线性与非线性规划引论

[美] D. G. 鲁恩伯杰 著

科学出版社

线性与非线性规划引论

〔美〕D. G. 鲁恩伯杰 著

夏尊铨 等 译

科 学 出 版 社

1 9 8 0

内 容 简 介

本书是关于最优化技术中的一个主要领域“线性规划与非线性规划”的一本入门书．全书共分为三个部分：第一部分论述了线性规划的基础理论以及较为有效的数值方法；第二部分论述了无约束最优化的理论、优化条件以及基本算法；第三部分论述了约束最优化的问题．著者力图使所论述的内容能反映出该领域中基础方面的最新趋向．

本书适于系统分析、运筹学、数值分析、管理科学以及有关的工程科学的研究人员、研究生，高等学校的教师和高年级的大学生参考或自学．

D. G. Luenberger
INTRODUCTION TO LINEAR AND NONLINEAR PROGRAMMING
Addison-Wesley Publishing Company
1973

线性与非线性规划引论
〔美〕D. G. 鲁恩伯杰 著
夏尊铨 等 译
*
科学出版社出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1980年 8月第 一 版 开本：787×1092 1/32
1980年 8月第一次印刷 印张：13 3/4
印数：0001—6,950 字数：313,000

统一书号：13031・1254
本社书号：1747・13—1

定价： 2.10 元

序　言

本书在介绍实用最优化技术的一个广阔领域方面是一本入门书．它既适合于专业人员自学，也适合作为在工程、数学或科学研究方面具有专业基础知识的大学生或研究生的课堂教材．四年来，在本书形成的不同阶段，在 Stanford 大学，它一直是若干最优化课程的基础．正如最优化领域本身要涉及到许多经典学科一样——尤其是在最优化的重点在于获得实际问题的解的今天——本书无论对于系统分析学家、运筹学家、数值分析学家、管理科学家，以及对于那些在最优化得到实际应用的许多学科中的专家们，都会是很有用的．要能顺利地阅读本书的先决条件并不太高，主要应熟悉线性代数的初等部分．书中的某些章节和论述，的确要用到一些较高深的线性代数概念，例如特征矢量分析或实数集的某些基础知识，但是本书是按这样的原则来编写的，就是在尽可能不依靠上述这些较高深的基础材料的情形下很忠实地把各章的主要内容表达出来．

虽然本书就其水平和涉及的范围来说是一本入门书，但同时又企图反映这个领域的基础研究方面的最新成果．这一点是有特殊意义的，因为最近几年这些基础的确引人注目地改变了．因此，这个领域中最近所进行的大量工作不是放在研究高深而复杂的技术方面，而是放在初步研究这个领域的基础理论的主要骨架方面．这种新的工作标志着，这个领域已从收集孤立的理论结果和直观手段转入到具有坚实基础的用理论来指导技术改进的学科．过去，大多数的最优化理论

集中于研究最优条件的课题上，而把实际的计算方法作为多少带有非理论性的附属内容附加到理论的主题上．按照新的做法，理论和实际能更好地结合，它们之间能相互促进．

理论和实际之间的主要联系是收敛性分析——分析具体的迭代求解技术是怎样产生收敛于某一问题的解的点列．过去，收敛性分析就像进行这种分析时所用于计算方法的附属内容一样，充其量不过是被作为一系列的公式，而这些公式同具体的求解技术的关系要比它同问题的解释的关系更密切一些，但没有什么系统性．令人惊奇的是，现在发现收敛性理论不仅比原先所猜测的更有系统，而且还有助于为这个领域提供统一的结构．实质上，我们已经懂得研究一个问题的各种不同求解技术的共性，是探究这个问题本身的基本特征的最有效途径之一．

本书的材料由三个独立部分组成．第一部分是线性规划的一个较为完备的引论，是最优化理论的基本部分．这部分叙述非常一般，其中包括线性规划的基础理论和许多最有效的数值计算法的主要核心，但不包括线性规划的那些专门领域，如依赖于特殊结构性质的网流或输送理论．第二部分和第一部分是没有联系的，主要介绍无约束的最优化理论，其中包括适当的最优条件的推导和基本算法的介绍．这一部分研究算法的一般性质，并定义收敛性的各种不同的概念．第三部分是把第二部分中所阐述的概念推广到约束最优化的问题中．除少数的孤立章节外，这部分也和第一部分没有多大的联系．读者完全可以略去第一部分，而直接去阅读第二部分和第三部分．事实上，本书已按照这种方式在 Stanford 大学用过多遍．本书每个部分所包含的材料都足够一学期（对于每学年分为四个学期的学制而言）之用．不论是在课堂教学中还是在自学中，重要的是读者不应忽视每章末尾所附的习

题. 在所选的习题中基本上都包括有以下三种性质的题目：一种是为了检验读者对具体算法的理解程度的各种算题；一种是为了检验读者对某一理论的推导论证的理解程度而设计的各种理论题；一种是为了能把本章的内容推广到新的领域中的各种理论题. 读者至少要力争在每章的习题中做四或五个. 阅读本书时，不必从头到尾一页一页地通读，可以有选择地跳读. 为了方便于这种类型的读者，书中以星号*表示出专门的或特殊的章节.

如果没有一些人和团体的帮助，本书的完成是不可能的. 我在同 Adam Shefi 一起工作期间对线性规划的理解有了很大提高. 他的某些成果已编入本书的第五章. 在本书的写作过程中，Shmuel Oren，Daniel Gabay，Tsuguhiko Tanahashi 及 Verne Chant 等人紧密地同我配合，他们的每一建议和意见都是本书不可缺少的部分. Harvey Greenberg，Arthur Geoffrion 和 Dimitri Bertsekas 等人都对本书的手稿提出许多宝贵的建议，这些建议已纳入最后的稿本中. Stanford 大学工程经济系，为完成本书提供了方便条件并给以许多资助. 特在此对他们表示感谢. 本书的完成亦得到了国家科学基金会的支持. 我还要对 Elaine Christensen 表示特别的感谢，感谢他不倦地打印了本书的若干草稿. 最后，正如这种类型的大多数教本那样，应非常感谢许多大学生，他们耐心地并不计较由于不断修改手稿所带来的困难，为本书的圆满完成而作出了贡献.

D. G. L.

于华盛顿

1972 年 8 月

目　录

部分 I　线性规划

部分 II 无约束问题

部分III 约束极小

第一章 引 言

1.1 最 优 化

最优化的概念，现时已作为分析许多复杂决策或分配问题时所依据的一个原则而牢固地确立起来．它能在一定程度上使得论证得到无可争议的完善化，并常常给运筹以某种必要的简化．利用这种最优化的原理，人们只要把注意力集中于一个使性能数量化并能度量决策特性的单一目标上，就能解决涉及到需要对很多有内在联系的变量进行选值的复杂决策问题．在限制决策变量取值范围的约束下，我们就能使这样一个目标函数取得极大值(或极小值，取决于其数学描述)．如果能把问题的一个适当的单一方面分离出来，并用一个目标函数来表示的话，那么不论是对于一笔生意的盈亏，还是对于一个物理问题中的速度或距离，不论是对于在冒险投资时所期望的利润，还是对于政府计划中的社会福利，最优化都可以提供一个适当的分析结构．

当然，在处理一个复杂的决策问题时，要能把所有参数的内在联系、约束条件以及相应的目标的复杂情况完全表示出来，那是少有的．因此，如同所有的定量分析技术一样，一个具体的最优化数学描述只能看作是一种近似的描述．为了得到有意义的结论，就需要有模拟技巧(亦即能抓住问题主要因素)以及在解释所得结果时作出正确的判断．因此，应当把最优化看作是使问题抽象化和分析问题的一种工具，而不应当看作是能在推理上得出准确解答的原则．

关于问题的数学描述以及对于结果的解释方面的技巧和正确判断，将通过具体的实践和对有关理论的透彻理解来得到提高. 问题的数学描述本身通常需要在两个相互矛盾的目标之间进行选择，这两个目标是：一方面希望建立一个很复杂的数学模型，以便能准确地把问题描述出来；另一方面又希望建立一个容易处理的数学模型. 富有建立模型经验的人是善于处理这两个方面的. 有志于成为有这样经验的人，主要应通过实例和经验学会辨别并抓住问题的要点，他必须通过对现有方法和理论的学习以及通过训练成具有能把现有的理论推广到新情况的这种能力，来学会区别容易处理的和不容易处理的模型.

本书是围绕着一种最优化结构（即能表现出线性规划和非线性规划的特点的一种最优化结构）来写的. 导出这种结构的各种情况的实例在全书的很多章节里都可见到，而且这些实例将有助于说明通常是怎样把实际问题有效地转化为这种形式. 不过，本书所涉及的，主要是建立、分析和对比用以求解一般的优化子类问题的算法. 这一点不仅对于这些算法本身是很有用的，因为它有助于人们去解决一定的问题，而且这一点所以很有用，还因为把它们能最有效地求解的各种结构鉴别出来，能够提高人们将问题加以数学化的能力.

1.2 问题的类型

本书内容分为三个主要部分：线性规划，无约束问题以及约束问题. 后两部分合在一起构成非线性规划这个分支.

线性规划

对于经过适当的努力就能使一类广泛的问题数学化这一

点来说，线性规划无疑是最自然的方法．顾名思义，线性规划问题是以未知量的线性函数为特征的，即目标函数是未知量的线性函数，且约束条件是未知量的线性等式或线性不等式．熟悉线性数学的其它分支的人最初可能以为，线性规划的数学描述之所以流行，是因为线性问题同非线性问题相比较，其相应的数学是精确的，理论是丰富的，而且计算简单，但事实上这些都不是主要的原因．从数学和计算性质的角度看，除线性规划之外，仍有很多类型的最优化问题也具有成熟的理论和有效的求解算法．看来，线性规划之所以流行主要是在于数学描述的分析方面，而不是在于解法方面，这是它的优点所在．举一个具体的例子来说，在实际中所出现的大量约束和目标函数，无可争辩地是线性的．例如，如果我们描述一个预算的约束问题，即将钱总数限于分配给两种不同商品，那末预算约束所取的形式是 $x_1+x_2\leqslant B$，其中 x_i，$i=1,2$，是 i 种商品所分配到的钱数，B 是预算．类似地，若目标函数是最大重量，则它就可表示为 $w_1x_1+w_2x_2$，其中 w_i，$i=1,2$，为商品 i 的单位重量．于是，总的问题表示为

$$\begin{aligned}\max\quad & w_1x_1+w_2x_2\\ \text{s. t.}^{1)}\quad & x_1+x_2\leqslant B\\ & x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

这是一个简单的线性规划．在这种情形下预算约束的线性是极为自然的，它并没有简单地表达为比较一般的函数形式的一个近似．

线性形式的约束条件和目标函数，在问题的数学描述中如此流行的另一个理由，是因为在确定它们时往往碰到的困难最少．这样，即使一个目标函数按其固有的定义（如上面的

1）s. t. 是“subject to”的缩写，汉义为“约束条件”或“受约束于”，下同．——译者

例子)并不纯粹为线性函数,但把它作为线性函数来确定往往远比用别的函数形式来确定容易得多,虽然事实上的确使人相信那种较复杂的形式就是最好的可能选择.因此,由于它的简单这一特点,常常把线性选择作为容易的途径,或者当寻找一般性时,把它选作将同样适用(或同样不适用)于一类相似问题的唯一函数形式.

当然,对于线性规划问题的理论和计算方面,确实带有某种特殊的特点——最有效的研究成果就是单纯形法.这种算法将在第二、三章里进行论述,并占用论述线性规划内容的大部分.

无约束问题

无约束最优化问题由于如此缺乏结构上的特点,以致似乎不可能把它们当作有意义问题的有用模型来用.然而由于两个理由,实际情况完全不是这样.第一个理由是,如果一个问题的范围扩大到研究全部有关的决策变量,那么很可能是无约束的,或者换句话说,约束代表人为的范围限制,而当范围扩大时这种约束就可能消失.例如可以证明,预算约束并非表示有实际意义问题的数学描述的特征,因为通过以某一利率的借款,获得附加资金总是可能的,从而并不是引入一个预算约束,而是应该把反映资金费用的一个项并入目标函数中去.类似的讨论,也适用于描述具有能以某种代价(不管多大)得到补充的其它来源的约束.

许多重要的问题可以看作是无约束问题的第二个理由是:有约束的问题有时容易转化为无约束的问题.例如等式约束的唯一作用只是限制自由度,实质上是把某些变量作为另一些变量的函数.它们的依赖关系有时能够显式地表示出来,于是一个变量个数等于其真正自由度的新问题就可以确

定下来。例如，形如 $x_1 + x_2 = B$ 的一个约束，可以处处通过代换 $x_2 = B - x_1$ 把它消去，x_2 的地方均用上式替换。

除了描述重要的一类实际问题外，无约束问题的研究，当然会为研究约束问题的更一般情形提供一个台阶。在进入研究有约束的情形之前，很自然地，要先在无约束的情形下，对理论和算法的很多方面进行推导和验证。

约束问题

虽然做了如上一些论述，但实际中所遇到的许多问题都是用有约束的问题来描述的。这是由于在绝大多数情形下，对一个复杂的问题，例如一个大公司的详细生产规划，一个大的政府机关制定计划，乃至设计一个复杂的设备，不可能直接地全面地进行所有可能选择的计算，而是必须把这些大问题分成独立的子问题来处理，这每个子问题都具有限制其范围的约束。于是在制定计划的问题中，通常加上预算约束，以便把那个问题从更完整的问题中分离出来。因此，常常会遇到一般的非线性有约束的数学规划问题。

一般的数学规划问题可以叙述为

$$\begin{aligned}
&\min\ f(\mathbf{x})\\
&\text{s. t.}\ h_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, m\\
&\qquad g_j(\mathbf{x}) \leqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, r\\
&\qquad \mathbf{x} \in S
\end{aligned}$$

式中 $\mathbf{x}$ 为 n 维未知矢量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，而 f, h_i, $i = 1, 2, \cdots, m$ 以及 g_j, $j = 1, 2, \cdots, r$ 为变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的实值函数。集合 S 为 n 维空间的一个子集。函数 f 是问题的目标函数，而等式、不等式及对集合的限制都是约束。

在本书中，通常引入了一些附加的假定，以便使得问题在某种适当的意义下变得光滑些。例如，通常要求问题中的函

数是连续的，或多半是要求具有连续的导数，这就保证了 $\mathbf{x}$ 的一个很小的变化能导致与这个问题有关的其它值的很小变化。另外，不允许集合 S 是任意的，但通常要求它是 n 维空间中的一个连通区域，而不是象离散的孤立点集这样的集合，这就能够保证 $\mathbf{x}$ 不致发生很大的变化。事实上，在所处理的大多数问题中，集合 S 均取为整个空间；这样一来，集合的限制也就不存在了。

由于这些光滑性的假定，我们也可以把本书中所论述的问题称为连续变量规划，因为我们通常所讨论的多半是其所有的变量及函数值能够连续变化的问题。事实上，这个假定构成了所要讨论的许多算法的基础，这些算法本质上是通过使未知矢量 $\mathbf{x}$ 作一系列的小的变化来实现的。

1.3 问题的大小分类

衡量规划问题的复杂程度的一个明显尺度，就是未知量的个数或约束条件的个数。如同所料，能够有效求解的问题大小已随着计算技术和理论的进展而逐渐增大。根据目前的计算能力，把问题划分为以下三种类型是合理的：具有大约五个或不到五个变量和约束的小型问题；具有从大约五个到一百个变量和约束的中型问题；具有一千个变量和约束量级的大型问题。尽管这种分类并不是十分严格的，但它至少不仅大致反映出问题规模，而且反映了伴随各种不同规模问题而产生的方法上的基本差异。

许多与最优化有关的早期理论，特别是在非线性规划方面，都是针对着获得解点所要满足的充要条件，而不是针对着计算问题。这种理论主要涉及到 Lagrange 乘子的研究，它包括 Kuhn-Tucher 定理及其推广。它极大地增强人们对于约