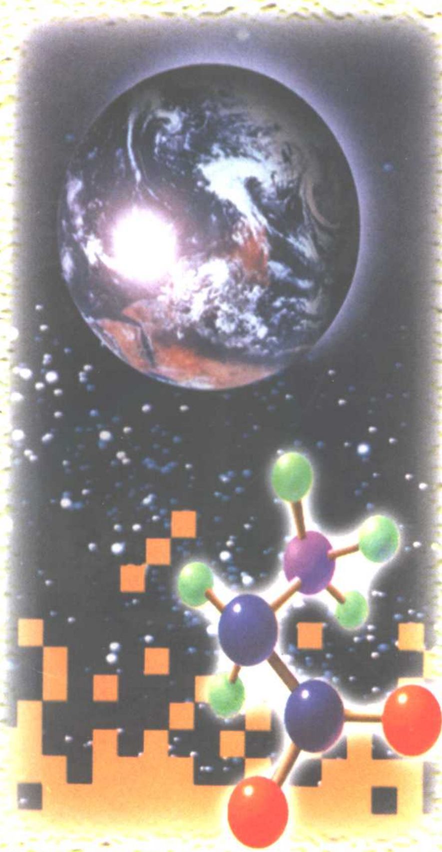


中国科学院研究生教学丛书

测度论讲义

严加安 著

科学出版社

内 容 简 介

本书系统介绍了一般可测空间上的测度与积分，Hausdorff 空间上的测度与积分以及测度的弱收敛和淡收敛．此外，书中还介绍了与测度论有关的概率论基础知识，如条件数学期望，正则条件概率，一致可积性，解析集及经典鞅论．

本书可作为概率统计专业及其它数学专业的研究生教材，也可作为概率论研究工作者的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

测度论讲义/严加安著．—北京：科学出版社，1998

（中国科学院研究生教学丛书/路甬祥主编）

ISBN 7-03-006680-4

Ⅰ．测… Ⅱ．严… Ⅲ．测度论 Ⅳ．O174．12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 08059 号

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

科 地 亚 印 刷 厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1998 年 10 月第 一 版	开本：850×1168 1/32
1998 年 10 月第一次印刷	印张：7 1/4
印数：1 —2200	字数：185 000

定价：15.00 元

（如有缺页倒装，本社负责掉换。〈新欣〉）

序

在21世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了.相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用.

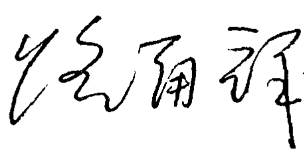
21世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济和社会发展的首要推动力量. 世界各国之间综合国力的竞争，实质上是科技实力的竞争. 而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科学人才的数量和质量. 我国要想在21世纪顺利地实施“科教兴国”和“可持续发展”战略，实现小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成中等发达国家，关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理，有能力参与国际竞争与合作的科技大军. 这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务.

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期坚持走科研与教育相结合的道路，发挥了高级科技专家多，科研条件好，科研水平高的优势，结合科研工作，积极培养研究生；在出成果的同时，为国家培养了数以万计的研究生. 当前，中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好“三个基地”的指示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高级人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业

发展重任的同时，为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才.

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务. 研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要的基础性工作. 由于各种原因，目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展. 为了改变这种情况，中国科学院组织了一批在科学前沿工作，同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材，并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版. 希望通过数年努力，出版一套面向 21 世纪科技发展，体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书. 本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性，同时也兼顾前沿性，使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识，也能被引导进入当代科学研究的前沿. 这套研究生教学丛书，不仅适合于在校研究生学习使用，也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书.

“桃李不言，下自成蹊.”我相信，通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘，《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花，也将似润物春雨，滋养莘莘学子的心田，把它们引向科学的殿堂，不仅为科学院，也为全国研究生教育的发展作出重要贡献.



前　言

测度论是现代数学的一个重要分支，它的主要奠基人是法国数学家 Lebesgue(1875—1941). 受他的老师 Borel 关于容量研究的深刻影响，他在 1902 年的论文 ≪积分、长度与面积≫ 中，首次把 $\mathbb{R}^2$ 中的长度和面积概念推广为一般 Borel 集的 Lebesgue 测度，并定义了可测函数关于 Lebesgue 测度的积分. 他用累次积分计算重积分的结果后来被 Fubini(1907) 完善为一般的定理. Radon(1913) 进一步研究了 $\mathbb{R}^d$ 中在紧集上为有穷的一般 Borel 测度 (Radon 测度). 抽象可测空间上的测度和符号测度概念是 Fréchet(1915) 最先提出的. Radon-Nikodym(1930) 给出了符号测度为一不定积分的充要条件 (Radon-Nikodym 定理). 在早期的测度论发展史中，积分概念的两个推广值得一提. 其一是 Daniell(1918) 从一类函数上的正线性泛函出发研究了测度和积分；其二是 Bochner(1933) 和 Pettis(1938) 定义了 Banach 空间值函数关于测度的积分. 到本世纪 30 年代，测度与积分理论已趋于成熟，并在概率论、泛函分析和调和分析中得到广泛应用. 例如，Kolmogorov(1933) 从测度论观点出发创立了概率公理化体系，为现代概率论奠定了数学基础. 其中非常重要的条件数学期望概念就源于测度论中的 Radon-Nikodym 定理. 随着时间的推移，测度论在数学中的基础性地位愈来愈显示出来. 50 年代以后发展起来的无穷维空间中的测度和泛函积分成了研究量子物理的重要手段和工具.

本书是为概率统计专业和其它数学专业的研究生编写的一部测度论教材，它的前身是作者的 ≪测度与积分≫(陕西师大出版社，1988). 这里改正了原书中出现的错误，并对原书的第五章作了较大修改，还在第三章、第六章及第七章中增加了若干新的内

容. 全书内容分为三个部分: (1) 一至四章介绍一般可测空间中的测度与积分. 这一部分内容与通常测度论教材大体相当, 但第三章中的 Daniell 积分、Bochner 积分和 Pettis 积分以及第四章中的 Tulcea 定理在通常测度论教材中是不易找到的. (2) 第五章系统、完整地介绍了 Hausdorff 空间中的测度和积分. 这一部分内容对初学者有一定难度, 教师在讲授时可以跳过它. (3) 第六章介绍有关测度的弱收敛和淡收敛的主要结果; 第七章介绍与测度论有关的概率论基础知识, 如条件数学期望, 正则条件概率, 一致可积性, 本性上确界, 解析集及经典鞅论等. 这一部分内容是专门为概率统计专业的研究生设计的, 在对其它数学专业的研究生讲授时可以略去. 本书几乎每一节都附有一定数量的习题, 其中不少是对正文的补充, 有些习题还在一些定理的证明中被引用.

本书的写作和出版分别得到了中国国家自然科学基金 (项目编号 79790130) 和中国科学院研究生教材出版基金的资助, 特此表示感谢.

严加安

1997 年 8 月于北京

目　录

第一章 集类与测度

§1 集合运算与集类

集合是现代数学的最基本的概念之一. 任何一组彼此可以区别的事物便构成一个集合. 在测度论中, 我们通常在某一 (或某些) 给定的集合 (称为 **空间**) 中讨论问题.

1.1 令 Ω 为一给定的非空集合, 其元素以 ω 记之. 设 A 为 Ω 的子集, 我们用 $\omega \in A$ 或 $\omega \notin A$ 分别表示 ω 属于 A 或不属于 A. 不含任何元素的集称为 **空集**, 以 $\emptyset$ 记之. 我们用 $A \supset B$ 或 $B \subset A$ 表示 B 是 A 的子集, 用

$$A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B,\ A \triangle B$$

分别表示 A 与 B 的 **交**、**并**、**差** 和 **对称差**, 即

$$A \cap B = \{\omega:\ \omega \in A \text{ 且} \omega \in B\},\ A \cup B = \{\omega:\ \omega \in A \text{ 或} \omega \in B\},$$
$$A \setminus B = \{\omega:\ \omega \in A \text{ 且} \omega \notin B\},\ A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

我们用 A^c 表示 $\Omega \setminus A$, 并称 A^c 为 A(在 Ω 中) 的 **余集**, 于是有 $A \setminus B = A \cap B^c$. 有时也用 AB 表示 $A \cap B$. 若 $A \cap B = \emptyset$, 称 A 与 B **互不相交**. 显然有 $A \cap A^c = \emptyset, A \cup A^c = \Omega$.

1.2 集合交和并运算满足如下的 **交换律**、**分配律及结合律**:

$$\begin{aligned}
&A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A;\\
&(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),\\
&(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);\\
&(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).
\end{aligned}$$

此外, 它们关于余集运算有如下的 **de Morgan 公式**:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c,\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c,\ (A^c)^c = A.$$

1.3 以 Ω 的某些子集为元素的集合称为 (Ω 上的)**集类**. 今后，如无特别说明，总假定集类是非空的，即至少含一个元素 (可以是空集). 设 $\{A_i,\ i\in I\}$ 为一集类，其中 I 为 **指标集**, 它用以给集类元素 "编号", 则可如下定义集类中元素的交与并:

$$\bigcap_{i\in I} A_i=\{\omega:\ \omega\in A_i,\ \text{对一切}\, i\in I\},$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i=\{\omega:\ \omega\in A_i,\ \text{对某一}\, i\in I\}.$$

我们有相应的交换律、分配律、结合律及 de Morgan 公式.

1.4 设 $\{A_n,\ n\geq 1\}$ 为一集合序列. 若对每个 n, 有 $A_n\subset A_{n+1}$ (相应地，$A_n\supset A_{n+1}$), 则称 (A_n) 为 **单调增**(相应地，**单调降**). 二者统称为 **单调列**. 对单调增或单调降序列 (A_n), 我们分别令 $A=\bigcup_n A_n$ 或 $A=\bigcap_n A_n$, 称 A 为 (A_n) 的 **极限**, 通常记为 $A_n\uparrow A$ 或 $A_n\downarrow A$. 一般地，对任一集列 (A_n), 令

$$\limsup_{n\to\infty} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,\quad \liminf_{n\to\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

分别称其为 (A_n) 的 **上极限** 和 **下极限**. 显然有

$$\limsup_{n\to\infty} A_n=\{\omega:\ \omega\ \text{属于无穷多个}A_n\},$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n=\{\omega:\ \omega\ \text{至多不属于有限多个}A_n\},$$

从而恒有 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n\subset\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. 若 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n=\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, 称 (A_n) 的极限存在, 并用 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 表示 (A_n) 的 **极限**(即令 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\liminf\limits_{n\to\infty} A_n=\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$).

1.5 设 $\{A_n, n\geq 1\}$ 为一集列. 若 (A_n) 两两不相交 (即 $n\neq m\Rightarrow A_n\cap A_m=\emptyset$), 则常用 $\sum_n A_n$ 表示 $\bigcup_n A_n$. 若有 $\sum_n A_n=\Omega$, 称 $\{A_n, n\geq 1\}$ 为 Ω 的一个 **划分**.

对任一集列 (A_n), 令

$$B_1 = A_1,\ B_n = A_n A_1^c \cdots A_{n-1}^c,\ n \geq 2,$$

则 $\{B_n, n \geq 1\}$ 中集合两两不相交, 且有 $\sum_n B_n = \bigcup_n A_n$. 这一将可列并表示为可列不交并的技巧是很有用的.

1.6 设 $\mathcal{C}$ 为一集类 (约定是非空的). 如果 $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$ (从而 $A_1, A_2, \cdots A_n \in \mathcal{C} \Rightarrow A_1 A_2 \cdots, A_n \in \mathcal{C}$), 称 $\mathcal{C}$ **对有限交封闭**. 如果 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1 \Rightarrow \bigcap_n A_n \in \mathcal{C}$, 称 $\mathcal{C}$ **对可列交封闭**. 类似可定义“对有限并封闭”及“对单调极限封闭”等概念. 令

$$\mathcal{C}_{\cap f} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i :\ n \geq 1, A_i \in \mathcal{C}, i = 1, \cdots, n \right\},$$

则 $\mathcal{C}_{\cap f}$ 对有限交封闭, 我们称 $\mathcal{C}_{\cap f}$ 为用有限交运算封闭 $\mathcal{C}$ 所得的集类. 类似地, 我们用

$$\mathcal{C}_{\cup f},\ \mathcal{C}_{\Sigma f},\ \mathcal{C}_{\delta},\ \mathcal{C}_{\sigma},\ \mathcal{C}_{\Sigma\sigma}$$

分别表示用有限并、有限不交并、可列交、可列并及可列不交并封闭 $\mathcal{C}$ 所得的集类. 此外, 我们用 $\mathcal{C}_{\cap f, \cup f}$ 表示 $(\mathcal{C}_{\cap f})_{\cup f}$, 用 $\mathcal{C}_{\sigma\delta}$ 表示 $(\mathcal{C}_{\sigma})_{\delta}$. 今后常用这些记号, 读者应熟悉并牢记它们.

1.7 命题 设 $\mathcal{C}$ 为一集类, 则有如下结论:

(1) $\mathcal{C}_{\cap f, \cup f} = \mathcal{C}_{\cup f, \cap f}$;

(2) 若 $\mathcal{C}$ 对有限交封闭, 则 $\mathcal{C}_{\cup f}, \mathcal{C}_{\Sigma f}, \mathcal{C}_{\sigma}$ 及 $\mathcal{C}_{\Sigma\sigma}$ 亦然;

(3) 若 $\mathcal{C}$ 对有限并封闭, 则 $\mathcal{C}_{\cap f}$ 及 $\mathcal{C}_{\delta}$ 亦然.

证 直接从集合的交和并的分配律推得.

现在我们用对集合运算的封闭性来划分不同类型的集类. 下面是测度论中常用的一些集类的定义.

1.8 定义 设 $\mathcal{C}$ 为一集类.

(1) 称 $\mathcal{C}$ 为 π-**类**, 如果它对有限交封闭.

(2) 称 $\mathcal{C}$ 为 **半环**, 如果 $\emptyset \in \mathcal{C}$, 且有

$$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C},\ A \setminus B \in \mathcal{C}_{\Sigma f}.$$

(3) 称 $\mathcal{C}$ 为 **半代数**, 如果它是半环, 且 $\Omega \in \mathcal{C}$.

(4) 称 $\mathcal{C}$ 为 **代数**(或 **域**), 如果它对有限交及取余集运算封闭 (由此推知 $\Omega \in \mathcal{C}, \emptyset \in \mathcal{C}$, 且 $\mathcal{C}$ 对有限并及差运算封闭).

(5) 称 $\mathcal{C}$ 为 σ- **代数**, 如果它对可列交及取余集运算封闭 (由此推知 $\mathcal{C}$ 对可列并及差运算封闭, 且 $\Omega \in \mathcal{C}, \emptyset \in \mathcal{C}$).

(6) 称 $\mathcal{C}$ 为 **单调类**, 如果它对单调序列极限封闭 (即 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1, A_n \uparrow A$ 或 $A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{C}$).

(7) 称 $\mathcal{C}$ 为 λ-**类**, 如果它满足下列条件:

(i) $\Omega \in \mathcal{C}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{C},\ B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{C}$;

(iii) $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1,\ A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{C}$.

易知: σ- 代数为 λ- 类, λ- 类为单调类.

1.9 例 设 $\mathbb{R}$ 为实直线 (即 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$), 令

$$\mathcal{C}_1 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\},\ \mathcal{C}_2 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{C}_3 = \{(a, b] : a \leq b, a, b \in \mathbb{R}\},$$

则 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 及 $\mathcal{C}_3$ 为 π- 类, $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ 为半环, $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \{\mathbb{R}\}$ 为半代数.

习题

1.10
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C),$$
$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C),$$
$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2).$$

1.11 $(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n) \cap (\limsup\limits_{n\to\infty} B_n) \subset \limsup\limits_{n\to\infty} (A_n \cap B_n)$.

1.12 对可列不交并封闭的代数为 σ- 代数.

1.13 若 $\mathcal{C}$ 同时为代数和单调类或同时为 π- 类和 λ- 类, 则 $\mathcal{C}$ 为 σ- 代数.

1.14 设 $\mathcal{C}$ 为半代数, 则 $\mathcal{C}_{\Sigma f}$ 为代数.

1.15 λ- 类定义中的条件 (i) 及 (ii) 等价于如下二条件:

(i)′ $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$;

(ii)′ $A, B \in \mathcal{C},\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$.

1.16 设 $\mathcal{C}$ 为一集类，且 $\emptyset \in \mathcal{C}$，令

$$\mathcal{G} = \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} B_j^c \right) \ : \ n, m \geq 1, A_i, B_j \in \mathcal{C}, \right.$$

$$\left. 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m \right\},$$

则 $\mathcal{G} \supset \mathcal{C}$，且 $\mathcal{G}$ 为半环. 特别若 $\mathcal{C}$ 对有限并及有限交封闭，则 $\{A \cap B^c : A, B \in \mathcal{C}\}$ 为半环.

§2 单调类定理 (集合形式)

设 $\{\mathcal{C}_i : i \in I\}$ 为 Ω 上一族集类，若每个集类 $\mathcal{C}_i$ 对某种集合运算封闭，则其交 $\bigcap_i \mathcal{C}_i$ 亦然. 于是对 Ω 上的任一非空集类 $\mathcal{C}$，存在包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ- 代数、最小 λ- 类和最小单调类，我们分别称之为由 $\mathcal{C}$ **生成的** σ-**代数**、λ-**类和单调类**，并分别用 $\sigma(\mathcal{C}), \lambda(\mathcal{C})$ 和 $m(\mathcal{C})$ 记之. 我们恒有 $m(\mathcal{C}) \subset \lambda(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$. 本节主要研究在什么条件下有 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$ 或 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

2.1 定理 设 $\mathcal{C}$ 为一集类.

(1) 若 $\mathcal{C}$ 为代数，则 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

(2) 若 $\mathcal{C}$ 为一 π- 类，则 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

证 (1) 令

$$\mathcal{G}_1 = \{A \in m(\mathcal{C}) : A^c \in m(\mathcal{C}), A \cap B \in m(\mathcal{C}), \forall B \in \mathcal{C}\},$$

则 $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_1$，且 $\mathcal{G}_1$ 为单调类，故 $\mathcal{G}_1 = m(\mathcal{C})$. 令

$$\mathcal{G}_2 = \{A \in m(\mathcal{C}) : A \cap B \in m(\mathcal{C}), \forall B \in m(\mathcal{C})\},$$

则由上所证 $\mathcal{G}_1 = m(\mathcal{C})$ 知，$\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_2$. 但 $\mathcal{G}_2$ 为单调类，故 $\mathcal{G}_2 = m(\mathcal{C})$. 综上所证，我们有

$$A \in m(\mathcal{C}) \Rightarrow A^c \in m(\mathcal{C});\ A, B \in m(\mathcal{C}) \Rightarrow A \cap B \in m(\mathcal{C}),$$

即 $m(\mathcal{C})$ 为一代数，从而 $m(\mathcal{C})$ 为 σ- 代数 (习题 1.13)，因此有 $m(\mathcal{C}) \supset \sigma(\mathcal{C})$. 但相反的包含关系恒成立，故最终有 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

(2) 的证明类似，请读者自行完成.

此定理称为 **单调类定理**. 它表明：为验证某 σ- 代数 $\mathcal{F}$ 中元素有某种性质，只需验证：(1) 有一生成 $\mathcal{F}$ 的代数 (π- 类)$\mathcal{C}$, 其元素有该性质；(2) 有该性质的集合全体构成一单调类 (相应地，λ- 类). 而这后二者的验证往往比较容易. 单调类定理是测度论中的一个重要的证明工具. 今后我们将陆续给出它的应用.

作为定理 2.1 的一个简单推论，我们有单调类定理的如下更有用的形式.

2.2 定理 设 $\mathcal{C}, \mathcal{F}$ 为两个集类，且 $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

(1) 若 $\mathcal{C}$ 为代数，且 $\mathcal{F}$ 为单调类，则 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$;

(2) 若 $\mathcal{C}$ 为 π- 类且 $\mathcal{F}$ 为 λ- 类，则 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

现在我们着手推广定理 2.1, 即寻找使 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$ 或 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$ 的充要条件. 细心的读者可能已经看出：在定理 2.1(1) 的证明中，只要 $\mathcal{C}$ 满足

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in m(\mathcal{C}); \ A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in m(\mathcal{C}),$$

则定理结论仍成立. 于是我们得到定理 2.1 的下述推广.

2.3 定理 设 $\mathcal{C}$ 为一集类.

(1) 为要 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, 必须且只需：

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in m(\mathcal{C}); \ A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in m(\mathcal{C}).$$

(2) 为要 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, 必须且只需：

$$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{C}).$$

由此定理，我们还可推得如下的

2.4 定理 设 $\mathcal{C}$ 为一集类.

(1) 为要 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, 必须且只需：

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in m(\mathcal{C}); \ A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in m(\mathcal{C}).$$

(2) 为要 $\lambda(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$, 必须且只需:

$$A,\,B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cup B\in\lambda(\mathcal{C}).$$

证 令 $\mathcal{D}=\{A^c:A\in\mathcal{C}\}$, 则由定理 2.3, 分别在 (1) 及 (2) 的条件下推得 $m(\mathcal{D})=\sigma(\mathcal{D})$ 及 $\lambda(\mathcal{D})=\sigma(\mathcal{D})$. 我们分别有 $m(\mathcal{D})\subset m(\mathcal{C})$ (因 $\mathcal{D}\subset m(\mathcal{C})$) 及 $\lambda(\mathcal{D})=\lambda(\mathcal{C})$ (请读者自行验证), 故定理中条件的充分性得证. 条件的必要性是显然的.

上述两个定理过于一般, 实际难于应用, 但它们的下述推论是有用的 (例如见下面的例 2.6 及定理 6.3). 需要指出: 如果不首先建立定理 2.3 及 2.4, 那么是不易发现定理 2.5 的.

2.5 定理 设 $\mathcal{C}$ 为一集类. 若它满足下列条件之一, 则有 $m(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$:

(1) $A,\,B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{C},\ A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in\mathcal{C}_\delta$;

(2) $A,\,B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C},\ A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in\mathcal{C}_\sigma$.

(关于记号 $\mathcal{C}_\delta$ 及 $\mathcal{C}_\sigma$ 见 1.6)

证 若 $\mathcal{C}$ 对有限交封闭, 则 $\mathcal{C}_\delta\subset m(\mathcal{C})$; 若 $\mathcal{C}$ 对有限并封闭, 则 $\mathcal{C}_\sigma\subset m(\mathcal{C})$. 因此条件 (1) 及 (2) 分别蕴含定理 2.3 及 2.4 的 (1) 中条件, 定理得证.

2.6 例 设 X 为一距离空间, $\mathcal{F}$ 表示 X 中闭集全体, $\mathcal{G}$ 表示 X 中开集全体. 显然有 $\sigma(\mathcal{F})=\sigma(\mathcal{G})$, 我们称它为 X 的 **Borel σ-代数**, 记为 $\mathcal{B}(X)$. 显然 $\mathcal{G}$ 及 $\mathcal{F}$ 分别满足定理 2.5 的条件 (1) 及 (2), 于是我们有 $m(\mathcal{F})=m(\mathcal{G})=\mathcal{B}(X)$. 但这一结果并不能从定理 2.1 推得. 由此可见, 我们将经典的单调类定理进行推广是有意义的.

作为本节的结束, 我们引进可分 σ- 代数及原子概念.

2.7 定义 设 $\mathcal{F}$ 为一 σ- 代数. 称 $\mathcal{F}$ 为 **可分的**(或 **可数生成的**), 如果存在 $\mathcal{F}$ 的一可数子类 $\mathcal{C}$, 使得 $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{F}$.

注意: 可分 σ- 代数的元素未必是可数多个.

由习题 1.16 及 1.14 易知: 若 $\mathcal{F}$ 可分, 则存在一代数 $\mathcal{C}$, 其元素个数至多可数, 使得 $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{F}$.

2.8 定义 设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一 σ- 代数. 对任一 $\omega \in \Omega$, 令

$$\mathcal{F}_\omega = \{B \in \mathcal{F}: \ \omega \in B\}, \ A(\omega) = \bigcap_{B \in \mathcal{F}_\omega} B,$$

称 $A(\omega)$ 为含 ω 的 **原子**.

请读者证明下述结论:

(1) 设 $\omega, \omega' \in \Omega$, 则或者 $A(\omega) = A(\omega')$, 或者 $A(\omega) \cap A(\omega') = \emptyset$;

(2) 设 $\mathcal{F}$ 可分, $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的可数代数. 对任何 $\omega \in \Omega$, 令 $\mathcal{C}_\omega = \{B \in \mathcal{C} : \omega \in B\}$, 则有

$$A(\omega) = \bigcap_{B \in \mathcal{C}_\omega} B.$$

习题

2.9 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一集类, $A \subset \Omega$. 令

$$A \cap \mathcal{C} = \{A \cap B : \ B \in \mathcal{C}\}$$

(这一记号以后常用到), 并用 $\sigma_A(A \cap \mathcal{C})$ 表示 $A \cap \mathcal{C}$(视为 A 上集类) 在 A 上生成的 σ- 代数, 则有

$$\sigma_A(A \cap \mathcal{C}) = A \cap \sigma(\mathcal{C}).$$

对 $m(\mathcal{C})$ 、 $\lambda(\mathcal{C})$ 亦有类似结果.

2.10 设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一 σ- 代数, $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \cdots\}$ 为 Ω 的一个可数划分 (即 $A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m, \sum_n A_n = \Omega$), 则对任何 $B \in \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{C})$, 存在 $B_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \cdots$, 使得

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A_n).$$

2.11 设 $\mathcal{C}$ 为一集类. 则对任何 $A \in \sigma(\mathcal{C})$, 存在 $\mathcal{C}$ 的可数子类 $\mathcal{D}$, 使得 $A \in \sigma(\mathcal{D})$.