家狄番都(公元三世紀)的工作。而后这些研究为印度数学家阿里阿勃赫塔(六世紀)，勃勒馬哥潑塔(七世紀)，勃赫斯卡勒(七世紀)所發展。在中國張蒼(公元前二世紀)和耿寿昌(公元前一世紀)很早就从事于代数問題的研究①。秦九韶(十三世紀)是很偉大的中國代数学家②。

中世紀时东方的数学家对于代数学的發展有很大的貢献。在这些用阿拉伯文字來寫作的著者中，特别的有中亞細亞的学者烏兹伯克人謨罕默德·阿尔-霍力士米(九世紀)和塔达吉克的数學家和詩人奥馬尔·赫伊耶蒙(1040—1123)。特別是“алгебра”(代数学)这个字是起源于阿尔-霍力士米所寫的書的名字“Аль-Джебр аль-мукабала”(解二次方程的意思)。

上面所提到的巴比倫，印度，希臘，中國和中亞細亞代数学家关于代数問題的工作，除开偶而接触到的三次方程以外，現在都已經列入初等代数課程的教学大綱里面。在同一問題范圍內，主要的还有西欧中世紀代数学家和十五世紀文藝复兴时代的代数學家的工作；我們提出意大利的教学家比薩的利奥拿都(費旁拿几)(十二世紀)和近世代数学符号的創造者法國数学家維脫(1540—1603)。还有，已經在前面說到过，在十六世紀数学家曾經求出解三次和四次方程的方法；这里要提出他們的名字，就是意大利人費罗(1465—1526)，塔塔利阿(1500—1557)，卡丹(1501—1576)和費勃黎(1522—1565)。

① 張蒼，耿寿昌都是漢初人，曾删补九章。——譯者註。

② 秦九韶，字道古，宋人，著数書十八卷。——譯者註。