

高等工科院校控制类课程系列化教材

现代控制理论基础

谢克明 主编

北京工业大学出版社



Modern
Control

高等工科院校控制类课程系列化教材

现代控制理论基础

谢克明 主编

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书是适应自动化学科的发展,为自动化专业及其它电类专业本科生编写的教材。主要内容包括:控制系统的状态空间描述,线性控制系统分析,线性控制系统的能控性和能观测性,控制系统的稳定性分析,状态反馈与状态观测器设计等。为了便于自学,各章均附有较丰富的例题和习题。本书内容简练,叙述深入浅出,结合工程实例。

本书专供自动化及其它电类专业学生作为教材,也可供从事自动化及相关专业的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论基础/谢克明主编. -北京:北京工业大学出版社, 2000 2

ISBN 7-5639-0877-3

I. 现… II. 谢… III. 现代控制理论-高等学校-教材 IV. TP13

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第10612号

现代控制理论基础

谢克明 主编

※

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

※

2001年5月第2次印刷

787mm × 1092mm 16开本 14.5印张 330千字

印数3001~6000册

ISBN7-5639-0877-3/G · 476

定价: 17.40元

内 容 简 介

本书是适应自动化学科的发展,为自动化专业及其它电类专业本科生编写的教材。主要内容包括:控制系统的状态空间描述,线性控制系统分析,线性控制系统的能控性和能观测性,控制系统的稳定性分析,状态反馈与状态观测器设计等。为了便于自学,各章均附有较丰富的例题和习题。本书内容简练,叙述深入浅出,结合工程实例。

本书专供自动化及其它电类专业学生作为教材,也可供从事自动化及相关专业的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论基础/谢克明主编. —北京:北京工业大学出版社, 2000. 2

ISBN 7-5639-0877-3

I. 现… II. 谢… III. 现代控制理论-高等学校-教材 IV. TP13

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第10612号

现代控制理论基础

谢克明 主编

※

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

※

2001年5月第2次印刷

787mm × 1092mm 16开本 14.5印张 330千字

印数3001~6000册

ISBN7-5639-0877-3/G · 476

定价: 17.40元

地方工科院校控制类课程系列化教材

编辑委员会名单

主任委员	北京工业大学	冯国楠	教授
委员	(排名不分先后)		
	内蒙古工业大学	常 佶	教授
	河北工业大学	王书田	教授
	太原理工大学	谢克明	教授
	山东工业大学	王效良	教授
	上海大学	卜家歧	教授
	广西大学	林小峰	副教授
	云南工业大学	杨长能	教授
	北京工业大学	易继锴	教授
	北京工业大学	黄涵洲	教授
	北京工业大学	孙 亮	副教授
顾问	河北科技大学	李友善	教授
	北京科技大学	舒迪前	教授

前 言

本书是根据“面向 21 世纪地方工科院校控制类课程系列化教材”编辑委员会于 1997 年 4 月在北京工业大学召开的教材编委会上通过的《现代控制理论基础》教学大纲编写的。

作为自动化专业的一门专业基础课,现代控制理论基础课程在我国高等院校经过近 30 年的教学实践已渐趋成熟,课程内容已逐渐规范。因此,本教材的编写宗旨是理论阐述力求严谨、突出物理概念;内容简练,结合工程实践和易于自学。为了便于读者消化书中内容,在各章节后面都附有较典型的、有助于理解理论的例题和习题。

本书主要讲述状态空间法的基本概念和基本方法,主要包括控制系统的状态方程及解法、能控性和能观测性、李雅普诺夫稳定性分析以及状态反馈与状态观测器设计等内容。这些内容是从事自动化、控制科学与工程以及其它相关学科专业的科技人员必不可少的。全书结构贯穿一条主线,从控制系统的状态空间描述到系统的基本性质分析,再到系统的综合与设计,便于读者由浅入深,抓住重点,加深对该课程基本内容的理解。

太原理工大学谢克明教授任本书主编并编写绪论、第一章的 1.1~1.5 节、第三章的 3.1~3.3 节;太原理工大学刘文定副教授编写第一章的 1.6~1.8 节和第二章;太原理工大学李国勇副教授编写第三章的 3.4~3.7 节和第五章;山东工业大学王划一副教授编写第四章。全书由谢克明教授统稿。

河北科技大学李友善教授主审了全书,提出了许多宝贵的意见和建议。太原理工大学马小军绘制了全书插图。在此向他们表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限,书中难免有错误与不足之处,恳请广大读者批评指正。

1999 年 7 月

目 录

绪论	1
第一章 控制系统的状态空间描述	5
1.1 控制系统中状态的基本概念	5
1.2 控制系统的状态空间表达式	6
1.3 根据系统的物理机理建立状态空间表达式	12
1.4 根据系统微分方程建立状态空间表达式	15
1.5 系统传递函数阵与状态空间表达式的相互转换	20
1.6 系统状态空间表达式的特征标准型	35
1.7 离散系统的状态空间表达式	47
1.8 由离散系统状态空间表达式求脉冲传递函数	54
小 结	55
习 题	55
第二章 线性控制系统分析	58
2.1 线性定常齐次状态方程的解	58
2.2 状态转移矩阵	59
2.3 线性定常非齐次状态方程的解	70
2.4 线性时变系统状态方程的解	73
2.5 离散时间系统状态方程的解	81
2.6 线性连续时间系统的离散化	87
小 结	94
习 题	94
第三章 线性控制系统的能控性和能观测性	97
3.1 线性连续系统的能控性	97
3.2 线性连续系统的能观测性	106
3.3 对偶原理	110
3.4 线性系统的能控标准型与能观测标准型	112
3.5 线性定常离散系统的能控性与能观测性	118
3.6 线性系统的结构分解	121
3.7 传递函数阵与能控性和能观测性之间的关系	140
小 结	142
习 题	144
第四章 控制系统的稳定性	149

4.1	李雅普诺夫稳定性定义	149
4.2	李雅普诺夫稳定性理论	154
4.3	线性系统的李雅普诺夫稳定性分析	163
4.4	非线性系统的李雅普诺夫稳定性分析	181
	小 结	193
	习 题	195
第五章	状态反馈和状态观测器	198
5.1	状态反馈和输出反馈	198
5.2	闭环系统的极点配置	201
5.3	状态观测器的设计	207
5.4	带状态观测器的状态反馈系统	215
	小 结	219
	习 题	220
	参考文献	222

绪 论

0.1 控制理论的产生及其发展

人类发明具有“自动”功能的装置的历史,可以追溯到公元前 14~11 世纪在中国、埃及和巴比伦出现的自动计时漏壶。公元前 4 世纪,希腊柏拉图(Platon,公元前 427~公元前 347)首先使用了“控制论”一词。但比较自觉运用反馈原理设计出来并得到成功应用的是英国瓦特(J. Wate, 1736~1819)于 1788 年发明的蒸汽机用的离心式飞锤调速器。后来,英国学者麦克斯韦(J. C. Maxwell, 1831~1879)于 1868 年发表了“论调速器”一文,对它的稳定性进行了分析,指出控制系统的品质可用微分方程来描述,系统的稳定性可用特征方程根的位置和形式来研究。该文当属最早的理论工作。1875 年英国的劳斯(E. J. Routh, 1831~1907)和 1895 年德国的赫尔维茨(A. Hurwitz, 1859~1919)先后提出了根据代数方程系数判别系统稳定性的准则。1892 年俄国学者李雅普诺夫(A. M. Ляпунов, 1857~1918)出版了专著《论运动稳定性的一般问题》,提出了用李雅普诺夫函数(一种能量函数)的正定性及其导数的负定性判别系统稳定性的准则,从而建立了动力学系统的一般稳定性理论。

本世纪 20 年代电子技术的迅速发展,促进了信息处理和自动控制及其理论的发展。1932 年美籍瑞典科学家奈奎斯特(H. Nyquist)提出了根据频率响应判断反馈系统稳定性的准则,即奈奎斯特判据。1938 年,前苏联学者米哈依洛夫(A. B. Михайлов)提出用图解分析方法判别系统稳定性的准则,把奈奎斯特判据推广到条件稳定和开环不稳定系统的一般情况。

1948 年美国著名科学家维纳(N. Wiener, 1894~1964)出版了专著《控制论——关于在动物和机器中控制和通信的科学》,系统地论述了控制理论的一般原理和方法,推广了反馈的概念,为控制理论学科的发展奠定了基础。该书的出版标志控制学科的诞生。1954 年,我国著名科学家钱学森在美国出版了《工程控制论》一书,书中所阐明的基本理论和观点,奠定了工程控制论的基础。

控制理论和社会生产及科学技术的发展密切相关,在近代得到极迅速的发展。它不仅已经成功地运用并渗透到工农业生产、科学技术、军事、生物医学、社会经济及人类生活等诸多领域,而且在这过程中控制理论也发展成为一门内涵极为丰富的新兴学科。控制理论的发展一般划分为三个时期:

(1)“经典控制理论”时期(本世纪 30~50 年代)。经典控制理论主要是解决单变量控制系统的分析与设计,研究的对象主要是线性定常系统。它以拉氏变换为数学工具,采用以传递函数、频率特性、根轨迹等为基础的经典频域方法研究系统。对于非线性系统,除了线性化及渐近展开计算以外,主要采用相平面分析和谐波平衡法(即描述函数法)研究。

这一时期的主要代表人物除了奈奎斯特等人以外,还有美国的伯德(H. W. Bode)和埃文斯(W. R. Evans)。伯德于 1945 年出版了《网络分析和反馈放大器设计》一书,提出了

频率响应分析方法,即简便而实用的伯德图法。埃文斯于1948年提出了直观而简便的图解分析法,即根轨迹法,在控制工程上得到了广泛应用。

经典控制理论能够较好地解决单输入单输出反馈控制系统的问题。但它具有明显的局限性,突出的是难以有效地应用于时变系统和多变量系统,也难以揭示系统更为深刻的特性。

(2)“现代控制理论”时期(本世纪50~70年代)。这个时期由于计算机技术、航空航天技术的迅速发展,控制理论有了重大的突破和创新。它所研究的对象不再局限于单变量的、线性的、定常的、连续的系统,而扩展为多变量的、非线性的、时变的、离散的系统。现代控制理论以线性代数和微分方程为主要数学工具,以状态空间法为基础,分析和设计控制系统。所谓状态空间法,本质上是一种时域分析方法,它不仅描述了系统的外部特性,而且揭示了系统的内部状态和性能。现代控制理论分析和综合系统的目标是在揭示其内在规律的基础上,实现系统在某种意义上的最优化,同时使控制系统的结构不再限于单纯的闭环形式。

这一时期的主要代表人物有美国的贝尔曼(R. Bellman)、原苏联的庞特里亚金(Л. С. Понтрягин)和美籍匈牙利人卡尔曼(R. E. Kalman)等人。贝尔曼于1956年发表了“动态规划理论在控制过程中的应用”一文,提出了寻求最优控制的动态规划法。1958年,卡尔曼提出递推估计的自动优化控制原理,奠定了自校正控制器的基础。1960年,他发表了“控制系统的一般理论”等论文,引入状态空间法分析系统,提出能控性、能观测性、最优调节器和卡尔曼滤波等概念。两年后,卡尔曼等人又提出最优控制反问题,并得到若干有关鲁棒性的结果。这些理论构造了现代控制理论的框架。1961年,庞特里亚金的《最优过程的数学理论》一书正式出版,证明了极大值原理,使得最优控制理论得到极大发展。

值得指出,瑞典学者阿斯特勒姆(K. J. Åström)于1967年提出最小二乘辨识,解决了线性定常系统的参数估计问题和定阶方法,他和法国的朗道(L. D. Landau)教授等人在自适应控制理论和应用方面做出了贡献。1970年,英国学者罗森布罗克(H. H. Rosenbroek)等人提出多变量频域控制理论,丰富了现代控制理论领域。

(3)“大系统理论”和“智能控制理论”等时期(本世纪60年代末至今)。从60年代末开始,控制理论进入了一个多样化发展的时期。它不仅涉及系统辨识和建模、统计估计和滤波、最优控制、鲁棒控制、自适应控制、智能控制及控制系统CAD等理论和方法。同时,它与社会经济、环境生态、组织管理等决策活动,与生物医学中诊断及控制,与信号处理、软计算等邻近学科相交叉中又形成了许多新的研究分支。

例如,70年代以来形成的大系统理论主要是解决大型工程和社会经济系统中信息处理、可靠性控制等综合优化的设计问题。由于应用范围涉及越来越复杂的工程系统和社会、经济、管理等非工程的人类活动系统,原有的理论方法遇到了本质困难,大系统理论的发展逐渐转向“复杂系统”概念。钱学森把系统的研究拓广到“开放的复杂巨系统”范畴,于1990年提出“从定性到定量的综合集成法”的处理开放的复杂巨系统的研究方法。

智能控制的发展始于60年代,它是一种能更好地模仿人类智能的、非传统的控制方法。它突破了传统的控制中对象有明确的数学描述和控制目标是可以数量化的限制。它所采用的理论方法主要来自自动控制理论、人工智能、模糊集和神经网络以及运筹学等学科分支。主要代表人物有美国扎德(L. A. Zadeh)教授,他于1965年创立了模糊集合论,为

解决复杂系统的控制提供了新的数学工具。1968年,美籍华人傅京孙(K. S. Fu)教授和桑托斯(E. S. Saridis)等人提出用模糊神经元概念研究复杂大系统行为,正式提出了智能控制就是人工智能技术与控制理论的交叉,并创立了人-机交互式分级递阶智能控制的系统结构。

面临21世纪,随着经济和科学技术的迅猛发展,控制理论与许多学科相互交叉、渗透融合的趋势在进一步加强,控制理论的应用范围在不断扩大,控制理论在认识事物运动的客观规律和改造世界中将得到进一步的发展和完善。

0.2 现代控制理论的主要内容

现代控制理论主要包括如下五个分支。

1. 线性系统理论

线性系统理论是现代控制理论的基础,也是现代控制理论中理论最完善、技术上较成熟、应用也最广泛的部分。它主要研究线性系统在输入作用下状态运动过程的规律和改变这些规律的可能性与措施;建立和揭示系统的结构性质、动态行为和性能之间的关系。线性系统理论主要包括系统的状态空间描述、能控性、能观测性和稳定性分析,状态反馈、状态观测器及补偿的理论和设计方法等内容。

2. 建模和系统辨识

建立动态系统在状态空间的模型,使其能正确反映系统输入、输出之间的基本关系,是对系统进行分析 and 控制的出发点。由于系统比较复杂,往往不能通过解析的方法直接建模,而主要是在系统输入输出的试验数据或运行数据的基础上,从一类给定的模型中确定一个与被研究系统本质特征等价的模型。如果模型的结构已经确定,只需确定其参数,就是参数估计问题。若模型的结构和参数需同时确定,就是系统辨识问题。

3. 最优滤波理论

最优滤波理论亦称为最佳估计理论。当系统受到环境噪声或负载干扰时,其不确定性可以用概率和统计的方法进行描述和处理。也就是在系统数学模型已经建立的基础上,利用被噪声等污染的系统输入输出的量测数据,通过统计方法获得有用信号的最优估计。经典的维纳滤波理论阐述的是对平稳随机过程按均方意义的最佳滤波,而现代的卡尔曼滤波理论用状态空间法设计最佳滤波器,克服了前者的局限性,适用于非平稳过程并在很多领域中得到广泛应用,成为现代控制理论的基石。

4. 最优控制

最优控制是在给定限制条件和性能指标(即评价函数或目标函数)下,寻找使系统性能在一定意义下为最优的控制规律。所谓“限制条件”,即约束条件,指的是物理上对系统所施加的一些约束;而“性能指标”,则是为评价系统在全工作过程中的优劣所规定的标准;所寻求的控制规律就是综合出的最佳控制器。在解决最优控制问题中,除了庞特里亚

金的极大值原理和贝尔曼的动态规划法是最重要的两种方法外,用各种“广义”梯度描述的优化算法,以及动态规划的哈密顿-雅可比-贝尔曼(Hamilton-Jacobi-Bellman)方程求解的新方法正在形成并用于非线性系统的优化控制。

5. 自适应控制

所谓自适应控制,是随时辨识系统的数学模型并按照当前的模型去修改最优控制律。当被控对象的内部结构和参数以及外部的环境特性和扰动存在不确定时,系统自身能在线量测和处理有关信息,在线相应地修改控制器的结构和参数,以保持系统所要求的最佳性能。自适应控制的两大基本类型是模型参考自适应和自校正控制。近期自适应理论的发展包括广义预测控制、万用镇定器机理、鲁棒稳定的自适应系统以及引入了人工智能技术的自适应控制等。

0.3 本书的内容和特点

与其它控制理论一样,现代控制理论研究的问题与人类有目的的活动密切相关,它不但要认识事物运动的客观规律,而且要将之用于改造世界。现代控制理论所包含的内容很多,范围也很广,而且与控制理论其它分支的交叉融合越来越强。根据教学大纲的要求,本书只重点介绍现代控制理论的一些最基本的内容和方法,为本书读者的后续课程以及日后深入学习其它相关内容打好基础。

本课程是自动化专业的一门专业基础课,编写本书时,按照“学时少、内容新、水平高、效果好”的原则,在不破坏理论的严谨性和系统性的前提下,不刻意追求定理证明中数学上的严密性,而是突出物理概念,理论阐述力求严谨、实用、简练和易懂。每一个理论点都附有相应的例题和习题,以便读者掌握基本概念和基本方法并便于自学。本教材使用适合40学时,其中课堂讲授34学时,实验6学时。全书内容共分五章,教材结构贯穿一条主线,即控制系统的状态空间描述(数学模型)→能控性、能观测性和稳定性(基本性质分析)→状态反馈与状态观测器设计(系统的综合与设计)。力求使学生由浅入深、抓住重点,对现代控制理论基础有较全面和较深入的理解。

本书将“离散系统的状态空间表达式”和“离散时间系统状态方程的解”分别置于第一章和第二章,目的在于各章内容连贯,读者易于理解和自学。在第二章中,以线性定常状态方程的解作为重点和先讲内容,线性时变系统状态方程的解后讲,从学生思维上看易于接受。而在第三章中,将时变系统的能控性、能观测性放在先,定常系统的能控性、能观测性放在后,则有利于学生对定常系统的理解,也便于讲授。考虑到在后续课程中重点介绍有关多变量系统解耦的内容,本书删去了通常“现代控制理论”教材中有关状态解耦的内容。

本书是编者在多年教学实践的基础上,根据新的教学大纲和教学计划编写的。在内容选择、学时分配、难点散布、详略安排、例题习题选编等方面,都经过了长期的教学实践过程中的不断修改和完善。相信本书将能够较好地适应地方工科院校面向21世纪教学的需要。

第一章 控制系统的状态空间描述

在经典控制理论中,通常采用微分方程或传递函数作为描述系统动态特性的数学模型,这两种模型表达了系统的输入量和输出量之间的关系。但它描述的只是系统的外部特性,而不能反映系统内部各物理量的变化。此外,传递函数描述又仅仅考虑零初始条件,而不足以揭示出系统的全部特征。

在现代控制理论中,通常采用状态空间表达式作为系统的数学模型,用时域分析法分析和研究系统的动态特性。状态空间表达式是一阶矩阵——向量微分方程组,它描述了系统的输入、输出与内部状态之间的关系,揭示了系统内部状态的运动规律,反映了控制系统动态特性的全部信息。同时采用矩阵表示方法可使系统的数学表达式简洁明了,易于计算机求解,也为多输入多输出及时变系统的分析研究提供了有力的工具。

1.1 控制系统中状态的基本概念

1. 系统的状态和状态变量

控制系统的状态是指能完全描述系统时域行为的一个最小变量组。所谓完全描述,指的是当给定了这个最小变量组在初始时刻 $t=t_0$ 的值和 $t \geq t_0$ 时刻系统的输入函数,那么系统在 $t \geq t_0$ 任何时刻的行为就可以完全确定。

必须指出,系统在 $t(t \geq t_0)$ 时刻的状态是由 t_0 时刻的系统状态(初始状态)和 $t \geq t_0$ 时的输入唯一确定的,而与 t_0 时刻以前的状态和输入无关。

状态变量是构成系统状态的变量,是指能完全描述系统行为的最小变量组中的每一个变量。例如,如果完全描述控制系统的最小变量组为 n 个变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, 那么这个系统就具有 n 个状态变量 $x_i(t) (i=1, 2, \dots, n)$ 。

应该注意,系统状态变量并非一定是系统的输出变量,也不一定是在物理上可测量的或可观测的。但在实际应用时,状态变量通常还是选择容易测量的量。

2. 状态向量

设系统的状态变量为 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, 那么用它们作为分量所构成的向量,就称为状态向量,记作

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

3. 状态空间

以状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为坐标轴构成的 n 维空间称为状态空间。

状态空间中的每一个点,对应于系统的某一特定状态。反过来,系统在任何时刻的状态,都可以用状态空间中的一个点来表示。如果给定了初始时刻 t_0 的状态 $x(t_0)$ 和 $t \geq t_0$ 时的输入函数,随着时间的推移, $x(t)$ 将在状态空间中描绘出一条轨迹,称为状态轨迹。

1.2 控制系统的状态空间表达式

1.2.1 状态空间表达式

设系统的 r 个输入变量为 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$; m 个输出变量为 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$; 系统的状态变量为 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 。

把系统的状态变量与输入变量之间的关系用一组一阶微分方程来描述,称之为系统的状态方程,即

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= \dot{x}_1(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t] \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \dot{x}_2(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t] \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= \dot{x}_n(t) = f_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t]\end{aligned}$$

用向量矩阵表示,得到一个一阶向量矩阵微分方程

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (1-1)$$

式中 $x(t)$ ——系统的 n 维状态向量;

$u(t)$ ——系统的 r 维输入(控制)向量;

$f[\cdot]$ —— n 维向量函数,

$$f[\cdot] = [f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_n(\cdot)]^T$$

系统输出变量与状态变量、输入变量之间的数学表达式称为系统的输出方程,即

$$\begin{aligned}y_1(t) &= g_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t] \\ y_2(t) &= g_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t] \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t]\end{aligned}$$

用向量矩阵方程表示为

$$y(t) = g[x(t), u(t), t] \quad (1-2)$$

式中 $y(t)$ ——系统的 m 维输出向量;

$g[\cdot]$ —— m 维向量函数,

$$g[\cdot] = [g_1(\cdot), g_2(\cdot), \dots, g_m(\cdot)]^T$$

描述系统输入变量、状态变量和输出变量之间关系的状态方程和输出方程总合起来,构成对系统动态行为的完整描述,称为系统的状态空间表达式。

例 1-1 对于如图 1-1 所示的 RLC 电路,试列写以 $u(t)$ 为输入, $u_c(t)$ 为输出的状态空间表达式。

解 系统有两个独立的储能元件,即电容 C 和电感 L ,有两个状态变量,选取电容电

压 $u_C(t)$ 和电感电流 $i_L(t)$ 作为状态变量。根据电路原理, 有下列微分方程组

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) + u_C(t) = u(t)$$

$$C \frac{du_C(t)}{dt} = i_L(t)$$

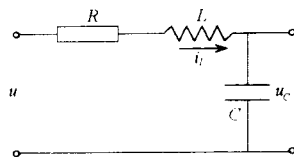


图 1-1 RLC 电路

令 $x_1(t) = i_L(t)$, $x_2(t) = u_C(t)$, 写成一阶矩阵微分方程形式, 则状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (1-3)$$

系统的输出方程

$$y(t) = u_C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

式(1-3)和式(1-4)可写成

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (1-5)$$

式中

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式(1-5)为 RLC 系统的状态空间表达式。

若取电感电流 $i_L(t)$ 和电容电荷 $q_C(t)$ 作为状态变量, 则有微分方程组

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) + \frac{1}{C} q_C(t) = u(t)$$

$$\frac{dq_C(t)}{dt} = i_L(t)$$

令 $\tilde{x}_1(t) = i_L(t)$, $\tilde{x}_2(t) = q_C(t)$, 则状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

输出方程

$$y = u_C(t) = \frac{1}{C} q_C(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

式中

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix}$$

以上例子表明,系统状态变量的选取是不唯一的,对同一个系统可选取不同组的状态变量,但不管如何选择,状态变量的个数是唯一的,必须等于系统的阶数,即系统中独立储能元件的个数。

1.2.2 状态空间表达式的一般形式

对于具有 r 个输入, m 个输出, n 个状态变量的系统,不管系统是线性、非线性,时变的还是定常的,其状态空间表达式的一般形式为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \\ y(t) = g[x(t), u(t), t] \end{cases} \quad (1-6)$$

式中 $x(t)$ —— $n \times 1$ 状态向量,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \text{或 } x \in R^n$$

$u(t)$ —— $r \times 1$ 输入(控制)向量,

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}, \quad \text{或 } u \in R^r$$

$y(t)$ —— $m \times 1$ 输出向量,

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad \text{或 } y \in R^m$$

f —— $n \times 1$ 函数阵,

$$f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$$

g —— $m \times 1$ 函数阵,

$$g = [g_1, g_2, \dots, g_m]^T$$

若按线性、非线性,时变和定常划分,系统可分为非线性时变系统、非线性定常系统、线性时变系统和线性定常系统。

1. 非线性时变系统

对于非线性时变系统,向量函数 f 和 g 的各元

$$f_i[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$g_j[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t], \quad j = 1, 2, \dots, m$$

是状态变量和输入变量的非线性时变函数,表示系统参数随时间变化,状态方程和输出方程是非线性时变函数。状态空间表达式只能用式(1-6)表示,即

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \\ y(t) = g[x(t), u(t), t] \end{cases}$$

2. 非线性定常系统

非线性定常系统中, 向量函数 f 和 g 不依赖于时间变量 t , 因此, 状态空间表达式可写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \end{cases} \quad (1-7)$$

3. 线性时变系统

线性时变系统中, 向量函数 f 和 g 中的各元是 $x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t$ 的线性函数。根据线性系统的叠加原理, 并考虑到系统的时变性, 状态方程和输出方程可写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_{11}(t)u_1 + b_{12}(t)u_2 + \dots + b_{1r}(t)u_r \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_{21}(t)u_1 + b_{22}(t)u_2 + \dots + b_{2r}(t)u_r \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_{n1}(t)u_1 + b_{n2}(t)u_2 + \dots + b_{nr}(t)u_r \end{cases} \quad (1-8)$$

$$\begin{cases} y_1(t) = c_{11}(t)x_1 + c_{12}(t)x_2 + \dots + c_{1n}(t)x_n + d_{11}(t)u_1 + d_{12}(t)u_2 + \dots + d_{1r}(t)u_r \\ y_2(t) = c_{21}(t)x_1 + c_{22}(t)x_2 + \dots + c_{2n}(t)x_n + d_{21}(t)u_1 + d_{22}(t)u_2 + \dots + d_{2r}(t)u_r \\ \vdots \\ y_m(t) = c_{m1}(t)x_1 + c_{m2}(t)x_2 + \dots + c_{mn}(t)x_n + d_{m1}(t)u_1 + d_{m2}(t)u_2 + \dots + d_{mr}(t)u_r \end{cases} \quad (1-9)$$

将上两式用矩阵方程的形式表示, 可得出线性时变系统的状态空间表达式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1-10)$$

式中 $\mathbf{A}(t)$ —— $n \times n$ 系统矩阵,

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}(t)$ —— $n \times r$ 输入矩阵,

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \dots & b_{1r}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \dots & b_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \dots & b_{nr}(t) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C}(t)$ —— $m \times n$ 输出矩阵,

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \dots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(t) & c_{m2}(t) & \dots & c_{mn}(t) \end{bmatrix}$$