［美］劳伦斯 E·马尔维恩著

工程力学

第二卷　运动力学

西南交通大学徐昭鑫　等译

人民教育出版社

工 程 力 学

第二卷 运动力学

[美] 劳伦斯 E. 马尔维恩 著
西南交通大学 徐昭鑫 等译

人民教育出版社

本书是按美国Prentice-Hall公司1976年出版的Lawrence E. Malvern著《工程力学》(Engineering Mechanics)一书译出的。全书分两卷，第一卷为静力学，第二卷为运动力学(运动学和动力学的总称)。

本书以一定的物理学概念为基础，对教学安排有所考虑，可作为高等工科院校的教学参考书，也可供工程技术人员参考、学习之用。

本书第二卷由西南交通大学理论力学教研室部分人员翻译。译者有：季景兰(序言、第八、十二章)，高淑英(第十章)，吕绍棣(第十三章)，张宝珍(附录A及D，系重刊第一卷的)，徐昭鑫(其余各章)；由徐昭鑫总校。

本书第一卷和第二卷译文由戴贤扬和郭兴家校订加工。

工 程 力 学

第二卷 运动力学

[美] 劳伦斯 E. 马尔维恩著

西南交通大学 徐昭鑫 等译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 19.5 字数 400,000

1981年9月第1版 1982年6月第1次印刷

印数 00,001—10,500

书号 15012·0350 定价 1.70 元

序　言

运动力学是《工程力学》两卷本教科书的第二卷。编写本书的目的在于使学生理解力学的原理和方法，并培养学生有条理地阐述和解决工程力学问题的能力。本书着重强调本学科的统一性，目的在于促进理解，并提高解题能力。

本书汇集两所州立大学七年教学经验的成果编写而成；这一部统一的教程完整地阐述了静力学和运动力学。虽然本书沿袭了传统分法，分成第一卷：静力学(第一章至第七章)和第二卷：运动力学(第八章至第十四章)，但是，不管按本书顺序讲授，还是另编顺序，使之包括论述质点运动和刚体平动的运动力学第八章、第九章，再加上静力学部分的第五章至第七章，由于编排仔细，故各个章节仍然叙述清楚，意图明瞭。

在阐述原理过程中，始终使用了矢量记号和矢量代数。这有助于强调物理量，并使物理原理的阐述简明扼要，易于记忆。然而，在问题的解法中，分量式子常常要比用矢量代数求解更为有利，这些分量方法已经用课文中的实例和在各节末的例题解法充分地加以说明。

在第八章中介绍了质点运动力学和刚体平动力学。在第九章中阐述了能量原理和动量原理以及它们的应用。如果另编顺序自成一套统一教程，那么在没有学习第一卷第五章至第七章静力学的某些内容之前，第八章和第九章的全部或部分内容也很容易讲授。

第十章转动运动学在其最后一节中包括了关于有限转动张量的简单介绍。既然这里没有包括在坐标轴变换下的分量转换，并且避免了指标符号，那么，由于转动张量易于想象，故先以转动张量阐明，然后再在第十一章中与惯性张量一起应用，则处于这种水平的学生应当不难掌握这一概念，即张量是把一组输出矢量和某组输入矢量联系起来的线性矢量函数。这就可以使用表示张量式 $\mathbf{h}_A=\mathbf{I}_A\cdot\boldsymbol{\omega}$ 的简单而易于记住的矩阵式 $h=I\omega$，而不使用既长又麻烦的分量公式来计算三维角动量。所必需的少量矩阵代数(在§10.8中给出)可以在一个小时内学会。从实质上讲，仅仅需要具备会把一个 3×3 的方阵乘以一个列阵这样的能力而已。

矩阵概念和张量概念在书中作了这样的安排，使得在想删去时也很容易删去。然而，为了把注意力集中在物理关系上，不为那些难以使用的公式弄得心烦意乱，我发现这些概念甚为有益。在课堂实例中，我通常利用矩阵式来计算角动量。

在附录B中简单地介绍了张量分量的转换，这需要再多一点的矩阵乘法技巧。附录B也给出了指标符号的简单介绍来帮助阅读已发表的文献，但是附录B的张量方法对本书其余部分来说并非必不可少的，可以删掉。

第十一章的§11.1讨论了惯性主轴概念，但对于任意物体的主轴和主值的计算却延后到§11.3，这一节可删去，或者仅作为优等生学习的补充材料。具有两个对称面的物体的主轴，如§11.1所解释的那样，可以由观察来确定，对第十二章的所有问题来讲，这是够用了的。

在结束§12.1的(一)以后,就可以直接着手进行§12.3的平面运动动力学，它并不要求首先学习§12.1中的三维问题。但是,它却需要§12.2的能量法。

第十三章包括了基本的力学书中机械振动的常见内容。除了§13.4和§13.5的转动振动以外,这些内容可以放在第八章的后面学习。第十四章介绍了有心力运动和卫星轨道,还有变质量(增或减质量)系统的动量法。这两个专题是彼此独立的，并且可以在第九章之后任何方便的时候学习。其中任何一个或两个都可删去。

这两卷书所包含的材料，足够三学分的两个学期或四学分的两个季度之用。不管静力学还是运动力学,内容都安排得十分灵活,既便于少学时教程的删节，也可以用作包括静力学和运动力学的统一完整。初稿由作者和他的几个同事经过两年的课堂试用。

我感谢**M. A.**艾森伯格教授、**C. G.**埃德森教授、**I. K.**艾布乔格卢教授和**S. Y.**卢教授对初稿提出的意见和评论,感谢使用过本书的学生们提出了有用的建议。我特别感激埃德娜**B.**拉里克夫人,她耐心细致地打出了原稿和几次修订本。

我也感谢普伦蒂斯-霍尔公司编辑出版部的菲利斯·斯普林梅耶的支持与合作,感谢乔治·莫里斯和他在科学插图公司的同事们在准备插图中出色而迅速的工作。

最后,我感谢我的妻子马乔丽的不断启发和鼓励。

劳伦斯　E. 马尔维恩

盖恩斯维尔,佛罗里达

目　　录

序言……………………………………………………1

第八章　质点运动力学和刚体平动运动力学……………………………1

§8.1　运动力学引论；质点运动学概念：位置、速度和加速度 ……………………1

§8.2　直线运动；等加速度；物体系；在无转动参考系中的相对运动 ……………………6

§8.3　质点运动力学 ……………………………16

(一)　力、质量和重量的概念 ……………………16

(二)　牛顿定律，有效力，重力 ……………………17

(三)　量纲和单位 ……………………………21

§8.4　质点运动力学问题 ……………………………24

(一)　分离体图和有效力图 ……………………24

(二)　惯性“力”和“动态平衡” ……………………28

§8.5　平面极坐标和柱坐标；圆周运动 …………31

§8.6　一般曲线运动中的法向分量和切向分量 ……………………………39

§8.7　球面坐标 ……………………………44

§8.8　刚体平动运动力学 ……………………………47

(一)　标准解法 ……………………………47

(二)　“动态平衡”法、惯性力和惯性力偶 ………52

§8.9　小结 ……………………………58

第九章　能量和动量原理及方法……………………60

§9.1　功和动能；功率 ……………………………60

§9.2　包括势能在内的机械功能平衡 ……………66

§9.3　标量场的梯度及矢量场的旋度；保守力场 ……………………………71

§9.4　离散质点系的线动量原理及质心运动原理；连续介质的线动量原理(欧拉第一定律)及质心运动原理 ……75

§9.5　冲量和动量；碰撞 ……………………………79

§9.6　动量矩原理：对于单个质点，质点系或连续体(欧拉第二定律)，刚体 ………84

§9.7　小结 ……………………………88

第十章　有转动时的运动学分析……………………90

§10.1　引言；刚体运动的类型 ……………………90

§10.2　欧拉运动学定理的证明 ……………………95

§10.3　定轴转动、定点运动及刚体一般三维运动的速度和加速度 ……………………96

§10.4　刚体平面运动的运动学 ……………………103

§10.5　平面运动速度分析的瞬时中心 ………113

§10.6　转动参考系 ……………………………117

(一)　转动参考系运动学的基本方程 …………117

(二)　速度和加速度的运动学分析 ……………119

§10.7　在转动参考系中的质点运动力学；把地球作为参考系；离心“力”和科里奥利“力”……………………129

§10.8　初等矩阵代数的复习 ……………………132

§10.9　张量——作为线性矢量函数；有限转动张量 ……………………136

(一)　张量概念 ……………………………136

(二)　笛卡尔张量分量 ……………………138

§10.10　小结 ……………………………141

第十一章　转动惯量和角动量……………………142

§11.1　角动量；惯性矩和惯性积 ……………………142

(一)　定义和推导 ……………………………142

(二)　相对角动量的变化率 $\dot{\mathbf{h}}_A$ ……………………148

§11.2　惯性矩阵和惯性张量 ……………………151

(一)　惯性矩阵 ……………………………151

(二)　惯性张量 ……………………………152

§11.3　主轴 ……………………………152

(一)　方法 ……………………………152

(二)　证明 ……………………………155

§11.4　小结 ……………………………157

第十二章　刚体运动力学……………………159

§12.1　引言；刚体运动力学的标准方法；其它一些可采用的方法 ……………………159

(一)　引言；标准方法的引出 ……………………159

（二）实例 12.1.1 ……162
（三）另一种方法："动态平衡"法 ……165
（四）参考系的另一种选法 ……165
（五）欧拉运动方程组 ……167
（六）动参考点 A 不是质心的情况 ……167
§12.2 刚体的功能法 ……174
§12.3 平面运动刚体的运动力学 ……182
§12.4 角冲量和角动量 ……195
§12.5 对称物体绕一点的转动；回转仪和陀螺 ……202
§12.6 小结 ……208
第十三章 振动 ……209
§13.1 引言；线性弹簧-质量-阻尼器振动系统；无阻尼自由振动 ……209
§13.2 有粘滞阻尼的自由振动 ……218
§13.3 有粘滞阻尼及谐波激励的受迫振动 ……222
§13.4 刚体的旋转振动 ……226
§13.5 无阻尼自由振动中的机械能守恒 ……229
§13.6 小结 ……231
第十四章 专题 ……233
§14.1 有心力运动；卫星轨道 ……233
§14.2 用于流体稳流导流和变质量系统的动量法；火箭和喷气发动机 ……240
附录 A 一些有用的表 ……247
表 A1 六种单位制 ……247
表 A2 几种换算因子 ……247
表 A3 平面弧段和平面面积的特性 ……248
表 A4 密度均匀的常用几何形体的惯性矩和质量中心 ……249
附录 B 坐标轴的转动 ……252
附录 C 静力学中某些专题的复习 ……257
附录 D 质量惯性矩和惯性积 ……265
附录 E 习题答案 ……275
英中名词对照 ……287

第八章　质点运动力学和刚体平动运动力学

§8.1　运动力学引论；质点运动学概念：位置、速度和加速度

第一卷(静力学)的第一章至第七章既阐述了关于力、力矩和力偶以及它们的合成的概念，同时也阐述了矢量代数学。这些概念在运动力学中，即在研究物体在力作用下的加速运动中，将是重要的*。在静力学中所阐述的用来分析静止的和非加速运动的平衡状态的分离体方法也将用于运动力学。

为了分析运动和变形，工程力学利用三个理想化模型：

1. 质点或质量点(或这样的一些离散质点的集合)。
2. 刚体。
3. 可变形的连续体，即固体或流体(也称为连续介质或连续体)。

当我们所要确定的只是物体质量中心的运动时，甚至对于很大的物体也可用理想化为具有质量而无体积的质点来表示。例如，在天体力学中，可以将行星当作质点以确定它们围绕太阳的运动。但是，如果我们涉及到物体可能会有的转动运动，那末采用质点模型就不妥当了。

刚体模型假设物体在受载时没有尺寸变化。这个模型用来确定使静定承载结构保持其位置所需要的支承力，或者用来预断在力作用下机器零件或运载工具的运动，例如，在姿态控制推进器作用下的宇宙飞行器的运动。

可变形的连续介质或连续体模型用于计算结构元件或机器零件的变位，或者用于预断流体的流动。本书几乎完全采用前两个理想化模型。一个例外情况是在§14.2中应用于流体的动量法。

运动力学可以再分为运动学和动力学。运动学没有力和质量的概念，是在时间和空间内的运动几何学。动力学(或运动力学主体)把作用力和物体的质量与运动效应联系了起来。

在质点动力学中，基本定律是牛顿第二定律，对于不变质量 m 的质点陈述为：作用在质点上的所有力的矢量和正比于 $m\mathbf{a}$，此处 $\mathbf{a}$ 是质点的加速度。在一贯单位制中，比例常数为 1，所以 $\Sigma\mathbf{f}=m\mathbf{a}$。在§8.3中将提出质点动力学的基本原理和基本方法。

本节将提出质点运动的运动学，并在§8.2和§8.5—§8.7中再进一步阐述。刚体转动的运动学更为复杂，将把它放到后面第十章中讨论。

运动学概念

在每门科学理论中，都有一些原始的、未下定义的要素(如几何学中的点和直线)，根据这种要素来定义其它的导出量。在力学中，四个原始的、未下定义的要素是空间、时间、质量和力。在

---

* 在附录C中概括了矢量代数学和静力学的一些结果，采用了第一卷中所用的同样的节号和同样的方程编号编排。

运动学中所考虑的只是头两个要素。空间概念包括位置和长度概念。速度是把位置的改变跟此改变的时间间隔 Δt 联系起来的一个导出量，其量纲为长度除以时间：$[L/T]$。加速度是把速度的改变跟此改变的时间 Δt 联系起来的另一个导出量，其量纲为：$[L/T^2]$。我们特别要考虑当 $\Delta t\to 0$ 时的极限值。

为了确定物体的运动，就需要一个参考系。这个参考系可以是任何其它的物体，其变形与我们所观察的运动比较起来是可以忽略的。例如，我们常常把地球取作为参考系来观察飞机的运动，或者也可以把一架飞机取作为参考系，从这个参考系来观察另一架飞机；而对于行星的运动，我们就利用太阳和其它"恒"星作为参考系。我们在参考系上取一原点，相对于参考系运动着的物体的任何物质点 P 的位置，由给出该点的位置矢量 $\mathbf{r}=\overrightarrow{OP}$ 来确定，该位置矢量可想像为从原点 O 画到 P 点的一个箭头。这个被观察的"物质点"可以是单个质点，也可以是刚体或变形体的一个动点。为了确定位置矢量，必须给出其大小和相对于参考系的方向。确定方向的一个方法是在参考系的原点上放上直角笛卡尔参考轴，并给出 $\mathbf{r}$ 与坐标轴方向的三个夹角 θ_x、θ_y、θ_z，或者给出三个方向余弦 $\cos\theta_x$、$\cos\theta_y$、$\cos\theta_z$（参阅 §1.2）。利用曲线坐标的其它方法将在以后论述。在直角坐标中：

$$\begin{gathered}\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\\ r=|\mathbf{r}|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\\ x=r\cos\theta_x,\quad y=r\cos\theta_y,\quad z=r\cos\theta_z\end{gathered}\tag{8.1.1}$$

我们将完全不用坐标系来给出速度和加速度的定义。虽然这些定义取决于参考系，但它们却与坐标系的选取无关。（要注意，一个坐标系可以用无限多种方法固定在参考系上。）动点的位置矢量 $\mathbf{r}$ 随时间 t 而变化；因此 $\mathbf{r}$ 是独立标量变量 t 的矢量函数。为了强调与自变量 t 的关系，我们可以把它表示为 $\mathbf{r}(t)$，但是我们经常简写为 $\mathbf{r}$，隐喻自变量是 t。

物质点 P 相对于参考系的速度 $\mathbf{v}$ 定义为其位置矢量 $\mathbf{r}$ 的时间变化率，即

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\tag{8.1.2}$$

其量纲为：

$$[v]=\left[\frac{L}{T}\right]\tag{8.1.3}$$

式中 $\Delta\mathbf{r}$ 是从物质点 P 在 t 时刻的位置 $P(t)$ 画到位置 $P(t+\Delta t)$ 的位移矢量，或位置改变矢量。图 8-1 说明沿着曲线 C 运动的物质点的两个位置 $P(t)$ 和 $P(t+\Delta t)$。该图表示出在同一参考系上原点的两个不同取法 O 和 O_1，并表明对这两种取法来说，尽管位置矢量 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}_1$ 是不同的，但是位移矢量 $\Delta\mathbf{r}$ 却是相同的。因此，相对于参考系的位移矢量与原点在参考系上的位置无关。不论哪一种情况，按照矢量加法的三角形法则（参阅 §1.2），我们看到 $\mathbf{r}(t+\Delta t)=\mathbf{r}(t)+\Delta\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}_1(t+\Delta t)=\mathbf{r}_1(t)+\Delta\mathbf{r}$，在两种情况中具有同样的 $\Delta\mathbf{r}$。

平均速度 $\mathbf{v}_{av}=\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ 是矢量 $\Delta\mathbf{r}$ 除以正的标量 Δt 所得到的矢量。矢量 $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ 与 $\Delta\mathbf{r}$ 方向相同，而其大小为 $|\Delta\mathbf{r}|/\Delta t$。令 $\Delta t\to 0$ 就得到瞬时速度 $\mathbf{v}$，即式(8.1.2)。$\mathbf{v}$的极限方向是：瞬时

速度相切于轨迹，如图 8-1 所示，而极限的速度大小为

因为

$$
\left.\begin{aligned}
v=|\mathbf{v}|&=\frac{ds}{dt}\\
\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t}&=\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta s}\,\frac{\Delta s}{\Delta t}
\end{aligned}\right\}\qquad(8.1.4)
$$

并且我们假设弦长 $|\Delta\mathbf{r}|$ 与弧长 Δs 之比 $|\Delta\mathbf{r}|/\Delta s$ 趋于 1。这里 Δs 代表在 Δt 时间内沿着曲线走过的距离，因此在本论述中距离 Δs 是非负的。但是在有些论述中，s 将代表弧坐标，它就可以具有负的改变量；例如，可参阅 § 8.5。

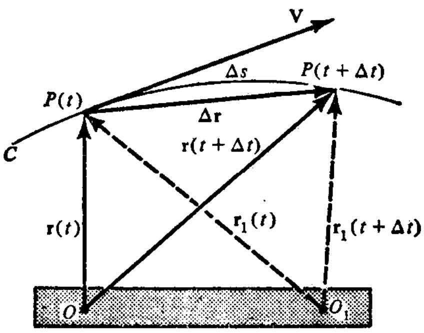

图 8-1　速度

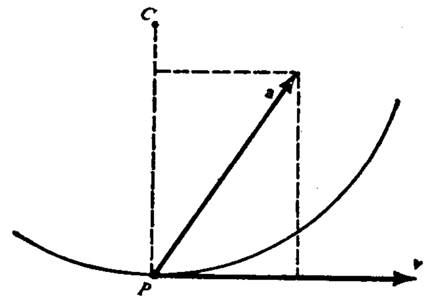

图 8-2　与轨迹相切的速度矢量及具有法向和切向分量的加速度矢量

速度的大小亦称为速率。通常引进坐标系来实际计算矢量函数的导数；例如，可参阅在直角坐标系中速度和加速度的式(8.1.13)。

加速度 $\mathbf{a}$ 定义为瞬时速度的变化率，即

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\qquad(8.1.5)$$

其量纲为：

$$[a]=\left[\frac{L}{T^2}\right]\qquad(8.1.6)$$

此处

$$\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t)\qquad(8.1.7)$$

是瞬时速度在 Δt 时间内的矢量改变量。除了轨迹上曲率为零的那些点外，加速度矢量 $\mathbf{a}$ 不与轨迹相切。相反，加速度矢量却总是指向曲线内部某一方面的，如图 8-2 所示明的那样。请看 §8.5 中关于圆周运动的论述以及 § 8.6 中对于任意轨迹的法向和切向加速度分量的论述。

时间标量的所有矢量函数导数的定义方式，是与速度和加速度那样一些导数的定义方式完全相同的．若 $\mathbf{b}(t)$ 是任意一个矢量函数，那末

式中

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{b}}{dt}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta t}\\
\Delta\mathbf{b}&=\mathbf{b}(t+\Delta t)-\mathbf{b}(t)
\end{aligned}\right\}\qquad(8.1.8)
$$

矢量函数的导数遵从导数代数学的一般规则。例如，和的导数等于各个导数的和：

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\frac{d\mathbf{b}}{dt}+\frac{d\mathbf{c}}{dt} \tag{8.1.9}$$

标量函数 $u(t)$ 与矢量 $\mathbf{v}(t)$ 的积遵从通常的积的规则:

$$\frac{d}{dt}(u\mathbf{v})=\frac{du}{dt}\mathbf{v}+u\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{8.1.10}$$

对于 $u=c$ 为标量常量或者 $\mathbf{v}=\mathbf{c}$ 为常矢量这种特殊情况,立即可以得出

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(c\mathbf{v})&=c\frac{d\mathbf{v}}{dt}\\ \frac{d}{dt}(u\mathbf{c})&=\frac{du}{dt}\mathbf{c}\end{aligned} \tag{8.1.11}$$

这正如我们所期望的一样。两个矢量之积(参阅第三章)的导数也遵从类似于式(8.1.10)的积的规则。我们省略了这些导数代数学规则的证明;利用与标量函数计算完全相同的方法,这些证明可直接从极限过程的某些定理(例如,和的极限等于极限的和)得出来。

速度和加速度的直角坐标分量很容易用位置矢量 $\mathbf{r}$ 的式(8.1.1)之分量 x、y、z 的时间导数来表示。如果用加在字母上面的点来表示时间导数,也就是令

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}&=\frac{d\mathbf{r}}{dt}, &\quad \dot{x}&=\frac{dx}{dt},\\ \ddot{\mathbf{r}}&=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, &\quad \ddot{x}&=\frac{d^2x}{dt^2},\ \text{等}\end{aligned} \tag{8.1.12}$$

那末,因为单位矢量 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 是常矢量,所以将

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} \tag{8.1.13a}$$

求导数,就得到

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k} \tag{8.1.13b}$$

$$\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=\ddot{\mathbf{r}}=\ddot{x}\mathbf{i}+\ddot{y}\mathbf{j}+\ddot{z}\mathbf{k} \tag{8.1.13c}$$

因此

$$\begin{gathered}v_x=\dot{x}、\ v_y=\dot{y}、\ v_z=\dot{z}\\ a_x=\dot{v}_x=\ddot{x}、\ a_y=\dot{v}_y=\ddot{y}、\ a_z=\dot{v}_z=\ddot{z}\end{gathered} \tag{8.1.14}$$

$$\begin{aligned}v&=(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{1/2}\\ a&=(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2)^{1/2}\end{aligned} \tag{8.1.15}$$

而

和

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_v&=\frac{\dot{x}}{v}\mathbf{i}+\frac{\dot{y}}{v}\mathbf{j}+\frac{\dot{z}}{v}\mathbf{k}\\ \hat{\mathbf{e}}_a&=\frac{\ddot{x}}{a}\mathbf{i}+\frac{\ddot{y}}{a}\mathbf{j}+\frac{\ddot{z}}{a}\mathbf{k}\end{aligned}\right\} \tag{8.1.16}$$

分别是在 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{a}$ 方向上的单位矢量。(每一个单位矢量的直角分量是这个矢量方向的三个方向余弦。)

本节以一个例题作为结束,该例题阐明,对所规定的初始条件 $\mathbf{v}(0)$ 和 $\mathbf{a}(0)$,用已知矢量函数 $\mathbf{a}(t)$ 的积分来确定 $\mathbf{v}(t)$ 和 $\mathbf{r}(t)$。然后,在§8.2中我们将考虑分量函数 $a_x(t)$、$a_y(t)$、$a_z(t)$

可以单独地用积分法(一次积分一个分量)来分别确定出 $\mathbf{v}(t)$ 和 $\mathbf{r}(t)$ 的直角分量的情况。§8.2 中所考虑的第一个情况是只有一个分量的直线运动。

例题 8.1.1

质点在平面上运动,在任意时刻 t 其加速度矢量由下式给出:

$$\mathbf{a}=(-Aq^2\cos qt)\mathbf{i}+(-Bq^2\sin qt)\mathbf{j}$$

式中 A、B 和 q 为正的已知常数。

初始条件是:

$$\text{在 } t=0 \text{ 时}, \quad \mathbf{r}=A\mathbf{i}, \quad \mathbf{v}=Bq\mathbf{j}$$

(a) 求出任意时刻 t 的 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{r}$ 的表达式,并证明由质点所在位置画出的矢量 $\mathbf{a}$ 总是通过原点的。(b) 证明轨迹是个椭圆。参阅图 8-3。

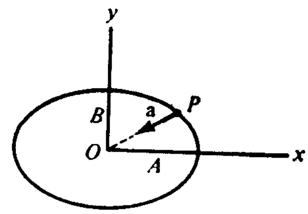

图 8-3 例题 8.1.1

解: (a) 因为 $\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}$, 所以把 $\mathbf{a}$ 进行积分就可得到 $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}=\int \mathbf{a}dt+\text{积分常矢量}$$

$$\mathbf{v}=(-Aq\sin qt)\mathbf{i}+(Bq\cos qt)\mathbf{j}+\mathbf{c}$$

由初始条件 $\mathbf{v}(0)=Bq\mathbf{j}$ 来确定积分常矢量。这样,在 $t=0$ 时,

$$0\mathbf{i}+Bq\mathbf{j}+\mathbf{c}=Bq\mathbf{j}$$

因此 $\mathbf{c}=0$, 于是在任意时刻 t,

$$\mathbf{v}=(-Aq\sin qt)\mathbf{i}+(Bq\cos qt)\mathbf{j} \quad (\text{答})$$

因为 $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$, 所以把 $\mathbf{v}$ 进行积分,可得到位置矢量 $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}=\int \mathbf{v}dt+\mathbf{d}$$

式中 $\mathbf{d}$ 是另外一个任意常矢量。

$$\mathbf{r}=(A\cos qt)\mathbf{i}+(B\sin qt)\mathbf{j}+\mathbf{d}$$

在 $t=0$ 时, $\dot{\mathbf{r}}=A\mathbf{i}$ 的初始条件表明 $\mathbf{d}=0$。因此,在任意时刻 t,

$$\mathbf{r}=(A\cos qt)\mathbf{i}+(B\sin qt)\mathbf{j} \qquad (\text{答})$$

将此结果与所给 $\mathbf{a}$ 的表达式相比较,表明

$$\mathbf{a}=-q^2\mathbf{r}$$

因此在 P 点处,加速度矢量总是平行于 $\mathbf{r}$, 但与 $\mathbf{r}$ 方向相反。因而它通过原点;参阅图 8-3。

(b) 所得的 $\mathbf{r}$ 表达式表明,在任意时刻 t,

$$x=A\cos qt, \quad y=B\sin qt, \quad z=0$$

因此质点在 xy 平面内运动。从 x 和 y 的表达式中消去 t 就求得它的轨迹方程。我们得到

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

即具有半轴 A 和 B 的椭圆方程,如图 8-3 所示。

习 题

1. 若 $\mathbf{r}=at\mathbf{i}+b(\cos pt)\mathbf{j}+c(\sin pt)\mathbf{k}$, 式中 a、b、c 和 p 为已知常数,求出在时刻 t 时加速度矢量的大小及其方向余弦的表达式。

2. 若加速度矢量是常矢量 $\mathbf{a}=-9.81\ \mathbf{j}\,\text{m/s}^2$, 而在 $t=0$ 时的初始条件为 $\mathbf{v}_0=10\ \mathbf{i}\,\text{m/s}$ 和 $\mathbf{r}_0=100\ \mathbf{j}\,\text{m}$, 确定(a)在时刻 t 时的位置矢量 $\mathbf{r}$ 和(b)轨迹的直角坐标方程。

3. 若质点的坐标为 $x=10\cos 2t$、$y=10\sin 2t$、$z\equiv 0$, 其单位为英尺, t 的单位为秒。确定在时刻 t 时加速度

的大小及其方向余弦和轨迹的直角坐标方程。

4. 质点具有加速度 $\mathbf{a}(t)=-150[(\sin 5t)\mathbf{i}+(\cos 5t)\mathbf{j}]\mathrm{ft/sec^2}$，初速度和初位置(在 $t=0$ 时)为 $\mathbf{v}_0=30\mathbf{i}+30\mathbf{k}\ \mathrm{ft/sec}$ 和 $\mathbf{r}_0=6\mathbf{j}\ \mathrm{ft}$。确定 $\mathbf{r}(t)$ 并画出其轨迹。

§8.2 直线运动；等加速度；物体系；在无转动参考系中的相对运动

§8.1 告诉我们，位置矢量、速度和加速度用它们的直角坐标分量表示如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{r}&=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\\ \mathbf{v}&=\dot{\mathbf{r}}=\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k}\\ \mathbf{a}&=\dot{\mathbf{v}}=\ddot{\mathbf{r}}=\ddot{x}\mathbf{i}+\ddot{y}\mathbf{j}+\ddot{z}\mathbf{k}\end{aligned}\tag{8.2.1}$$

式中加在字母上面的点表示时间导数。当作用力使得质点的加速度分量可以不考虑 $\ddot{y}$ 和 $\ddot{z}$ 而独立地进行积分来求出 $x(t)$、不考虑另外两个加速度分量而分别求出 $y(t)$ 和 $z(t)$ 时，那末一个三维运动或者二维运动就可以通过把下面所给出的直线运动方法应用到每一个运动分量方程上去，并将结果叠加起来而解决。(当然，一般地 $\ddot{x}$ 可以与 x、y 和 z 有关，以致这样的分别进行积分是不可能的，于是三个分量方程就必须作为三个微分方程的耦合组来求解。)

直线运动是在直线上的运动，是最简单的一种运动；参阅图 8-4。若取此直线为 x 轴，式(8.2.1)就成为

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i},\quad \mathbf{v}=\dot{x}\mathbf{i},\quad \mathbf{a}=\ddot{x}\mathbf{i}\tag{8.2.2}$$

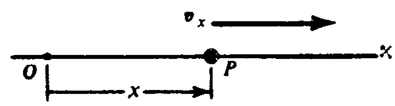

图 8-4 在 x 轴上质点 P 的直线速度(图中表示 $v_x>0$)

此处速度矢量和加速度矢量完全由它们的 x 分量来确定，其 x 分量为

$$\left.\begin{aligned}&v_x=\frac{dx}{dt}\quad 和\quad a_x=\frac{dv_x}{dt}\\ 由此\qquad &a_x=v_x\frac{dv_x}{dx}\end{aligned}\right\}\tag{8.2.3}$$

式(8.2.3)中最后一式(它是从头两式消去 dt 而得到的)在加速度是 x 的已知函数时是有用的，因为它可以写成为 $v_x dv_x=a_x dx$，此式则可积分而给出 $\frac{1}{2}v_x^2$ 为位置 x 的函数。

因为 $v_x\mathbf{i}$ 完全由 v_x 确定，所以在像图 8-4 那样的图中可以省去单位矢量 $\mathbf{i}$。

正的 a_x 意味着 v_x 是代数地增加的；因此，当 v_x 为负值时，正的 a_x 就表示减速；而当 a_x 和 v_x 均为正时，则表示加速。同样，当 a_x 和 v_x 均为负时，速率是增加的。在直线运动中，只要 a_x 与 v_x 符号相反，速率 $v=|v_x|$ 就总是减小的。速率减小时常常称为减速度。

力场(以及从而根据牛顿第二定律得出的质点加速度)可以给定为时间、速度和/或位置的函数。在这三种特殊情况中，即 a_x 仅仅是变量(1)t、(2)v_x 或(3)x 中一个变量的函数，那么可以用分离变量法，通过初等微积分的方式，把式(8.2.3)积分出来。当 a_x 是变量 x、v_x 和 t 中的二个或三个的函数时，就需要更高深的微分方程解法。分离变量法将通过实例来给以阐明，实例中的函

数是线性的($At+B$、$-Bv_x$ 和 $-q^2x$)，A、B 和 q 是常数，但是该方法也能用于更复杂的函数$f(t)$、$f(v_x)$或 $f(x)$。在这些实例中，积分将象定积分那样进行，这些积分界于 $t=0$ 时的初始状态(这时 $v_x=(v_x)_0=\dot{x}_0$ 和 $x=x_0$)与在时刻 t 的变量上限之间。积分哑变量上标有符号"′"以区别于变量上限。当自变量是 t、v_x 或 x 时，注意在每个实例中是怎样来表示加速度 a_x 的。在每个实例中，问题在于确定 v_x 和 x 作为时间与已知初始值 $\dot{x}_0$ 和 x_0 的函数。

实例 8.2.1

在给定 $a_x=At+B$ 时，令 $a_x=dv_x/dt$，则

$$\frac{dv_x}{dt}=At+B$$

乘以 dt 来分离变量(v_x 和 t)：

$$dv_x=(At+B)dt$$

$$\int_{(v_x)_0}^{v_x} dv_x'=\int_0^t (At'+B)dt'$$

$$v_x-(v_x)_0=\frac{1}{2}At^2+Bt$$

由此

$$\frac{dx}{dt}=v_x=\dot{x}_0+\frac{1}{2}At^2+Bt \quad (\text{答})$$

$$\int_{x_0}^{x} dx'=\int_0^t\left(\dot{x}_0+\frac{1}{2}At'^2+Bt'\right)dt'$$

$$x=x_0+\dot{x}_0t+\frac{1}{6}At^3+\frac{1}{2}Bt^2 \quad (\text{答})$$

实例 8.2.2(a)

在给定 $a_x=-Bv_x$ 时，如果目的是确定 v_x 作为 t 的函数的话，则令 $a_x=dv_x/dt$。另一方法是：如果想要确定 v_x 作为 x 的函数的话，象实例 8.2.2(b) 中那样，就代入 $a_x=v_xdv_x/dx$。由于 $a_x=dv_x/dt$，就有 $dv_x/dt=-Bv_x$。乘以 dt、除以 v_x(假设 $v_x\neq 0$)来分离变量，得

$$\frac{dv_x}{v_x}=-Bdt$$

$$\int_{(v_x)_0}^{v_x}\frac{dv_x'}{v_x'}=-\int_0^t Bdt'$$

用 ln 表示自然对数(以 e 为底)，我们得到

$$\ln v_x-\ln(v_x)_0=-Bt$$

$$\ln\left[\frac{v_x}{(v_x)_0}\right]=-Bt$$

$$\frac{v_x}{(v_x)_0}=e^{-Bt}$$

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x}_0e^{-Bt} \quad (\text{答}) \qquad (8.2.4)$$

$$\int_{x_0}^{x} dx' = \dot{x}_0 \int_0^t e^{-Bt'} dt'$$

$$x - x_0 = \dot{x}_0 \left(-\frac{1}{B}\right)(e^{-Bt} - 1)$$

$$x = x_0 + \left(\frac{\dot{x}_0}{B}\right)(1 - e^{-Bt}) \quad (答) \tag{8.2.5}$$

实例 8.2.2(b)

实例 8.2.2(a) 的问题也可以代入 $a_x = v_x dv_x/dx$，并根据分离变量(对于 $v_x \neq 0$)得到下式而解决:

$$dv_x = -Bdx$$

该式积分得出 v_x 作为位置 x 的函数

$$v_x - \dot{x}_0 = -B(x - x_0) \tag{8.2.6}$$

前面求得的答案式(8.2.4)和(8.2.5)与此结果是一致的。

附注: 假如物体除受到与速度成正比的粘滞流体阻力 $(f = -cv_x)$ 外，不受其它水平力的作用，那么在水平轨道上运动着的物体的物理问题就归结为本实例，而有 $B = c/m$。参阅图 8-5。

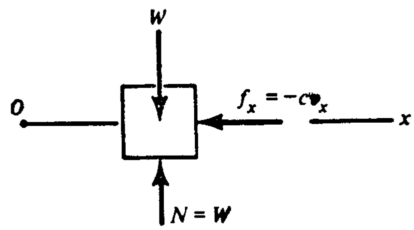

图 8-5　直线运动，$v_x > 0$ 时，显示线性粘滞阻力 f_x 的方向的分离体图

实例 8.2.3

在给定 $a_x = -q^2 x$ 时，令 $a_x = v_x dv_x/dx$,

$$\int_{(v_x)_0}^{v_x} v_x' dv_x' = -q^2 \int_{x_0}^{x} x' dx'$$

$$\frac{1}{2} v_x^2 - \frac{1}{2}(v_x)_0^2 = -\frac{1}{2} q^2 (x^2 - x_0^2)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \pm[\dot{x}_0^2 + q^2(x_0^2 - x^2)]^{1/2} \tag{8.2.7}$$

为简单起见，我们只考虑物体由 $t = 0$ 时为静止开始运动的情况。于是 $\dot{x}_0 = 0$，并且我们看出: 对 $-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$ 来说，v_x 是 x 的一个多值实函数。我们将看到，这个运动是来回振荡的运动，因此，在 $-x_0$ 与 x_0 之间的每一个位置 x 沿每个方向要通过多次。假设 $q > 0$，那末由于 $\dot{x}_0 = 0$，式(8.2.7)就可积分如下:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\pm\sqrt{x_0^2 - x'^2}} = q \int_0^t dt' \tag{8.2.8}$$

因为有±号，这个问题表面上就有两个解:

$$\left[\sin^{-1}\frac{x'}{x_0}\right]_{x_0}^{x} = qt \quad 和 \quad \left[\cos^{-1}\frac{x'}{x_0}\right]_{x_0}^{x} = qt$$

或

$$\left(\sin^{-1}\frac{x}{x_0}\right) - \frac{\pi}{2} = qt \quad 和 \quad \cos^{-1}\frac{x}{x_0} = qt$$

相当于

$$x=x_0\sin\left(qt+\frac{\pi}{2}\right)\qquad 和 \qquad x=x_0\cos qt$$

但是因为 $\sin[qt+(\pi/2)]=\cos qt$，所以这两个解是相同的。于是我们有

$$\left.\begin{array}{c}x=x_0\cos qt,\ v_x=\dot{x}=-qx_0\sin qt\\ a_x=-q^2x_0\cos qt\end{array}\right\}\quad (答) \tag{8.2.9}$$

附注：当物体沿无摩擦的水平轨道运动，而所受的水平力仅为线性弹簧的恢复力 $f_x=-kx$（参阅图 8-6，式中 k 为弹簧常数）时，此物理问题归结为本解答 $q=\sqrt{k/m}$ 的情况。这是一个简谐运动的例子，即具有周期为

$$\tau=\frac{2\pi}{q} \tag{8.2.10}$$

的周期性运动的例子，因为余弦函数是周期为 2π 的周期函数（参阅图 8-7）。运动的频率 $\mathscr{F}$ 为

$$\mathscr{F}=\frac{1}{\tau}=\frac{q}{2\pi} \tag{8.2.11}$$

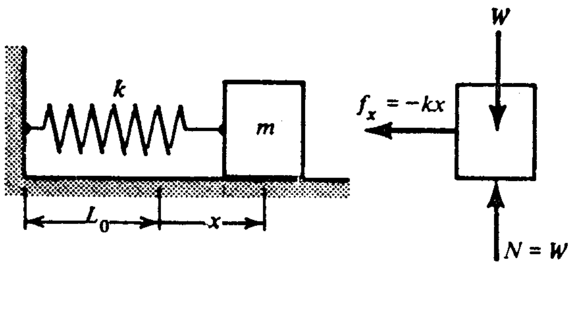

图 8-6　弹簧-质量振荡器及其分离体图

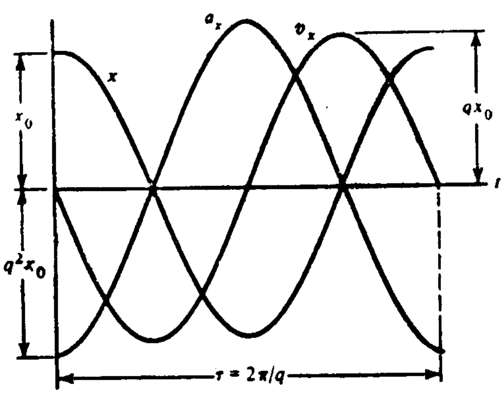

图 8-7　简谐运动 $x=x_0\cos qt$

即每秒钟振动的次数（由于 τ 是每次所需的秒数）。物理参数 q 是单位为弧度/秒的圆频率：

$$q=2\pi\mathscr{F} \tag{8.2.12}$$

这个运动是具有圆频率 q 的自由振动。在第十三章中将研究自由振动的其它例子。

自由振动问题能够由寻求下面的微分方程的解，以不同的方式来解决：

$$\ddot{x}+q^2x=0 \tag{8.2.13}$$

它的通解是

$$x=A\cos qt+B\sin qt \tag{8.2.14}$$

式中 A 和 B 是任意常数。但是，目前我们只考虑用初等积分学的那些解法，而不利用微分方程理论中的方法。

上面这些实例也同样能够用带有任意附加常数的不定积分来解决，其任意附加常数象例题 8.1.1 那样由初始条件来确定。这三个实例用初等方法（经分离变量以后）是可积的，因为在每

一情况中 f_x 是只有一个变量的函数。同样的方法可用于一个变量的更一般的函数。例如，若 $f_x=f(x)$，则 $ma_x=f(x)$。令 $a_x=v_x dv_x/dx$。

$$m\int_{(v_x)_0}^{v_x} v'_x dv'_x=\int_{x_0}^{x} f(x')dx'$$

$$\frac{1}{2}mv_x^2-\frac{1}{2}m(v_x)_0^2=\int_{x_0}^{x} f(x')dx' \qquad (8.2.15)$$

剩下要做的只是计算右边关于特定力函数 $f(x)$ 的积分。这是§9.1中功能法的一个例子。式(8.2.15)的右边是所做的功，而左边是动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 的改变量。

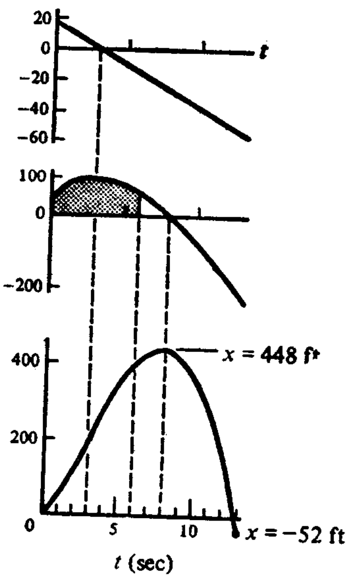

图 8-8　运动曲线实例：　$a_x=18-6t$　$v_x=48+18t-3t^2$　$x=48t+9t^2-t^3$

运动曲线

对于同一个运动，像图 8-7 中那样画出 a_x、v_x 和 x 与 t 的关系曲线是有益的。图 8-8 表示的图形是实例 8.2.1 的解答在 $A=-6$、$B=18$、$x_0=0$ 和 $\dot{x}_0=48$ ft/sec时的运动曲线图。要注意，在对应点处，x-t 曲线的斜率等于 v_x-t 曲线的纵坐标，而 v_x-t 曲线的斜率等于 a_x-t 曲线的纵坐标。反过来，在任意两个时刻 t_1 和 t_2 间，a_x-t 曲线与 t 轴之间的面积等于 v_x 在这两个时刻间的改变量。(在 t 轴下面的面积认为是负的。)在计算这个"面积"时，必须考虑纵坐标与横坐标的单位。例如，在 $t=0$ 和 $t=3$ 秒间的三角形面积等于 $\frac{1}{2}$(18ft/sec²)(3sec)，或 27ft/sec，即 v_x 从其初始值 48ft/sec 到其最大值 75ft/sec 间的改变量。同样，在 v_x-t 曲线下的 396ft 阴影"面积"等于在时间从 $t=0$ 到 $t=6$ 秒间 x 的改变量。

x-t 曲线的相对最大值或最小值只能发生在 $v_x=0$ 处 ($x_{max}=448$ft，在 $t=8$ 秒处)，而 v_x 的相对最大值或最小值只能发生在 $a_x=0$ 处 (在 $t=3$ 秒处)。但要注意，绝对最大值或最小值可以发生在区间的一个端点，而在该点处的斜率不一定为零。图 8-8 中 v_x 的绝对最小值为 $v_x=-225$ft/sec，在 $t=13$ 秒处。因此在 $0\leqslant t\leqslant 13$ 秒时间中，该直线运动的最大速率是 $v=225$ft/sec。

许多教科书在介绍直线运动时，采用记号 a、v 和 s 来分别表示沿其轨道的加速度、速度和位置分量(代数量)。要注意把这些量与 **a** 和 **v** 的大小 a 和 v 以及所走过的总距离 s 区分开。例如，在图 8-8 中，在 13 秒内走过的总距离是 $s=448-448+52=948$ft，但在 $t=13$ 秒时的位置是 $x=-52$ft。位置的改变量是用 v_x 的积分，即在 v_x-t 曲线与 t 轴间的面积给出的，轴线下面的面积当作是负的。当把轴线上面和轴线下面的面积都当作正的时，所走过的总距离就是绝对值 $|v_x|$ 的积分。为了用微积分公式计算 s，就需要在 x-t 曲线上找出转折点(该处 $v_x=0$)，并分段计算在各转折点之间所走过的距离。对这样的问题，作出 x-t 曲线的一个草图是特别有益的。如果你用 a、v 和 s 时以代数值来代替其大小的话，那末你不妨用 D 来代替 s 表示所走过的总距离。