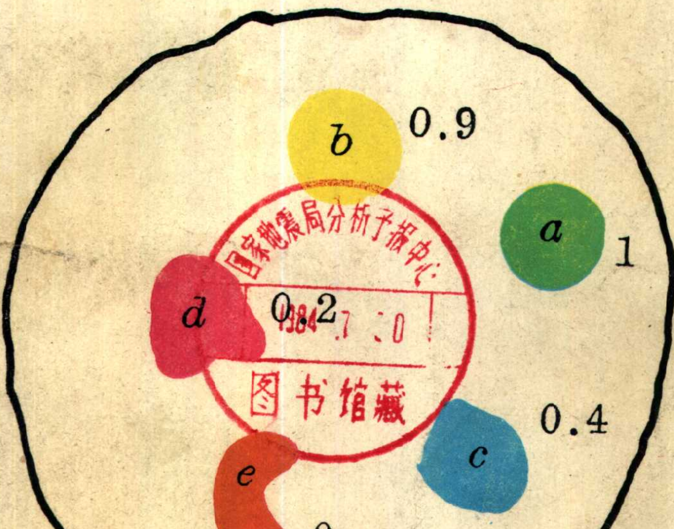
模糊集合论及其应用

汪培庄

$$U=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$$



$$\underset{\sim}{A}=1/a+0.9/b+0.4/c+0.2/d+0/e$$

上海科学技术出版社

模糊集合论及其应用

汪 培 庄

上 海 科 学 技 术 出 版 社

模糊集合论及其应用

汪 培 庄 编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 11.75 字数 291,000

1983 年 11 月第 1 版 1983 年 11 月第 1 次印刷

印数：1—23,000

统一书号：13119·1082 定价：（科五）1.55 元

前　　言

近几年来，模糊数学在我国发展较快，越来越多的同志希望了解、掌握和运用它，要求有一些入门的读物。1979 年，由于教学的需要，我和几位同志编写过一本讲义，以后又经过几次修改，在此基础上写成了本书。

我的主观愿望是想让这本书能对模糊集合论及其应用有一个浅显而又保持一定严谨性的教材式的叙述，同时，多反映一点国内的研究成果。但是限于自己水平，写就后仍有很多缺点，盼望大家批评指正。

本书的第一部分是模糊集合的初等理论，象模糊拓扑、模糊测度与积分、模糊图论等这样一些重要然而较为深入的理论，都未能写入。本书的第二部分是若干应用实例选编，由于时间仓促，可能有些更优秀的应用成果被我遗漏了。第二部分中引用了一些尚未发表的文献，也可能会给读者带来查询上的不便。所有这些都请予谅解。

在本书第一部分中，钱敏平同志曾为第七章供稿；仲崇骥、任平同志曾为第九章供稿；第八章采用了袁萌(二、三节)、徐文立(四、五节)两同志的文稿；本书第二部分第一章由马谋超、曹志强两同志执笔，在此一并致谢。本书的第二部分引用了许多同志的研究成果，在此也谨向他们致谢。

感谢楼世博同志，他以及他的研究生童增祥等同志为我校阅了全书，提出了宝贵的意见。

感谢刘应明、吴望名、耿春仁等同志的热情支持和帮助。感谢陈永义、张南纶、曹志强、赵汝怀、段英俊等同志为本书所付出的辛勤劳动。

汪 培 庄

一九八一年四月于北京

目　　录

第二部分　模糊集合论的初步应用

第一章　模糊集合的一般概念

§1　绪　　言

模糊数学是研究和处理模糊性现象的数学。这里所谓的模糊性，主要是指客观事物的差异在中介过渡时所呈现的"亦此亦彼"性。

现代数学与集合论密切相关。集合可以表现概念，而集合的运算和变换，可以表现判断与推理。正因如此，用数学语言能够描述和表现其它许多学科的内容和思想。

但是在普通集合论中，一个对象对于一个集合，要么属于，要么不属于，二者必居其一，而且二者仅居其一，绝不模棱两可。这样一条要求就限定了普通集合论只能表现"非此即彼"的现象。

水在0°C以下要结冰，象这样一类具有突变形态的差异，比较容易在人脑中产生确切的概念。在这里，对立的事物似乎是"非此即彼"的。但是，绝对的突变是不存在的。在自然和社会现象中，差异往往要通过一个中介过渡的形式。处于中介过渡的差异，便具有"亦此亦彼"的性质。例如，高个子与矮个子，美与丑，清洁与污染，有矿与无矿，甚至象人与猿、脊椎动物与无脊椎动物、生物与非生物等等这样一些对立的概念之间，都没有绝对分明的界限。这些概念严格说来都没有绝对明确的外延。

没有明确外延的概念，叫做模糊概念。模糊概念不能用普通集合论来刻划，于是，便产生了模糊集合论。它是由美国人扎德(L. A. Zadeh)在1965年创立的。

扎德用隶属程度来描述差异的中介过渡，它是用精确的数学语言对模糊性的一种描述。

精确性与模糊性的对立，是当今科学发展所面临的一个十分

突出的矛盾。各门学科迫切要求数学化、定量化，但是，科学的深化意味着研究对象的复杂化，复杂的东西又难于精确化。电子计算机的出现，在一定程度上在解决着这个矛盾，然而，正是由于电子计算机的出现，使得这种矛盾更加激化：一方面，严密的程序要求高度的精确，另一方面，机器所执行的日益繁难的任务，使它所面临的系统日益复杂。扎德从实践中总结出这样一条互克性原理："当系统的复杂性日趋增长时，我们作出系统特性的精确然而有意义的描述的能力将相应降低，直至达到这样一个阈值，一旦超过它，精确性和有意义性将变成两个几乎互相排斥的特性"。这就是说，复杂程度越高，有意义的精确化能力便越低。复杂性意味着因素众多，当着人们不可能对全部因素都进行考察，而只能在一个压缩了的低维因素空间上来观察问题的时候，即使本来是明确的概念也可以变得模糊，这可能是模糊性出现的一种原因；复杂性还意味着深度的延长，一个过程要用数百、数千个微积分方程来描述，模糊性的影响进行积累，也可能使模糊性变得不可忽略。如果说，在过去的科学发展中，人们能够回避模糊性而运用传统数学，那末，在今天的科学发展中，人们就再也无法回避模糊性了。必须寻找到一套研究和处理模糊性的数学方法。这就是模糊数学产生的历史必然性。

模糊数学不是让数学变成模模糊糊的东西，而是要让数学进入模糊现象这个禁区。但是，也不能把"模糊"两字看成纯粹消极的贬义词。过分的精确反倒模糊，适当地模糊反而精确。在许多控制过程中，模糊的手段常常可以达到精确的目的。

人脑的重要特点之一，就是能对模糊事物进行识别和判决。电子计算机在运算速度、记忆性能等方面远远超过了人脑，但在某些方面还不及一个婴儿，就是因为它尚难于进行模糊识别与判决。人脑对事物的认识是很灵活的，一点也不迂腐。比如找人，只知被找的人是一个大胡子、高个子，并不需要问此人的身高究竟是一点几几几几米，也并不需要问此人脸上究竟有多少根胡须以及每根胡须平均有多粗多长。在人脑中，大胡子、高个子都是模糊特征，

按每个人对这些特征的隶属程度的高低进行筛选，便可以很快地从大庭广众之中找到所要找的人。模糊数学的一个重要特点，就是要使数学回过头来吸取人脑识别和判决的模糊特点，使之运用于计算机，使部分自然语言能够作为算法语言直接进入程序，使人能以简易之程序调动机器完成更复杂的任务，从而大大提高机器的活性。这是模糊数学产生的直接背景。

概率论的产生，把数学应用范围从必然现象扩大到偶然现象的领域。模糊数学的产生则把数学的应用范围从精确现象扩大到模糊现象的领域。概率论研究和处理随机性，模糊数学研究和处理模糊性，二者都属于不确定性数学，它们之间有深刻的联系，但又有本质的不同。

模糊数学把传统数学从二值逻辑的基础扩展到连续值上来，这有深远的意义。

模糊数学从1965年发展到现在，不过十六年的历史。然而，其文献数量有了极迅速的增长，应用的触角正伸向科技领域的许多方面，发展速度超过了许多应用数学分支。但是，直到今天，它还没有成熟，需要广大读者共同努力，让这门年轻学科更快更好地向前发展。

§2　普通集合论的简单回顾

符合某个概念的那些对象的全体，叫做该概念的外延。所有的人构成“人”这个概念的外延。外延限定了概念的内涵：凡人所共有而非人便不具有的特性，便是“人”这一概念的本质属性。

外延，实际上就是一个集合。人脑中概念的形成，实际上总要涉及到集合论。

我们在说到某个概念的外延时，总离不开一定的论域。客观事物浩如烟海，我们在讨论一个具体问题的时候，总是把自己的议题限制在一定的范围内。例如要讨论“男子”这一概念，不必去考虑那些风马牛不相及的事物，不必去考察一块石头或一片云霞，

我们可以把自己的议题首先限制在"人"这样一个范围内，把所有的人作为讨论对象，然后再在其中区分性别。如果因素众多，我们总是把自己的眼光集中在最少量的几个主要因素上。例如，讨论"等腰三角形"，对于被考虑的三角形物体，可以舍去其面积、重量、颜色等因素，只需考虑它们的三个内角(A, B, C, 它们满足 $A+B+C=180°$)，把一切这样的三维向量(A, B, C)作为考虑对象。被讨论的全体对象叫做*论域*。论域常以大写的英文字母 U, V, $\cdots$, X, Y, $\cdots$ 等表示。论域中的每个对象，统一叫做*元素*，以相应的小写字母 u, v, $\cdots$, x, y, $\cdots$ 等表示。

给定论域 U, U 中某一部分元素的全体叫做 U 上的一个集合，常以大写英文字母 A、B、$\cdots$ 等表之。

从 U 中任意指定一个元素 u 及任意一个集合 A，在 u 与 A 之间，要么 u 属于 A(记作 $u\in A$)，要么 u 不属于 A(记作 $u\notin A$)，二者必居且仅居其一，这是普通集合论中最起码的要求。

要想确定 U 中的一个集合 A，只需对 U 中的任一元素 u，都能在

(甲) $u\in A$, (乙) $u\notin A$

二者之间作一个选择就行了。

记号 $A=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 是用枚举的方法，把 U 中所有那些符合(甲)的元素，用一个花括号括起来，就是由它们组成了集合 A。它们也叫做 A 中的*元素*。

而集合经常是无法枚举的。这时采取记号

$$A=\{u|\cdots\cdots\}。$$

花括号中竖线右方是对 u 的一种解释，它给出了 A 中元素的特征。例如，取 $U=(0, +\infty)$(全体正实数 R_+)，

$A_1=\{u|u\in U, u 是偶数\}$,

$A_2=\{u|u\in U, u 能被 2 整除\}$,

$A_3=\{u|存在一个自然数 k, 使 u=2k\}$,

$\cdots\cdots$

通过花括号中的描述，人们便可以明确集合的内容。当然表达的

形式可以不同，上述几种不同的表达方式所确定出来的是同一个集合。一般地，

$$A=\{u\,|\,\mathscr{A}(u)\text{真}\}。$$

$\mathscr{A}$ 是 U 上的一个谓词(粗糙地说，它是以 u 为自变量，以命题为因变量的一个命题函数)。A 是 $\mathscr{A}$ 的真域。

设 A, B 是 U 上的两个集合，如果对任意 $u\in U$，都有

$$u\in A\Rightarrow u\in B \quad (\text{若 } u\in A,\ \text{则 } u\in B),$$

便称 B 包含 A，记作 $B\supseteq A$，或称 A 被 B 包含，记作 $A\subseteq B$。A 叫做 B 的子集。

如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A, B 相等，记作 $A=B$。

U 中的任一集合 A 都是 U 的子集：

$$U\supseteq A。\tag{1.1}$$

U 本身当然也是 U 的一个子集。如果把“$\supseteq$”看作一种“大小”关系，这是最大的子集。还有“最小”的子集，它不包含 U 中的任何元素，相对于 U 来说，它是空的。不包含 U 中任何元素的集合，叫做空集，记作 $\emptyset$。对于 U 的任意子集 A，都有

$$\emptyset\subseteq A\subseteq U。\tag{1.2}$$

元素与集合是不同层次的概念。元素 u 与仅由元素 u 组成的集合 $\{u\}$(叫做单元素集)，是不应该混淆的两个东西。

把 U 的每一个子集都看作是新的元素，则由 U 的一些子集又可以组成集合。集合的集合有时又叫做集合类。U 的一切子集所构成的集合类，叫做集合的幂，记作 $\mathscr{P}(U)$。例如

$$U=\{\text{黑},\text{白}\},$$

$$\mathscr{P}(U)=\{\{\text{黑},\text{白}\},\ \{\text{黑}\},\ \{\text{白}\},\ \phi\}。$$

还可以写出

$$\mathscr{P}[\mathscr{P}(U)]=\mathscr{P}^2(U),\ \cdots,\ \mathscr{P}(\mathscr{P}^{n-1}(U))=\mathscr{P}^n(U),\ \cdots。$$

于是 U 的子集 A 有两种记法：$A\subseteq U$ 或 $A\in\mathscr{P}(U)$。

以上论述，对于“属于”、“组成”、“全体”这样一些字眼，都不加定义。至于公理化的集合理论，我们暂且不去说它。

相应于或、且、非三种逻辑运算，我们来定义集合的运算。

定义 1.1 设 A、$B\in\mathscr{P}(U)$,

$$A\cup B\triangleq\{u|u\in A\text{ 或者 }u\in B\},\tag{1.3}$$

$$A\cap B\triangleq\{u|u\in A\text{ 且 }u\in B\},\tag{1.4}$$

$$A^c\triangleq\{u|u\notin A\},\tag{1.5}$$

分别叫做 A 与 B 之并集、交集和余集。往后,$\triangleq$ 均表示“被定义作”。

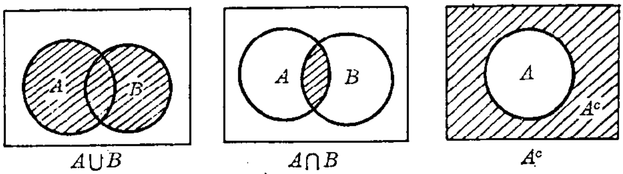


图 1.1 集运算的图示

例如, 设 U 为某一特定人群, A 是 U 中中国人所成的集合, B 是 U 中男子所组成的集合, 则

$$\begin{aligned}A\cup B&=\{u|u\in U,\ u\text{ 或是中国人,或是男子}\}\\&=\{u|u\in U,\ u\text{ 不是外国女子}\},\\A\cap B&=\{u|u\in U,\ u\text{ 既是中国人,又是男子}\}\\&=\{u|u\in U,\ u\text{ 是中国男子}\},\\A^c&=\{u|u\in U,\ u\text{ 不是中国人}\}\\&=\{u|u\in U,\ u\text{ 是外国人}\},\\B^c&=\{u|u\in U,\ u\text{ 不是男子}\}\\&=\{u|u\in U,\ u\text{ 是女子}\}。\end{aligned}$$

再看

$$\begin{aligned}&\{u|u\in U,\ u\text{ 是外国女子}\}\\&=\{u|u\in U,\ u\text{ 是国外人,而且是女子}\}\\&=\{u|u\in U,\ u\text{ 非中国人且非男子}\}\\&=\{u|u\in U,\ u\in A^c\text{ 且 }u\in B^c\}\\&=(A^c)\cap(B^c),\end{aligned}$$

故由 $A\cup B$ 的第二个式子可知,

$$(A\cup B)^c=(A^c)\cap(B^c)。$$

当 $\cup$, $\cap$, c 几种运算连在一起的时候,规定先取余,后取并、交的原则,上式可写为

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c。\tag{1.6}$$

读者可以用数学推理的方法，证明这个等式对于任意论域 U 及其上的任意子集 A, B 都是对的。对于上式，简称"并之余等于余之交"，还可以证明："交之余等于余之并"：

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c。\tag{1.7}$$

集运算的这两条性质，叫做 De–Morgan 律。由它可导出一条

对偶原则 集论中成立的任一定理，若将其中的 $\cup$ 与 $\cap$ 互换，A_i 与 A_i^c 互换，$\subseteq$ 与 $\supseteq$ 互换，则该定理仍成立。

下面列出集合运算的几条最基本的性质，它们都是成对出现的：

(S.1) **幂等律**

$$A\cup A=A,\ A\cap A=A。$$

(S.2) **交换律**

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A。$$

(S.3) **结合律**

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)。$$

(S.4) **吸收律**

$$(A\cap B)\cup B=B,$$
$$(A\cup B)\cap B=B。$$

(S.5) **分配律**

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$

(S.6) **两极律**

$$A\cup U=U,\ A\cap U=A,$$
$$A\cup\emptyset=A,\ A\cap\emptyset=\emptyset。$$

(S.7) **复原律**

$$(A^c)^c=A。$$

(S.8) **补余律**

$$A\cup A^c=U,$$
$$A\cap A^c=\emptyset。$$

集合的并、交运算,可以推广到任意多个集合上去。

定义 1.2 记

$$\bigcup_{t\in T}A_t\triangleq\{u|u\in U,\ 存在\ t\in T\ 使\ u\in A_t\},\tag{1.8}$$

$$\bigcap_{t\in T}A_t\triangleq\{u|u\in U,\ 对一切\ t\in T,\ 均有\ u\in A_t\},\tag{1.9}$$

分别称为集合族 $\{A_t|t\in T\}$ 的并集与交集。

若 $T=\{1, 2\}$, 定义 1.2 即定义 1.1。若 $T=\{1, 2, \cdots, n\}$, 则(1.8)式表示 n 个集合求并。若 $T=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$, 则(1.8)式表示可数个集合求并, ……。出现在定义 1.2 中的集合 T, 叫做指标集。这种记法在数学中是常常用到的。易证

$$A\cap(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}(A\cap A_t),\tag{1.10}$$

$$A\cup(\bigcap_{t\in T}A_t)=\bigcap_{t\in T}(A\cup A_t),\tag{1.11}$$

$$(\bigcup_{t\in T}A_t)^c=\bigcap_{t\in T}(A_t^c),\tag{1.12}$$

$$(\bigcap_{t\in T}A_t)^c=\bigcup_{t\in T}(A_t^c)。\tag{1.13}$$

称集合序列 $\{A_n|n\geqslant1\}$ 单调递增(降),如果

$$A_{n+1}\supseteq A_n(A_{n+1}\subseteq A_n)\quad(n\geqslant1)。$$

在这种情况下,记

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty}A_n\triangleq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\\ \left(\lim_{n\to\infty}A_n\triangleq\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\end{gathered}\tag{1.14}$$

叫做集序列 $\{A_n\}$的极限。(1.14)式也可记作

$$A_n\nearrow\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\left(A_n\searrow\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)。$$

定义 1.3 记

$$A-B\triangleq\{u|u\in A\ 且\ u\notin B\}\tag{1.15}$$

称为 B 对 A 的差集,简称 A 减 B。

差运算与余运算可以互相表示:

$$A-B=A\cap B^c, \tag{1.16}$$

$$A^c=U-A。 \tag{1.17}$$

定义 1.4 记

$$\begin{aligned}A\ominus B&\triangleq(A-B)\cup(B-A)\\&=\{u\mid u\in A\text{ 与 }u\in B\text{ 二者有且仅有一成立}\},\end{aligned} \tag{1.18}$$

称为 A 与 B 的对称差。

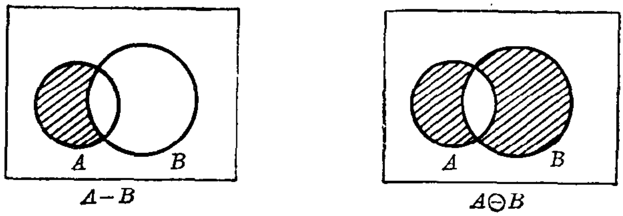


图 1.2 集合的差与对称差

记号

$$\begin{aligned}f:\ &U\to V,\\&u\mapsto f(u)\end{aligned} \tag{1.19}$$

表示 f 是从 U 到 V 的一个映射。所谓映射，就是函数概念的推广：任给 $u\in U$，都有唯一确定的元素 $v=f(u)\in V$ 与之对应。记号 f: $U\to V$ 指明 f 的性质是从 U 到 V 的一个映射，但不指明具体对应规则。记号 $u\mapsto f(u)$ 进一步指明 f 的对应规则，u 叫原象，$f(u)$ 叫 u 的象。

U 叫做 f 的定义域，记

$$f(U)\triangleq\{v\mid\exists u\in U,\text{ 使 }v=f(u)\}, \tag{1.20}$$

叫做 f 的值域。

若 $f(U)=V$，则称 f 是从 U 到 V 的满射。若对任意 $u_1,u_2\in U$，$u_1\neq u_2$，总有

$$f(u_1)\neq f(u_2),$$

则称 f 是单射或 1-1 映射。

若 f 既是单射又是满射，则称 f 是从 U 到 V 的一一对应。