线性代数輔导

线性代数辅导

胡金德 张元德 宋烈侠
朱蓉隽 王飞燕

内容简介

本书是根据教育部1980年制订的工科线性代数教学大纲的要求编写的，也是编者进行线性代数课辅导的教学实践小结。

本书共五章，包括行列式，线性方程组，矩阵运算，线性空间和线性变换，欧氏空间和二次型。是工科大学生、电大和职工大学学员、自学线性代数者学习线性代数的辅导教材，也可供从事工科线性代数教学的教师、非数学专业的研究生及中学教师参考。

线性代数辅导

胡金德等　编

清华大学出版社出版
北京　清华园
北京海淀昊海公司印刷厂排版
北京联华印刷厂印装
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

开本：787×1092　1/32　印张：16　字数：346千字
1986年4月第1版　1986年4月第1次印刷
印数：00001～30000
统一书号：15235·199　定价：2.65元

序

编写本书的目的是想对社会上不少青年自学或通过电视学习工科类线性代数提供一些帮助，同时也考虑到对在校的工科类大学生学习线性代数提供一些辅导。

本书是通过对例题的分析、讲解、提问、小结等方式进行辅导的。例题的选择基本上符合高等工业院校线性代数教学大纲所规定的要求。因此，不管读者使用什么样的工科类教材，都能使用此书。

全书共收集了150道左右例题，400道左右的习题。例题中有介绍基本概念和基本运算方法的计算题或证明题，有初学者易在计算中出现错误或不易理解的澄清题，有一题多解的开扩思路题，也有较灵活的综合题。不少例题在讲解前作了如何思考或如何下手的分析，在讲解完后有些还提出思考问题，希望读者进一步思考、深入理解。这些例题的绝大部分编者都在清华大学教学上使用过，其中不少例题是多年来教学中经常使用的。

由于本书主要是为初学者提供的辅导材料，在每一节前面都有“内容提要”及“例题分析”。我们建议读者对每一节的“内容提要”先看一看，想一想，再去看“例题分析”的题目，先自已动手算一算，然后看题解，这样帮助会大些。

为了使读者有指导地做些练习，在每节后都有相应内容的习题（有＊号的可不做），帮助读者达到巩固熟练的目的。在每章最后一节是习题的提示和答案，有些还提供了较详细的解答。我们希望初学者一定要在独立思考，独立解题的前提下，再参看提示和答案。

编写本书时，我们主要参考了下列教材：清华大学栾汝书教授编的“空间解析几何和线性代数”（校内试用教材，现已正式出版，名为“线性代数”），北京大学的“高等代数”，及N·B普罗斯库烈柯夫著，周晓钟译的“线性代数习题集”等，在此特向有关人员表示感谢。

由于编者水平所限，难免有缺点、错误，欢迎读者批评指正。

编者　1984.6

目　录

第一章　行 列 式

§1　n阶行列式的定义

一、内容提要

1．排列和逆序

由n个数1，2，3，…，n组成的一个有序数组（$i_1,i_2,i_3\cdots,i_n$）称为一个n元排列。n元排列共有$n!$个。

在一个排列（$i_1,i_2,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots,i_n$）中，若数$i_t>i_s$，则称这两个数组成一个逆序。一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数。记作：$\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_n)$。若$\sigma$为奇数，则称（$i_1i_2,\cdots i_n$）为奇排列。若$\sigma$为偶数，则称此排列为偶排列。

排列（$i_1,i_2,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots,i_n$）中，交换任意两数$i_t$和$i_s$的位置，称为一次对换。

对换改变排列的奇偶性。

任意一个n元排列（$i_1,i_2,\cdots,i_n$）经过若干次对换可变为（1，2，…，n）样的自然顺序排列，且所作的对换次数与排列（$i_1,i_2,\cdots,i_n$）有相同的奇偶性。

2．n阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 i_2\cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 i_2\cdots i_n)}$$

$$\times a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

这里，$\sum\limits_{(i_1 i_2\cdots i_n)}$ 是对所有n元排列（$i_1 i_2\cdots i_n$）求和。

故行列式等于取自不同行、不同列的n个元素的乘积$a_{1i_1} a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$的代数和，每一项的正负号取决于组成该项的$n$个元素的列下标排列的逆序数（当把其行下标按自然顺序排列时）。即当（$i_1 i_2\cdots i_n$）是偶排列时，取正号，当（$i_1 i_2\cdots i_n$）是奇排列时，取负号。

显然，二阶、三阶行列式的展开是符合这个定义的。

二、例题分析

1.1 决定排列（$n, n-1, \cdots, 2, 1$）的逆序数，并讨论它的奇偶性。

解：为了找出排列（$n, n-1, \cdots, 2, 1$）所有的逆序而不遗漏，我们对此排列的n个数从左到右顺序地考察：第一个数n比其后面的$n-1$个数都大，共组成$n-1$个逆序，第2个数$n-1$又比其后面的$n-2$个数都大，又组成$n-2$个逆序，…，因此，一般地，数k（$k>1$）与其后面$k-1$个数组成$k-1$个逆序，$\sigma(n, n-1, \cdots, 2, 1) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$所以，当$n=4k$或$4k+1$时，$\sigma$为偶数，

此排列为偶排列。当$n=4k+2$或$4k+3$时，σ为奇数，此时排列是奇排列。

1.2　求证：在全部n元排列中，奇排列和偶排列的个数相等。

证明：在由1，2，…，n这n个数（$n>1$）组成的全部n元排列中，有一个排列（$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$），必然就有一个排列（$i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$）与之对应，（注意，这里其他元素都未动，只是$i_s$与$i_t$作了对换）若其中一个为偶排列，另一个由于看作是由这个排列中的两个数i_t和i_s作了一次对换而得到，则必然为奇排列，反之亦然。这样，在全部排列中，两两配对，必然奇偶排列的个数相等。显然n元排列共有$n!$个，故奇偶排列各为$\frac{n!}{2}$。　　　　证毕

1.3　在6阶行列式中，$a_{14}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{42}\ a_{56}\ a_{65}$的项应带什么符号？$a_{23}\ a_{31}\ a_{42}\ a_{56}\ a_{14}\ a_{65}$呢？

解：从6阶行列式的定义出发，$a_{14}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{42}\ a_{56}\ a_{65}$再加上其前面置以正号或负号构成行列式中的一项，该项行下标已按自然顺序排列。由定义，其正负号取决于列下标排列的逆序数σ，即为$(-1)^{\sigma}$，现列下标的排列为（4，3，1，2，6，5）从左往右，逐个计算此排列的逆序数（用┌──┐表示一个逆序）。

$$\sigma(4\quad 3\quad 1\quad 2\quad 6\quad 5)=6$$

而 $(-1)^6=1$，故 $a_{14}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{42}\ a_{56}\ a_{65}$ 应带正号。

再看 $a_{23}\ a_{31}\ a_{42}\ a_{56}\ a_{14}\ a_{65}$，为了利用定义来决定这一项前面的符号，先把这一项中6个元素的位置重新排列一下，使得它们的行下标排列为自然顺序。即

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}=a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$$

根据前面的计算，这一项前面的符号为正，(因为 $(-)^6=1$)。

说明：在把6个元素的位置重新按行下标为自然顺序排列时，对元素经过了若干次对换。当每两个元素对换一次时，6个元素的行下标组成的6元排列和列下标组成的6元排列均进行了一次对换，各改变了一次奇偶性，故行下标和列下标的逆序数的和的奇偶性不变。所以：

$$(-1)^{\sigma(4,3,1,2,6,5)}$$
$$=(-1)^{\sigma(1,2,3,4,5,6)+\sigma(4,3,1,2,6,5)}$$
$$=(-1)^{\sigma(2,3,4,5,1,6)+\sigma(3,1,2,6,4,5)}$$

即 $(-1)^6=(-1)^6=(-1)^{4+4}=1$

这个结论可以推广到 n 阶行列式的一般情形：若 n 阶行列式的一般项为 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 经过若干次对换变为

$a_{1j'_1}\ a_{2j'_2}\ \cdots a_{nj'_n}$，则 $(-1)^{\sigma(i_1i_2\cdots i_n)+\sigma(j_1j_2\cdots j_n)}$

$$=(-1)^{\sigma(12\cdots n)+\sigma(j'_1j'_2\cdots j'_n)},$$
$$=(-1)^{\sigma(j'_1j'_2\cdots j'_n)}$$

即 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 前面的符号为

$(-1)^{\sigma(i_1i_2\cdots i_n)+\sigma(j_1j_2\cdots j_n)}$

1.4 按定义计算5阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ 其中$a_i \neq 0$（$i=1, 2, \cdots, 5$）

解：根据定义，这个5阶行列式共有$5!=120$项。但行列式中有很多元素为零，因此有很多项为零，我们只要找出那些不为零的项，它们的和就是行列式的值。现行列式中一共只有5个元素a_1，a_2，a_3，a_4，a_5不为零，而且它们恰好处在不同行，不同列的位置，它们的乘积$a_1a_2a_3a_4a_5$构成了行列式中唯一的非零项，而这项前面的符号由这5个元素的位置决定，把$a_1a_2a_3a_4a_5$按行的自然顺序排好，列的顺序为54321，故：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$a_{15}a_{14}a$

$$=(-1)^{\sigma(54321)}a_1a_2a_3a_4a_5=(-1)^{\frac{5(5-1)}{2}}a_1a_2a_3a_4a_5=(-1)^{10}a_1a_2a_3a_4a_5=a_1a_2a_3a_4a_5$$

根据例1.1的结论，我们可以断定，付对角线（从右上角到左下角这条对角线）上的元素连乘积所构成的项，当$n=4k$或$4k+1$时带正号，当$n=4k+2$或$4k+3$时是带负号的。

顺便提出，根据行列式的定义，很容易证明下面三个结

论：

（1）上三角行列式等于主对角线（从左上角到右下角这条对角线）上的元素的乘积。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（2）下三角行列式也等于其主对角线上的元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（3）对角行列式也等于主对角线上的元素的乘积。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

1.5 证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = 0$$

证明：这个行列式的元素满足：

$$a_{3j_3}=0 \qquad (\text{当} j_3=1,\ 2,\ 3\text{时})$$

$$a_{4j_4}=0 \qquad (\text{当} j_4=1,\ 2,\ 3\text{时})$$

$$a_{5j_5}=0 \qquad (\text{当} j_5=1,\ 2,\ 3\text{时})$$

而5阶行列式的一般项为 $(-1)^{\sigma}a_{1j_1}a_{2j_2}\underbrace{a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}}$，只要 j_3、j_4、j_5 中有一个为1、2、3时，对应项便为零。又 $j_3j_4j_5$ 应取1，2，3，4，5中各不相等的3个数，其中必然有1，2，3中的任一个数，因此行列式的一般项必为零，即行列式为零。 证毕

1.6 按定义计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解：由于行列式中不为零的项只有 $1\cdot 2\cdots(n-1)n$ 这一项，而把这 n 个元素按行下标自然顺序排列时，列下标的排列为 $(n-1,\ n-2,\ \cdots 2,\ 1,\ n)$，

而 $\sigma(n-1,\ n-2,\ \cdots 2,\ 1,\ n)=(n-1)(n-2)/2$，

所以行列式 $\Delta n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$

*1.7 证明

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) \cdots \dfrac{d}{dt}(a_{1j}(t)) \cdots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) \cdots \dfrac{d}{dt}(a_{2j}(t)) \cdots a_{2n}(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(t) \cdots \dfrac{d}{dt}(a_{nj}(t)) \cdots a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

证明：欲证的等式左边是一个n阶行列式相对于变量t求导数，而行列式中每个元素均为变量t的函数。等式右边为n个行列式之和，根据行列式的定义及导数的运算性质，我们有：

$$左边=\frac{d}{dt}\sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)}(-1)^{\sigma(i_1 i_2 \cdots i_n)}\times$$

$$\times a_{i_1 1}(t)a_{i_2 2}(t)\cdots a_{i_j j}(t)\cdots a_{i_n n}(t)$$

$$=\sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)}(-1)^{\sigma(i_1 i_2 \cdots i_n)}\times$$

$$\times \frac{d}{dt}(a_{i_1 1}(t)a_{i_2 2}(t)\cdots a_{i_j j}(t)\cdots a_{i_n n}(t))$$

$$= \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \cdots i_n)}$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_1 1}(t) \cdots \frac{d}{dt} a_{i_j j}(t) \cdots a_{i_n n}(t) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \cdots i_n)} \right.$$

$$\left. a_{i_1 1}(t) \cdots \frac{d}{dt} a_{i_j j}(t) \cdots a_{i_n n}(t) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(t) \cdots \frac{d}{dt} a_{1j}(t) \cdots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) \cdots \frac{d}{dt} a_{2j}(t) \cdots a_{2n}(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(t) \cdots \frac{d}{dt} a_{nj}(t) \cdots a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \text{右边}$$

推证的最后三个等号的依据是：1，导数乘积的运算性质。2，双重和号可以交换次序。3，行列式的定义。　证毕

三、习　　题

确定以下排列的逆序数，并确定是偶排列还是奇排列？

1.1　(1, 8, 2, 7, 3, 6, 4, 5)

1.2　(2, 4, 5, 3, 1, 8, 7, 6)

1.3　(2, 4, 6, …, $2n$, $2n-1$, …, 3, 1)

1.4　选择i和k，使(1, 2, 7, 4, i, 5, 6, k, 9)成偶排列，使(1, i, 2, 5, k, 4, 8, 9, 7)成奇排列。

1.5　在数1, 2, …, n的任一排列中，逆序数和顺序数的和等于多少？

1.6　设排列(a_1, a_2, …, a_n)中有s个逆序，问在排列(a_n, a_{n-1}, …, a_1)中有多少个逆序？

下列乘积中，哪些可以构成相应阶数的行列式的项？并带有正号还是负号？

1.7　$a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$

1.8　$a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$

1.9　$a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$

1.10　$a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$

1.11　$a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$

1.12　$a_{11}a_{2,n}a_{3,n-1}\cdots a_{n2}$

1.13　写出4阶行列式中所有包含a_{23}，并且带负号的项。

1.14　写出5阶行列式中所有含$a_{13}a_{32}$的项。

1.15　i, j, k为何值时，使$a_{1i}a_{25}a_{3j}a_{41}a_{5k}$带负号？

1.16　选取i和k的值，使得乘积$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$