应用数学丛书

对策论

王建华

清华大学出版社

清华大学

应用数学丛书

第 3 卷

对策论

王建华

清华大学出版社

内 容 简 介

本书系统介绍对策论的主要内容，取材力求精炼，避免繁琐．书中既包含了对策论最基本的概念和性质，也反映出对策论文献中近些年来的一些新的成果．

全书共分四章．第一章矩阵对策，介绍了最小最大值定理的两种初等证明．第二章和第三章分别讨论连续对策和非合作n人对策的理论．第四章着重论述合作n人对策的几种解的概念，特别是具有重要意义的核仁的概念及其性质．

本书的读者对象是高等学校应用数学、运筹学等专业高年级学生、研究生和教师、军事院校有关专业学员及教师、经济及管理工作者、系统科学工作者和其他有兴趣的读者．

对　策　论

王　建　华

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

北京京辉印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

☆

开本：850×1168 1/32　印张：5.5　字数：140千字

1986年6月第一版　1986年6月第一次印刷

印数：00001～9000

统一书号：15235·201　定价：平装1.20元

精装2.30元

关于《应用数学丛书》

为了满足广大科技人员、高等院校教师、研究生进一步学习应用数学的需要，我们编辑出版本丛书．丛书内容将包括应用数学的各个方面、有关的边缘科学以及应用数学的方法等．限于我们的水平和经验，丛书中难免有不少错误和不足之处，诚恳希望广大读者批评指正．

清华大学《应用数学丛书》编辑委员会

1983.4

序　言

本书的目的是要在不大的篇幅中系统介绍对策论的主要内容，使它既能包含对策论中最基本的概念和性质，又能反映出对策论文献中近些年来的一些新的成果．在内容的处理上，作者希望能做到尽可能简洁，避免繁琐．例如，关于矩阵对策和连续对策的最优策略，书中避免罗列许多性质，而是只提出少数最关键、最有用的性质．其他方面的内容也按类似的原则取舍．

全书的论述保持必要的严格性．只有极个别定理的证明略去，以免将注意力引向非主要的方面．但在文中指出了有关的文献，以便有兴趣的读者能够直接查找．

矩阵对策的理论已发展得十分完善．我们在第一章中主要阐述矩阵对策的有关概念和性质．对于矩阵对策的基本定理即最小最大值定理，我们介绍了两种初等证明：一种是von Neumann给出的利用支承超平面的证明，另一种是极简单的归纳法证明．关于矩阵对策与线性规划的关系，可以在不少对策论、线性规划或运筹学概论之类的书上找到，所以本书中决定不涉及这一问题．

第二章和第三章分别讨论连续对策和非合作n人对策的理论。

在第四章中，我们着重介绍了有关合作n人对策的若干种解的概念，特别是对这类对策有重要意义的核仁的概念，并且综述了有关这一概念的一些主要性质．

本书如果用作高等学校有关专业高年级学生和研究生的教材，可供一个学期每周讲授二至三学时的课程作为教材或参考用书．

作　者　1983年12月

目　　录

第一章 矩阵对策

1.1. 引 言

对策论是运筹学的一个重要分支．它所研究的典型问题是两个或两个以上的参加者（称为局中人）在某种对抗性或竞争性的场合下各自作出决策，使自己的一方得到尽可能最有利的结果．

为了对对策论的问题有比较直观的了解，我们首先通过几个简单的实例来阐明一些有关的基本概念．

例1． 配钱币游戏．

两个参加者（称为局中人1和2）各出示一枚钱币，在不让对方看见的情况下，将钱币放在桌上．若两个钱币都呈正面或都呈反面，则局中人1得1分，局中人2得－1分；或者说，局中人2付给局中人1一个单位．若两个钱币一正一反，则局中人1和2分别得－1和1分；或者说，局中人1输给局中人2一个单位．

我们可以用一个方阵来表示这些结果：

局中人2

		1 （正）	2 （反）
局中人1	1 （正）	1	－1
	2 （反）	－1	1

我们说，局中人1和局中人2各有两个策略．第一行代表局中人1的第1个策略，表示局中人1选择出示钱币的正面；第二行是他的第2个策略，表示选择反面．第一列是局中人2的第1个策略，表示局中人2选择正面；第2列是他的第2个策略，表示

反面.

这种游戏就是一个对策.所谓对策,简略地说,就是一组规则,它规定了整个游戏(或竞赛、或竞争、或斗争)自始至终所应遵循的各项办法和章程，包括局中人、策略、选定策略后的结局、等等.

上面这个表格称为对策的**支付矩阵**．它是两个局中人的策略的函数．例如，若局中人 1 出正面（策略1），局中人 2 也出正面（策略 1），则在上表的第 1 行第 1 列处的元素 1 就是局中人 2 付给局中人 1 的数目（例如以元为单位）；我们说，局中人 1 **得到支付** 1．若局中人 1 选择策略 2 （反面），局中人 2 选择策略 1（正面)，则第 2 行第 1 列的元素是 -1，表示局中人 1 得到支付 -1．这就是说，局中人 1 输掉 1 个单位；换句话说，局中人 2 从局中人 1 处赢进一个单位.

例2． “锤子、剪刀、布”游戏.

无论中外，每个小学生都玩过这种游戏．锤子击败剪刀，剪刀胜布，布胜锤子．这里也是两个局中人：局中人 1 和 2．双方各有三个策略：策略 1 代表出锤子，策略 2 代表出剪刀，策略 3 代表出布．假定胜者得 1 分，负者得 -1 分，则支付矩阵是

		局中人2		
		1	2	3
局中人1	1	0	1	-1
	2	-1	0	1
	3	1	-1	0

例3． 局中人 1 从 $p=0,1,2,3$ 四个数中选出一个数，局中人 2 在不知道局中人 1 出什么数的情况下从 $q=0,1,2$ 三个数中选出一个数．局中人 1 得到的支付（即局中人 2 付给局中人 1 的数目）由支付函数

$$P = p(q - p) + q(q + p)$$

即

$$P = q^2 - p^2 + 2pq$$

决定.

这是一个二人对策. 局中人1有四个策略，局中人2有三个策略. 支付矩阵不难算出如下：

		局中人2		
	$p \backslash q$	0	1	2
	0	0	1	4
	1	-1	2	7
局中人1	2	-4	1	8
	3	-9	-2	7

在以上几个例子里，都有1，2两个局中人，都有一个支付矩阵. 每个局中人有若干个策略；局中人1的策略用支付矩阵的行数来表示，局中人2的策略则用支付矩阵的列数来表示. 每个局中人选定一个策略后，就有一个对应的支付值，这个支付值代表局中人2应当付给局中人1的数目. 如果支付值是正数，局中人1从局中人2处得到的是正的值，这就是说，局中人1从局中人2处赢进若干个单位. 反之，如果支付值是负数，局中人1从局中人2处得到的是负的值，这就是说，局中人1失去若干个单位，这若干个单位被局中人2赢得.

我们现在讨论的对策，局中人1得到的支付值就是局中人2失去的值. 这种对策叫做零和对策. 由两个局中人参加的零和对策是对策中最简单的一种，称为零和二人对策.

如果局中人的数目不是二，而是n，则对策称为n人对策. n人对策又可分为非合作对策($n \geqslant 2$)和合作对策($n \geqslant 2$). 我们首先

介绍零和二人对策的理论．本章专门论述零和二人对策中的矩阵对策，就是局中人1和2策略的数目都为有限的零和对策．

1.2. 矩阵对策

设局中人1有m个策略$i=1,\cdots,m$；局中人2有n个策略$j=1,\cdots,n$．若局中人1选择策略i，局中人2选择策略j，局中人1从局中人2得到的支付是a_{ij}，则支付矩阵是

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

对策由上列矩阵完全确定，所以这种对策称为矩阵对策．

在这种对策里，局中人1希望支付值a_{ij}越大越好，局中人2则希望付出的a_{ij}越小越好．因此，矩阵对策完全是对抗性的。

如果局中人1选择他的第1个策略，即$i=1$，则他至少可以得到支付

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{1j}.$$

一般地，如果局中人1采用他的第i个策略，则他至少可以得到支付

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}. \tag{1.2}$$

这就是支付矩阵第i行元素中的最小元素．由于局中人1希望a_{ij}越大越好，因此，他可以选择i使（1.2）为最大．这就是说，局中人1可以选择i，使得他得到的支付不少于

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\ \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}. \tag{1.3}$$

同样，如果局中人2选择他的第1个策略，即$j=1$，则他最多失去（输掉）

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{i1}.$$

一般地，如果局中人 2 采用他的第 j 个策略，则他至多失去

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}\cdot \qquad (1.4)$$

这是支付矩阵第j列的最大元素.由于局中人 2 希望a_{ij}越小越好，因此，他可以选择j使（1.4）为最小. 这就是说，局中人 2 可以选择j，保证他失去的不大于

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}. \qquad (1.5)$$

也可以说，如果局中人 2 处理得当，局中人 1 得到的支付不会大于（1.5）中的值.

既然局中人 1 可以选择i使自己至少可以得到

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\ \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij},$$

而局中人 2 可以选择j使局中人 1 最多只能得到

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij},$$

那么，这两个值之间有什么关系没有呢?

我们来看看上一节中的三个例子.在例 1 中，

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\ \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}=\max(-1,\ -1)=-1,$$

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}=\min(1,1)=1.$$

因此，

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\ \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}<\min_{1\leqslant j\leqslant n}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}.$$

在例 2 中，

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\ \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}=-1<1=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}.$$

在例 3 中，

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\ \min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}=\max(0,-1,-4,-9)=0,$$

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}=\min(0,2,8)=0.$$

因此，二者相等.

由此可见，$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}$和$\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij}$可能相等，也可能不相等.在一般情形，必有下列不等式：

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}\leqslant\min_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij}. \tag{1.6}$$

证明如下. 对于每一个i，有

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}\leqslant a_{ij},\qquad j=1,\ \cdots,\ n;$$

对于每一个j，有

$$a_{ij}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij},\qquad i=1,\ \cdots,\ m.$$

因此，对于一切i和一切j，有

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij}.$$

上式左边与j无关，两边对j取最小值，得到

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}\leqslant\min_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij},\quad i=1,\ \cdots,\ m.$$

再对i取最大值，就证明了（1.6）,即

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}\leqslant\min_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij}.$$

1.3. 鞍　　点

一个矩阵对策，如果它的支付矩阵（a_{ij}）的元素满足

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}=v=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij}, \tag{1.7}$$

则称这个值v为对策的值，它就是（1.3）和（1.5）的共同值。

上节例 3 中的对策具有值$v=0$.

当（1.7）式成立时，必有一个i^*和一个j^*，使

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}=\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{i^*j}$$

和

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij}=\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij^*}.$$

所以

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_{ij^*}=\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_{i^*j}.$$

但

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij*} \geqslant a_{i*j*} \geqslant \min_{1\leqslant j\leqslant m} a_{i*j} .$$

于是有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij*} = a_{i*j*} = v = \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i*j} .$$

因此，对于一切i和一切j，有

$$a_{ij*} \leqslant a_{i*j*} \leqslant a_{i*j} . \tag{1.8}$$

这就是说，如果局中人 1 选取策略i^*，则局中人 2 若选择j^*以外的策略，支付值不可能小于v；如果局中人 2 选取策略j^*，则局中人 1 若选择i^*以外的策略，支付值不可能大于v.

我们称i^*和j^*分别是局中人 1 和 2 的最优策略，（i^*，j^*）是对策的一个鞍点.我们也称$i=i^*$，$j=j^*$是对策的一个解.

（1,8）式表明，在鞍点（i^*,j^*）处，对策的支付等于对策的值.当局中人 1 坚守他的最优策略i^*时,局中人 2 若偏离他的最优策略j^*，只能使局中人 1 得到的支付值增大,至少不会减少.当局中人 2 坚守他的最优策略j^*时，局中人 1 若偏离他的最优策略i^*，只能使支付减少，至少不会增大.

容易证明，（1.8）也是（1.7）的充分条件（参看后面的 1.7节）.这就是说，如果对策有鞍点（i^*，j^*），则（1.7)成立，且$a_{i*j*}=v$.

一个矩阵对策如果有鞍点，鞍点可能不止一个.但是，在不同的鞍点处，支付值都相等，都等于对策的值.

例4. 对策的支付矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

容易验证，元素a_{31}和a_{32}所在的位置（3,1）和（3,2）都是对策的鞍点，且

$$a_{31}=a_{32}=v=2.$$

矩阵对策 (a_{ij}) 如果有鞍点 (i^*, j^*)，则鞍点很容易求出来.根据鞍点的定义（1.8），鞍点处的元素既是它所在的行中的最小元素，又是它所在的列中的最大元素.

在前面1.1节的例3中，$i^*=1$，$j^*=1$是对策的鞍点.$a_{11}=0$既是第1行中的最小元素，又是第1列中的最大元素.在本节的例4中，$a_{31}=a_{32}=2$都是第3行的最小元素，又分别是第1列和第2列的最大元素.

当矩阵对策的鞍点不止一个时，我们有下面的定理.

定理1.1. 如果 (i^*, j^*) 和 (i°, j°) 都是矩阵对策 (a_{ij}) 的鞍点，则 (i^*, j°) 和 (i°, j^*) 也都是它的鞍点，且在鞍点处的值都相等，即

$$a_{i^*j^*}=a_{i^\circ j^\circ}=a_{i^*j^\circ}=a_{i^\circ j^*}. \tag{1.9}$$

证明. 因为 (i^*, j^*) 是鞍点，所以

$$a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant a_{i^*j} \tag{1.10}$$

对一切i和一切j成立.又因为 (i°, j°) 是鞍点，所以

$$a_{ij^\circ}\leqslant a_{i^\circ j^\circ}\leqslant a_{i^\circ j} \tag{1.11}$$

对一切i和一切j成立.

由（1.10）和（1.11）有

$$a_{i^*j^*}\leqslant a_{i^*j^\circ}\leqslant a_{i^\circ j^\circ}\leqslant a_{i^\circ j^*}\leqslant a_{i^*j^*},$$

这就证明了（1.9）.

然后，根据（1.9）和（1.10），（1.11）可知，

$$a_{ij^\circ}\leqslant a_{i^*j^\circ}\leqslant a_{i^*j}$$

对一切i和一切j成立.因此，(i^*, j°) 是鞍点.同理，(i°, j^*) 也是鞍点.

这个定理说明了具有鞍点的矩阵对策的两个性质：一是鞍点的可交换性；二是鞍点处的值都相等.

1.4. 混合策略

如果矩阵对策没有鞍点，也就是当

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\ \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij} < \min_{1\leqslant j\leqslant n}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij} \tag{1.12}$$

时，我们不能在上节的意义下求得对策的解.例如，1.1节的“锤子、剪刀、布”对策，支付矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们已经知道，

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\ \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = -1 < 1 = \min_{1\leqslant j\leqslant n}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}.$$

局中人1至少可以得到支付-1，局中人2至多失去支付1.在这种情况下，局中人1为了得到大于-1的支付，局中人2为了使支付小于1，双方都将尽最大努力不让对方猜出来自己选择哪一个策略.为此目的，局中人1可以采用一种随机的方法来决定自己要选择的策略；同样，局中人2也将采用随机的方法来决定其策略.这就是本节要引进的混合策略.

设矩阵对策的支付矩阵是$A=(a_{ij})$，其中$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$.局中人1的一个混合策略就是一组数$x_i\geqslant 0$，$i=1,\cdots,m$，满足

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

局中人2的一个混合策略是一组数$y_j\geqslant 0$，$j=1,\cdots,n$，满足

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

相对于混合策略，我们把前两节中所讨论的策略称为纯策略.纯策略$i=i'$其实也是一个特殊的混合策略：$x_{i'}=1$；$x_i=0$若$i\neq i'$.

设$X=(x_1,\cdots,x_m)$和$Y=(y_1,\cdots,y_n)$分别是局中人1和2的混合策略.局中人1以概率x_i选用策略i，局中人2以概率y_j选用策略j.因此，局中人1选择策略i，局中人2选择策略j，并且

支付为a_{ij}的概率是$x_i y_j$.每一个支付a_{ij}乘以相应的概率$x_i y_j$，对所有的i和所有的j求和，我们就得到局中人1的期望支付

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \tag{1.13}$$

局中人1希望这个期望支付越大越好，局中人2则相反，希望它越小越好.设S_m是满足

$$x_i \geqslant 0, \quad i=1,\cdots,m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

的一切$X=(x_1,\cdots,x_m)$的集.如果局中人1选用策略$X\in S_m$，则他的期望支付至少是

$$\min_{Y\in S_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \tag{1.14}$$

这里S_n是满足

$$y_j \geqslant 0, \quad j=1, \cdots n, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

的一切$Y=(y_1,\cdots,y_n)$的集.局中人1可以选择$X\in S_m$使(1.14)为最大，也就是说，他可以保证自己能得到的期望支付不小于

$$v_1 = \max_{X\in S_m} \min_{Y\in S_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \tag{1.15}$$

如果局中人2选用混合策略$Y\in S_n$，则他应付出的期望支付最多是

$$\max_{X\in S_m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \tag{1.16}$$

局中人2可以选择$Y\in S_n$使(1.16)为最小，也就是说，他可以使局中人1得到的期望支付不超过

$$v_2 = \min_{Y\in S_n} \max_{X\in S_m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \tag{1.17}$$

我们有

定理1.2.