现代物理学丛书

广义相对论和引力场理论

胡宁 著

科学出版社

内 容 简 介

本书介绍了广义相对论，并且把它当成引力场理论，力图解释一些观察到的天体运动．其中大都体现了作者独特的工作并反映了作者的观点．主要内容有等效原理、时空曲率张量和引力场方程、坐标选择与测量之间的关系以及光谱线在引力场中的红移、引力场与电磁场的相互作用、引力场方程的施瓦氏解、水星近日点的进动、光在引力场中的折射、引力场方程的线性近似、场方程的二级近似、双星的运动、引力场的能量动量分布、惯性质量和引力质量、场方程的$(v/c)^3$级修正、双星辐射引力波受到的阻尼．

本书可作为大学理论物理研究生及高年级学生参考书

图书在版编目（CIP）数据

广义相对论和引力场理论/胡宁著．-北京：科学出版社，2000.1
（现代物理学丛书/周光召主编）
ISBN 7-03-007835-7

Ⅰ．广… Ⅱ．胡… Ⅲ．①广义相对论②引力场 Ⅳ．O412

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 37429 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717

新蕾印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2000年1月第 一 版 开本：850×1168 1/32
2000年1月第一次印刷 印张：3 7/8
印数：1－1 500 字数：97 000

定价：10.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换（北燕））

此书受“华夏英才基金”支持，
谨 此 致 谢！

《现代物理学丛书》编委会

序

这本专著是胡宁先生的遗作. 胡宁先生 1951 年起至 1997 年逝世前一直任北京大学物理系教授. 他是 1955 年第一批中国科学院院士.

我和他初相识则是在爱尔兰国首都都柏林高等研究院理论物理研究所, 1945 年冬或秋. 据他回忆, 是他从美国普林斯顿高等研究院泡利教授那儿写信给我说想来都柏林的. 我那时刚接海特勒教授因提升而空出的位置. 我大约把信给海特勒看了, 不久胡宁先生便到达都柏林. 此后一年多时间, 我们常作郊游, 但很少谈物理, 因那时我正在默默养病, 病为前段时间用脑过累缺乏休息所致. 只听说他将海特勒的量子辐射阻尼理论与那时刚引人入胜的量子散射矩阵联系起来, 很引起海特勒的兴趣. 还知道他在普林斯顿作过广义相对论中的辐射阻尼问题, 在这本专著的最后一章中可以看到他对这问题的最新处理.

胡宁先生治学是有自己的见解的, 当然这受他自己的研究工作和成果的影响. 我注意到, 这本专著后部分牵涉到胡宁先生自己的研究工作和成果, 而在书中多处都可鲜明地见到胡宁先生自己的见解. 在广义相对论的原理和解释上, 容易有不同见解和争论. 近年来, 周培源先生提倡的谐和条件为物理条件而背景时空仍为闵可夫斯基时空, 其对我的影响就比对胡宁先生的影响要大得多. 我理解, 虽然胡宁先生和我都做过一些场论研究, 但我没做过广义相对论的研究可能是个主要原因.

胡宁先生对物理理解的追求是认真的和执着的, 这本专著的存在便很好说明这点. 近十余年胡宁先生的研究工作集中在粒子物理方面, 且健康情况欠佳. 但他仍耗费精力并挤出时间不断深入考虑双星运动的辐射阻尼问题, 难能可贵地写出广义相对论和

引力理论这本专著.

鉴于上述诸多情况，我乐为本书作序.

彭桓武

1998年11月于北京

目　录

一 引 言

爱因斯坦1918年创立的广义相对论是他于1905年提出的狭义相对论进一步的发展. 二者也可分别称为普遍和特殊相对论. 在狭义相对论提出以前，人们认为只有机械运动的动力学规律在相互做等速运动的惯性坐标里是相同的. 狭义相对论进一步指出包括机械运动和电磁作用在内的所有物理规律在所有惯性坐标里都是相同的. 按照广义相对论的等效原理，这些物理现象在任意坐标中也都服从相同的规律，只要对引力作用做一个正确的理解. 这是一个十分重要的进展，因为它第一次突破了对坐标系的限制. 按照牛顿力学，一个物体在地球的引力场中运动是与它的质量无关的. 引力作用的这个特点表明作为物体引力荷的引力质量等于它的惯性质量. 根据引力场的这个特点，在引力场里，我们可以选取一个加速的坐标，使这个加速坐标的某个小区域内没有引力加速度存在. 一个在引力作用下自由降落的电梯或飞船里的观察者发现他所在的电梯或飞船内都不受到引力场的作用. 因为他看见身旁所有物体都不具有引力加速度. 这个现象可以解释为坐标加速运动所产生的惯性力与原有的引力相抵消. 广义相对论的等效原理认为，惯性力和引力是等效的，并且服从相同的物理规律. 我们将在第二章详细地阐明等效原理的涵义. 在这一章里，为讨论方便，我们将给出一个粗浅的阐述. 前面已经指出，在引力场里，可以引入坐标变换，使得在空间某点附近，没有引力存在. 引力质量和惯性质量的等同是能够通过坐标变换消除引力加速度的决定性条件. 有人把“引力质量等于惯性质量”看作是等效原理，但这个在牛顿引力理论和狭义相对论里都已被证实的事实并不直接构成广义相对论的基础. 广义相对论的等效原理可以严格地阐述如下：“没有引力的坐标系就是惯性坐标系”. 牛

顿力学和狭义相对论都已满足这个原理，因为这些理论的惯性系的直角坐标中都没有考虑引力场的存在. 广义相对论要求在时空小区域内消除了引力场的坐标里的物理规律必须在这个小区域内和狭义相对论所描述的规律完全相同，并且在洛伦兹变换下是协变的. 广义相对论还进一步要求所有物理量必须是广义坐标变换下的协变量. 这个变换可表示为

$$x'^{\alpha} = f^{\alpha}(x) = f^{\alpha}(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{1.1}$$

它的逆变换可写为

$$x^{\mu} = h^{\mu}(x') = h^{\mu}(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \tag{1.2}$$

上式的等号右边是时空坐标的任意函数. 广义坐标并不是通常的惯性坐标. 等效原理要求在变换后消除了引力的小区域内，通常惯性坐标里成立的所有物理规律仍然是正确的，举一个具体的例子：广义相对论要求在狭义相对论里描写电磁场的麦克斯韦方程在这个小区域内仍旧正确，按照等效原理，我们能够得出有引力场存在时的电磁场方程. 当引力场存在时，可以引入一个广义坐标变换，消去某个小区域内的引力场. 然后在这个消去引力的小区域的坐标里写下麦克斯韦方程，再把坐标变回到有引力存在的原坐标，即得出在引力场中和引力场作用的新的麦克斯韦方程. 在广义相对论里，所有物理量都是广义坐标变换下的协变量.

等效原理和在广义坐标变换下的协变性很自然地使人们会认为，引力场只代表四维时空的几何性质. 这将导致对引力场物质性的否定. 现在人们已把广义坐标变换看作是一种规范变换，引力场即是一个规范场，并对它进行了量子化，这就确认引力场是一个物质场，从而淡化了几何化的观点.

二 等效原理

迄今为止，已发现的客观世界中物质间的相互作用共有下面四种：

(1) 强相互作用

(2) 弱相互作用

(3) 电磁相互作用

(4) 引力作用

强相互作用和弱相互作用主要存在于原子核内部的强子之间，电磁相互作用构成原子和分子间的力；它还导致所有宏观物体间的机械作用. 引力作用与其他作用力不同的地方是，它普遍存在于所有物体之间，强度很小，通常只在质量很大的天体附近才显著地存在. 按照牛顿引力理论，两个质量为 m_1 和 m_2 的物体之间的引力为

$$\boldsymbol{F} = -k\frac{m_1 m_2}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{2.1}$$

式中

$$k = 8.670 \times 10^{-8}\mathrm{cm}^3/\mathrm{g\ s}^2 \tag{2.2}$$

是一个很小的量. 这两个物体满足的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 r_{1n}}{\mathrm{d}t^2} = -k\frac{m_2}{r^3}r_n, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 r_{2n}}{\mathrm{d}t^2} = k\frac{m_1}{r^3}r_n \tag{2.3}$$

$$r_n = r_{1n} - r_{2n}$$

我们看到上面第一式与质量 m_1 无关，第二式与质量 m_2 无关. 这表明物体的运动与它本身的质量无关. 式中出现的质量表达出引力源的强度. 它和在电磁场中带电体的电荷代表电源的强度是一样的. 作为一个具体的例，一个质点 m 在引力位势 Ψ 中的运动方程可写为

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = -\nabla_n \Psi \qquad (n = 1,2,3) \tag{2.4}$$

上式是在一个经典力学的惯性坐标中写出的.如果引入一个相对这个惯性坐标做加速运动的新坐标,

$$r'_n = r_n + \frac{1}{2} a_n t^2 \tag{2.5}$$

a_n 为 $\boldsymbol{a}$ 沿 n 方向的分量.变换后的运动方程为

$$\frac{d^2 r'_n}{dt^2} = a_n - \nabla'_n \Psi' \tag{2.6}$$

在时间为 t 瞬间,$\Psi' = \Psi$.在广义相对论中,如一个事件发生的地点为 $x_n(n=1,2,3)$,时间为 $t = x_0/c$,另一个事件发生的地点为 $x_n + dx_n$,这两个事件间的不变时空间隔 ds 由下式给出:

$$-ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{2.7}$$

式中 x^α、$x^\beta(\alpha,\beta=0,1,2,3)$为时空坐标,$g_{\alpha\beta}$是时空坐标的函数.当时空变为闵可夫斯基时空时,可把 x^α 代为 $x_\alpha = \eta_{\alpha\beta} x^\beta$,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta},\ \eta_{00} = -1,\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1,\ \eta_{0m} = \eta_{m0} = 0 \tag{2.7a}$$

(2.7)式变为狭义相对论的洛伦兹度规

$$-ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \tag{2.8}$$

下面将引入广义坐标变换

$$x'^\mu = f^\mu(x) = f^\mu(x^0,x^1,x^2,x^3) \tag{2.9}$$

它的反变换为

$$x^\alpha = h^\alpha(x') = h^\alpha(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3) \tag{2.10}$$

在新坐标中,(2.7)式变为

$$-ds^2 = g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu, \qquad g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^\beta}{\partial x'^\nu} \tag{2.11}$$

dx^α 称为广义坐标中的基本矢量,$g_{\alpha\beta}$为基本张量.引入

$$x_\lambda = g_{\lambda\kappa} x^\kappa \tag{2.12}$$

再引入 $g^{\mu\nu}$满足下面条件

$$g^{\mu\nu} dx_\nu = dx^\mu \tag{2.13}$$

很容易看出,下式定义的

$$g_{\alpha}{}^{\lambda} = g_{\alpha\kappa} g^{\kappa\lambda} \tag{2.14}$$

满足条件

$$g_{\alpha}{}^{\lambda} = \delta_{\alpha}{}^{\lambda} \tag{2.15}$$

在坐标变换下,$\mathrm{d}x_{\mu}$ 和 $g^{\mu\nu}$的变换公式为

$$\mathrm{d}x'_{\mu} = \mathrm{d}x_{\lambda} \frac{\partial f^{\lambda}}{\mathrm{d}x^{\mu}}, \qquad g'^{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \tag{2.16}$$

若矢量 A_{α} 和张量$B^{\alpha\beta}$的变换公式与 $\mathrm{d}x_{\alpha}$ 和$g^{\alpha\beta}$相同,则称 A_{α} 为协变矢量,$B_{\alpha\beta}$为协变张量,A^{α} 和$B^{\alpha\beta}$为逆变矢量和逆变张量.另外,

$$A_{\alpha}B^{\alpha} = A^{\alpha}B_{\alpha}, \qquad A_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} = A_{\alpha}{}^{\beta}B_{\beta}{}^{\alpha} \tag{2.17}$$

等构成不变量.由(2.7)式给出的 $\mathrm{d}x^{\mu}$ 代表两个极邻近事件之间的时空间隔.一个运动的质点在时空中的坐标由 x^{μ} 改变到x^{μ} + $\mathrm{d}x^{\mu}$ 代表着运动过程中两个事件.它反映出运动的情况.现在考虑一个质点在纯引力场中的运动.按照等效原理,可以引入一个广义坐标变换使得在这个质点所在的小区域内引力场为零.这个坐标变换由(2.9)式给出,在新坐标中,质点的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x'^{\mu}}{\mathrm{d}s^2} = 0 \tag{2.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f^{\mu}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\partial^2 f^{\mu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\mathrm{d}^2 x^{\alpha}}{\mathrm{d}s^2} = 0 \tag{2.19}$$

引入由下式定义的克里斯托费尔符号

$$\frac{\partial^2 f^{\mu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} = \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$$

我们可写出

$$\frac{\mathrm{d}^2 f^{\mu}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\kappa} \frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^{\kappa}}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\mathrm{d}^2 x^{\alpha}}{\mathrm{d}s^2} = 0$$

去掉共同因子$\partial f^{\mu} / \partial x^{\alpha}$,上面第一式变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\alpha}}{\mathrm{d}s^2} = - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\kappa} \frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^{\kappa}}{\mathrm{d}s} \tag{2.20}$$

下面将把 $\Gamma^{\alpha}_{\lambda\kappa}$用$g_{\alpha\beta}$及其微商表示出.由(2.7)式得

$$g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s}=-1 \tag{2.21}$$

两边对 s 微商得

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s}+g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^2x^{\alpha}}{\mathrm{d}s^2}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s}+g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2x^{\beta}}{\mathrm{d}s^2}=0 \tag{2.22}$$

利用(2.18)式消去上式中对 s 的二次微商,我们得

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\chi}}-g_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\chi}-g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\chi}=0 \tag{2.23}$$

对 α、β、χ 进行轮换,并利用 $\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\chi}=\Gamma^{\lambda}{}_{\chi\beta}$,我们得

$$\frac{\partial g_{\beta\chi}}{\partial x^{\alpha}}-g_{\chi\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\alpha}-g_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\chi}=0$$

$$\frac{\partial g_{\chi\alpha}}{\partial x^{\beta}}-g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\chi}-g_{\chi\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}=0 \tag{2.24}$$

在上面三式中,取后两式之和减去第一式得

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\alpha\beta\sigma},\qquad \Gamma_{\alpha\beta\sigma}=\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} \tag{2.25}$$

以后为简便起见,我们将以 $F_{,\alpha}$ 代替 $\partial F/\partial x^{\alpha}$. 按照这个方式,上面第二式即可写为

$$\Gamma_{\alpha\beta\lambda}=g_{\alpha\lambda,\beta}+g_{\beta\lambda,\alpha}-g_{\alpha\beta,\lambda} \tag{2.26}$$

由于(2.26)式右边各项都不是张量,$\Gamma_{\alpha\beta\lambda}$ 和 $\Gamma^{\kappa}{}_{\alpha\beta}$ 都不是张量. 有的时候我们还可用 $F_{|\alpha}$ 代替 $\mathrm{d}F/\mathrm{d}x^{\alpha}$. 我们在前面引进等效原理时曾指出在时空的很小区域内可以通过广义坐标变换消去这个区域内的引力场. 问题是这个区域有多小. 为了回答这个问题,可以把 $g_{\alpha\beta}$ 在 x 点附近展开为

$$g_{\alpha\beta}(x+\Delta x)=g_{\alpha\beta}(x)+g_{\alpha\beta,\mu}\Delta x^{\mu}+\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu}+\cdots \tag{2.27}$$

当 Δx^{μ} 很小时,右边第二项以后的项都可略去. 如果 $g_{\alpha\beta,\mu}=0$,该点附近将无引力存在,附近的时空将是闵可夫斯基时空. 顺便指出,如果在通常的平直空间引入球坐标,将出现惯性力,在小范围时空内,按照等效原理,惯性力和引力是不能区分的.

三　时空的曲率张量和引力场方程

在牛顿万有引力理论里，引力场满足下面方程：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = -4\pi\kappa\rho \tag{3.1}$$

式中 φ 为引力势，κ 为引力常量. 比较(2.5)式和(2.16)式，我们看到，φ 相当于广义相对论里的 g_{00}. 等效原理要求相对论的引力场方程必须是在任意坐标变换下的协变量. 并在非相对论极限趋于(3.1)式. 这要求新的方程的左边必须包含 $g_{\alpha\beta}$对 x^μ 二级微商的协变量. 这个协变量在非相对论极限趋于(3.1)式左边的量. 另外，由于在(3.1)式右边出现的 ρ 是所有产生引力场的物质的能量动量张量 $T_{\mu\nu}$的 T_{00}分量，我们要求相对论的引力场方程具有下面的形式：

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.2}$$

式中 κ 为一普适常量，$G_{\mu\nu}$是含有 $g_{\mu\nu}$二级微商的协变张量. 通过下面讨论，将可以找出一个最简单的满足所有要求的 $G_{\mu\nu}$的表达式. 首先，我们考虑一个没有引力存在的时空. 这个时空的度规由下式给出：

$$-\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu,\ \eta_{00} = -1,\ \eta_{mn} = \delta_{mn},\ \eta_{0m} = 0 \tag{3.3}$$

引入坐标变换

$$\begin{aligned} x^\alpha &= f^\alpha(x') = f^\alpha(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \\ x^{\mu'} &= h^\mu(x) = h^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \tag{3.4}$$

新坐标 $x^{\mu'}$的度规为

$$-\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}{}'\mathrm{d}x^{\mu'}\mathrm{d}x^{\nu'} \tag{3.5}$$

上式只代表没有引力场的时空中一个曲线坐标的度规. 下面不考虑上式是否可由没有引力存在的时空度规(3.3)式经过坐标变换(3.5)式得出，而考虑上式在任意坐标变换(3.5)式下的变换. 命

A'_α 为 x' 坐标中的一个矢量，在 x 坐标中这个矢量 A_β 的分量由下式给出：

$$A'_\mu = A_\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial x'^\mu}, \qquad A_\rho = A'_\alpha \frac{\partial h^\alpha}{\partial x^\rho} \tag{3.6}$$

引入 $A_{\rho|\beta} = \mathrm{d}A_\rho | \mathrm{d}x^\beta$，利用上章结果得

$$A_{\rho|\beta} = A_{\rho,\beta} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\beta} A_\lambda \tag{3.7}$$

相似的推导给出

$$A^\rho{}_{|\alpha} = A^\rho{}_{,\alpha} + \Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda} A^\lambda \tag{3.8}$$

(3.7)、(3.8)两式分别代表 A_ρ 和 A^ρ 的协变微商. 当 A_ρ 是 x 坐标中一个常数矢量时，(3.7)式给出

$$A_{\rho,\beta} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\beta} A_\lambda = 0 \tag{3.9}$$

按照上面的推导，如果 A_ρ 在一个坐标中是常数矢量，那么在所有坐标中它的全微商 $A_{\rho|\beta}$ 都为零. 对于张量 $A_{\mu\nu}$ 同样有

$$A_{\rho\lambda|\beta} = A_{\rho\lambda,\beta} - \Gamma^\kappa{}_{\rho\beta} A_{\lambda\kappa} - \Gamma^\kappa{}_{\lambda\beta} A_{\rho\kappa} \tag{3.10}$$

对于上面给出的微分方程，我们还可以这样来理解. 如果 $g_{\mu\nu}$ 是任意给出的 x 的函数，当由 $g_{\rho\lambda}$ 算出的 $\Gamma^\kappa{}_{\rho\lambda}$ 代入上式能够得出 A_ρ 的解时，这就表示 $g_{\mu\nu}$ 可以通过变换(3.6)式变成 $\eta_{\mu\nu}$. 即由 $g_{\mu\nu}$ 代表的引力场可以通过坐标变换完全消除. 在此情况下，x 只不过是在洛伦兹时空引入的一个曲线坐标，$\Gamma^\kappa{}_{\rho\lambda}$ 只代表通常的惯性力. 如果(3.9)式的解不存在，那就表示 $g_{\mu\nu}$ 不能够在整个时空中变换成 $\eta_{\mu\nu}$；亦即所代表的引力场不能利用坐标变换在整个时空消除掉. 这时 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\lambda}$ 将不能被看作是通常意义下的惯性力而应代表一个真实的引力场. 这里我们注意到，通常由于坐标选择不当而产生的惯性力场和真实的引力场之间是有本质上的差别的. 不过当有真实的引力场存在时，人们不能在小时空区域内明确地分清惯性力和引力，因为这两者都服从完全相同的物理规律.

为了得出(3.9)式的可积条件，可以采用通常的办法将(3.9)式的右边沿着时空中任意一个封闭曲线进行积分. 如果对于所有封闭曲线的积分结果都为零，那就表示(3.9)式有解；反之就表示

它是不可积的.上述积分可写为

$$\Delta A_{\alpha} = \oint [A_{\alpha,\lambda} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\lambda}A_{\rho}]\mathrm{d}x^{\lambda} \tag{3.11}$$

式中积分是沿一个封闭曲线的积分.显然由上式给出的 ΔA_{α} 是一个协变矢量.由于上式左边方括弧中第一项积分的贡献为零,我们得 ΔA_{α} 为零的条件为

$$\oint \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\lambda}A_{\rho}\mathrm{d}x^{\lambda} = 0 \tag{3.12}$$

利用斯托克斯定理,上面的线积分可化为由封闭曲线所包的面上的积分,于是上式变为

$$\int (\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\lambda}A_{\rho})_{,\kappa}\mathrm{d}S^{\lambda\kappa} = 0 \tag{3.13}$$

式中 $\mathrm{d}S^{\lambda\kappa}$ 代表面积分元.交换上式中的 λ 和 α,把这样得出的式子和原式相加,并注意 $\mathrm{d}S^{\lambda\kappa} = -\mathrm{d}S^{\kappa\lambda}$,我们得

$$\begin{aligned}\Delta A_{\alpha} &= \int \{(\Gamma^{\kappa}{}_{\alpha\lambda}A_{\kappa})_{,\rho} - (\Gamma^{\kappa}{}_{\alpha\rho}A_{\kappa})_{,\lambda}\}\mathrm{d}S^{\rho\lambda} \\ &= \int R^{\kappa}{}_{\alpha\lambda\rho}A_{\kappa}\mathrm{d}S^{\lambda\rho} = 0\end{aligned} \tag{3.14}$$

式中 $$R^{\sigma}{}_{\alpha\lambda\rho} = \Gamma_{\alpha\lambda}{}^{\sigma}{}_{,\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}{}^{\sigma}{}_{,\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho} \tag{3.15}$$

在得出上式时我们曾利用(3.7)式消去对 A_{κ} 的微分.因为积分面积是任意的(即封闭曲线是任意的),为了满足(3.15)式,必须有

$$R^{\kappa}{}_{\alpha\lambda\rho} = 0 \tag{3.16}$$

从前面的讨论我们看到,(3.16)式不被满足是时空中存在有真实引力场的必要和充分条件.当(3.16)式不被满足时,我们看到(3.14)式中 ΔA_{α} 和 $A_{\alpha}\mathrm{d}S^{\lambda\rho}$ 都是协变量,因此 $R^{\kappa}_{\alpha\lambda\rho}$ 必须是一个四级混合张量.下面将进一步讨论 $R^{\kappa}_{\alpha\beta\lambda}$ 的一些性质.由(3.15)式我们看到

$$R^{\kappa}{}_{\alpha\lambda\rho} = -R^{\kappa}{}_{\alpha\rho\lambda} \tag{3.17}$$

很容易看出下面恒等式是成立的:

$$R^{\kappa}{}_{\alpha\lambda\rho} + R^{\kappa}{}_{\lambda\rho\alpha} + R^{\kappa}{}_{\rho\alpha\lambda} = 0 \tag{3.18}$$

由混合张量 $R^{\kappa}{}_{\alpha\sigma\rho}$ 还可得出下面协变张量:

$$R_{\beta\alpha\lambda\rho} = g_{\beta\kappa}R^{\kappa}{}_{\alpha\lambda\rho} \tag{3.19}$$

由(3.15)式可以得出 $R_{\beta\alpha\lambda\rho}$的如下表达式：

$$R_{\beta\alpha\lambda\rho} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\rho,\alpha\beta} + g_{\alpha\lambda,\beta\rho} - g_{\beta\lambda,\alpha\rho} - g_{\alpha\rho,\beta\lambda}) \tag{3.20}$$

由上式立刻可以看出下面对称性质：

$$R_{\beta\alpha\lambda\rho} = -R_{\alpha\beta\lambda\rho},\qquad R_{\beta\alpha\lambda\rho} = -R_{\beta\alpha\rho\lambda},\qquad R_{\beta\alpha\lambda\rho} = -R_{\lambda\rho\beta\alpha} \tag{3.21}$$

由(3.21)式还可得到

$$R_{\beta\alpha\lambda\rho} + R_{\beta\rho\alpha\lambda} + R_{\beta\lambda\rho\alpha} = 0 \tag{3.22}$$

在下面我们将导出两个重要的恒等式.为了便于推导,我们引入一个坐标变换,使得变换后在某一固定点附近所有 $g_{\mu\nu}$ 的一级微商都等于零.这即是上节所讨论的区域性洛伦兹系.由(3.15)式得,在时空的 P 点附近 $R^{\kappa}_{\alpha\lambda\rho}$的协变微商为

$$R_{\alpha\lambda\rho}{}^{\kappa}{}_{|\nu} = \Gamma_{\alpha\lambda}{}^{\kappa}{}_{,\nu\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}{}^{\kappa}{}_{,\nu\lambda} \tag{3.23}$$

利用上式我们立刻得到第一个重要的恒等式

$$R_{\alpha\lambda\rho}{}^{\kappa}{}_{,\nu} + R_{\alpha\nu\lambda}{}^{\kappa}{}_{,\rho} + R_{\alpha\rho\nu}{}^{\kappa}{}_{,\lambda} = 0 \tag{3.24}$$

由于上式左边三项都是张量,它在任何坐标系中都是正确的.我们可以定义一个新的二级协变张量

$$R_{\alpha\beta} = R^{\kappa}{}_{\alpha\kappa\beta} \tag{3.25}$$

由(3.15)式得

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\kappa}{}_{,\kappa} - \Gamma_{\alpha\kappa}{}^{\kappa}{}_{,\beta} + \Gamma_{\rho\kappa}{}^{\kappa}\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho} - \Gamma_{\rho\beta}{}^{\kappa}\Gamma_{\alpha\kappa}{}^{\rho} \tag{3.26}$$

这个张量关于指标 $\alpha\beta$ 是对称的.在(3.27)式中取 $\kappa=\rho$,并对 κ 求和,再利用(3.23)式得

$$R_{\alpha\nu\lambda}{}^{\kappa}{}_{|\kappa} - R_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{|\nu} + R_{\nu}{}^{\kappa}{}_{|\lambda} = 0$$

两边乘以 $g^{\alpha\tau}$,得

$$R_{\nu\lambda}{}^{\kappa\tau}{}_{|\kappa} - R_{\lambda}{}^{\tau}{}_{|\nu} + R_{\nu}{}^{\tau}{}_{|\lambda} = 0 \tag{3.27}$$

利用(3.22)式,得

$$R^{\kappa\tau}{}_{\nu\lambda} = g^{\kappa\sigma}g^{\tau\alpha}R_{\sigma\alpha\nu\lambda} = -g^{\kappa\sigma}g^{\tau\alpha}R_{\alpha\sigma\nu\lambda} = -R^{\tau\kappa}{}_{\nu\lambda} \tag{3.28}$$

把上式代入(3.25)式,取 $\tau=\nu$,并引入