

控制系统分析基础

大连海运学院 李国栋 田纪熊 编译
王 贤 惠 校

人民交通出版社



控制系统分析基础

大连海运学院 李国栋 田纪熊 编译
王 贤 惠 校

人 民 交 通 出 版 社

内 容 提 要

本书共分十一章。主要包括：绪论、物理系统、控制系统的表达、分析系统的古典方法和状态空间法、性能准则、图解法、系统的校正、分析离散系统的古典方法和状态空间法、非线性系统。有关矩阵理论的基本知识收在书末附录中。书中附有大量的例题和习题，对于一些基本理论力求避免冗长的数学推导。

本书可作为高等学校非电专业的教学参考书，也可供有关专业的工程技术人员使用。

本书由李国栋、田纪熊、陈德若编译，王贤惠、江峰审校。

控制系统分析基础

李国栋 田纪熊 编译
大连海运学院
王 贤 惠 校

人民交通出版社出版
(北京市安定门外和平里)
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
人民交通出版社印刷厂印

开本：787×1092 1/32 印张：17.25 字数：424 千

1982年1月 第1版

1982年1月 第1版 第1次印刷

印数：0001—4,600册 定价：1.80元

目 录

第一章 绪言	1
§1-1 历史的回顾	1
§1-2 基本概念	1
§1-3 系统的描述	2
§1-4 系统的设计、建立模型和分析	3
第二章 物理系统	5
§2-1 引言	5
§2-2 模拟系统	6
§2-3 系统元件	18
本章摘要	24
习题	24
第三章 控制系统的表达	27
§3-1 引言	27
§3-2 传递函数	27
§3-3 闭环系统	29
§3-4 信号流图	36
§3-5 状态表达式	38
本章摘要	46
习题	47
第四章 响应——古典方法	50
§4-1 引言	50
§4-2 瞬态响应	51
§4-3 稳态响应	58
§4-4 劳斯—赫尔维茨稳定性判据	63
本章摘要	68
习题	68
第五章 响应——状态空间法	71
§5-1 引言	71
§5-2 状态方程的频域解	71
§5-3 状态方程的时域解	76
§5-4 稳定性——矩阵的特征值	84
§5-5 两个例题	85
§5-6 控制系统的能控性和能观测性	87
§5-7 系统的结构分解、能控和能观测标准型问题	101

§5-8 传递矩阵、能控性和能观测性与传递函数的关系	108
本章摘要	117
习题	118
第六章 性能准则	123
§6-1 引言	123
§6-2 控制系统的技术要求	123
§6-3 性能指标	125
§6-4 灵敏度函数	127
§6-5 控制形式	129
本章摘要	132
习题	132
第七章 图解法	135
§7-1 引言	135
§7-2 频率响应法	136
§7-3 频率域的性能	152
§7-4 根轨迹	159
§7-5 使用状态方程表达时的作图法	166
本章摘要	167
习题	168
第八章 系统的校正	171
§8-1 引言	171
§8-2 不稳定系统变为稳定的方法	171
§8-3 校正的类型	173
§8-4 串联校正	173
§8-5 反馈校正	183
§8-6 前馈校正	184
§8-7 实例	184
§8-8 使用状态变量的反馈	187
本章摘要	189
习题	189
第九章 离散系统——古典方法	192
§9-1 引言	192
§9-2 采样器	192
§9-3 z 变换	196
§9-4 保持电路	200
§9-5 脉冲传递函数	202
§9-6 系统响应	206
§9-7 稳定性试验	210
§9-8 离散系统的图解法	213
本章摘要	217

习题	217
第十章 离散系统——状态空间法	219
§10-1 引言	219
§10-2 状态表示法	219
§10-3 离散状态方程组的解	221
§10-4 开环系统	228
§10-5 闭环系统	229
§10-6 混合系统	230
§10-7 稳定性	233
本章摘要	234
习题	234
第十一章 非线性系统	237
§11-1 引言	237
§11-2 描述函数法	237
§11-3 相平面法	245
§11-4 李雅普诺夫稳定性准则	251
本章摘要	254
习题	254
附录A 拉普拉斯和 z 变换	255
附录B 符号及单位	256
附录C 矩阵理论基础	257
主要参考书	270

第一章 绪 言

§1-1 历史的回顾

人类自从启蒙以来就想去控制各种自然力,很早以前就有许多关于控制系统的实例。然而,直到十八世纪中叶才出现几种蒸汽作用的控制器。那时还是蒸汽机时代,也许最值得注意的发明就是詹姆斯·瓦特的飞球式调速器。

大约在二十世纪初叶,有关控制系统的大量研究工作是在动力工业与化学工业领域内进行的。与此同时,飞机自动驾驶原理也得到了相当的发展。

追溯第二次世界大战前二十五年中,电子学特别是在电路理论方面取得急骤地发展,就是借助于在稳定性理论领域中奈魁斯特的经典著作而取得的。战前与战后,尖端武器、潜艇、飞机等方面发展的要求,对控制系统的研究工作起了新的推动作用。随着电子技术进步出现的模拟计算机,标志着控制系统作为一门科学的开始。到五十年代中期,数字计算机的发展,给工程技术人员提供了一种新的工具,从而大大提高了研究大型、复杂控制系统的的能力。计算机的有效利用,又开辟了数据巡回检测、计算机控制与状态空间或近代分析方法的新纪元。

由于人造卫星的出现,开始了空间竞赛。在此时期,电路走向微型化,使得大型复杂的控制系统非常紧凑地组装在一起,结构尺寸很小的系统可兼备计算与控制两方面的效益。在人造卫星出现以后的年代里,在系统最优化与自适应系统方面出现了许多研究成果。

今天,控制系统作为一门技术性的科学,起着重要的作用。在数学上取得的显著成果,对最佳控制系统是相当重要的。现代近似处理方法已经成为一门独立的科学,它不仅用于传统的控制系统,而且也用来处理一些新近出现的课题,例如城市规划、经济学、运输和生物医学等问题以及一系列影响现代人类生活的各种问题。

§1-2 基本概念

控制系统的分析,涉及动态系统特性的研究。这种分析是根据系统理论的基本原理进行的。在这些原理中,各动态微分方程呈现一个因果关系。图1-1表示了一个物理系统。图中: $x(t)$ 为激励或输入; $y(t)$ 为响应或输出。图1-2表示一个简单的控制系统。在这里,输出信号要与输入信号相比较,两个信号的偏差成为对物理系统的激励,因此这个控制系统叫

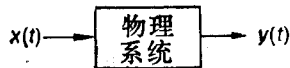


图1-1 物理系统

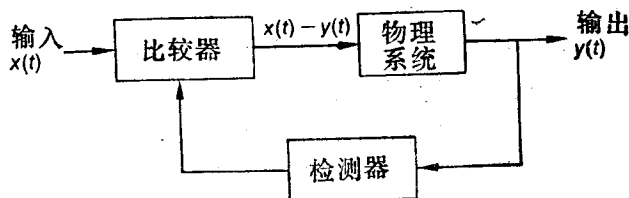


图1-2 简单控制系统

做反馈控制系统。所谓控制系统的“分析”，就是当输入和系统特性给定时，去求 $y(t)$ ，如图 1-2 所示。如果输入与输出给定，而期望去设计系统的特性，则称为控制系统的“综合”。

图 1-3 表示一个广义的控制系统。参考变量或输入变量 $r_1, r_2 \dots r_m$ 加到比较器或控制器上，输出变量为 $c_1, c_2 \dots c_n$ 。信号 $c_1, c_2 \dots c_p$ 是执行变量或控制变量，它们是由控制器加给系统或设备的。

这个设备还受到扰动输入 $u_1, u_2 \dots u_q$ 的作用。如果不去测量输出变量也不把它反馈到控制器，那么包括控制器和设备在内的整个系统就是一个开环系统。若输出是反馈的，则此系统是一个闭环系统。

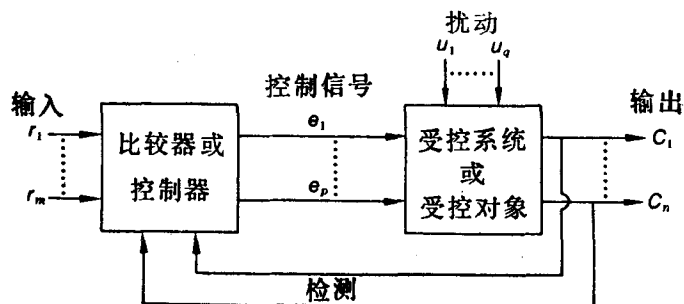


图1-3 广义的控制系统

§1-3 系统的描述

通常，一个控制系统由若干子系统组成，这些子系统是通过一定的因果关系而联系起来的。不同的子系统可以是电动、机械、气动、生物等的系统，所以对整个系统要作完整的描述，必须了解各种不同学科之间的基本关系。好在不同物理系统的动态特性具有相似性，因而这项任务就变得比较容易而且有吸引力了。

现以一个宇宙飞船姿态控制的简化方案作为一个控制系统的例子，如图 1-4 所示。我们希望人造卫星相对于一个惯性座标系统保持某一特定的姿态，其实际姿态由装设在卫星上的一个方位传感器来测量。如果预期的姿态和实际的不同，比较器向阀门发出信号，于是阀门开启，使火箭点火。火箭的动力给卫星姿态必要的校正信号，从而使卫星受到控制。用这种方法来描述控制系统，称为方框图表示法。这种表达方法有助于把一个大系统分成为若干个子系统，可以每次只研究一个子系统。

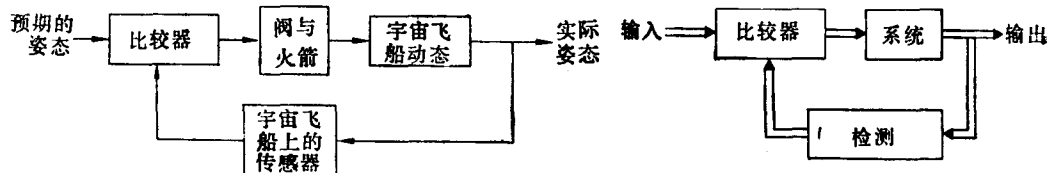


图1-4 人造卫星姿态控制简图

图1-5 多变量系统表达法

假定有许多应监测和应控制的输入与输出，其方框图如图 1-5 所示。具有几个应监测和应控制变量的系统，称为多变量系统。多变量系统的实例很多，在化学工艺处理、车辆监督、国民经济、城建发展模型、邮政业务以及其它一些有关社会和城市的课题中都能找到。

图 1-6 表示一个设想中的太阳跟踪系统的初步设计方案。简单地说，它包括：一个天文望远镜座、两个太阳能硅电池、一个放大器、一个电动机和传动齿轮箱。两个太阳能电池反向并联，装在望远镜的极轴线上作为电流源使用。当指向太阳的方向有误差时，落在一个电池上的太阳影象会比另一个电池上的多，相当于一个位置误差传感器。简单的差动输入晶体管放大器可以提供足够的增益，因此较小的误差信号经放大器输出，足以使电动机运转。电

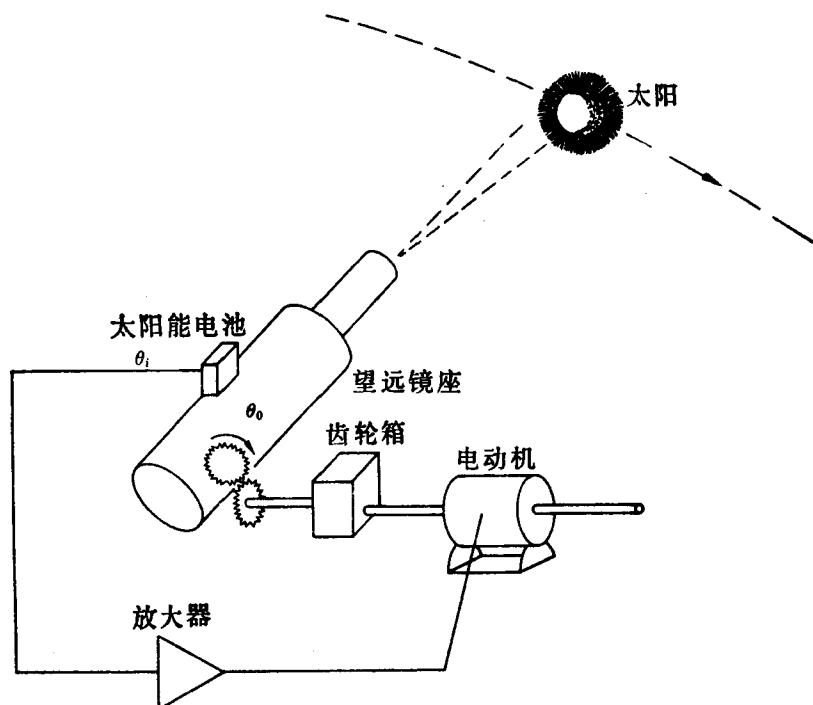


图1-6 太阳跟踪系统示意图

动机调节望远镜座极轴的旋转速率以便与太阳的表观运动相适应。这个系统的方框图如图 1-7 所示。

我们周围的控制系统数量确实很多，但是所有这些系统的基本特征大体上是相同的，它们都有输入、控制、输出和扰动变量；它们都描述一个控制器和一个对象；它们都具有某种比较器，在所有情况下，都必须使控制系统去跟踪一套预定的指令。

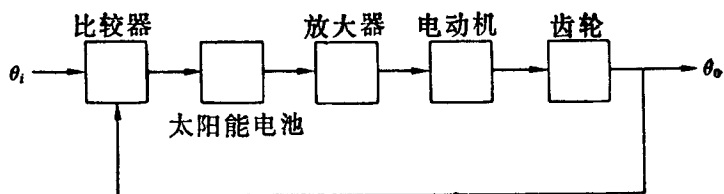


图1-7 太阳跟踪系统方框图

§1-4 系统的设计、建立模型和分析

在建造一个硬件之前，必须对一个系统进行设计、建立模型和分析。实际上，分析是设计过程中必不可少的一环。通常在设计一个控制系统时，都是先从原理出发，然后建立一个数学模型，以便进行分析。分析的结果与规划中的系统的预定指标进行对比，比较结果的准确度取决于所提出设计的原始模型的质量。图 1-6 所示的太阳跟踪系统是一个初步设计，在第八章中还要介绍如何分析及怎样进一步对它校正，使它的性能满足系统的技术要求。这项任务可以看成是在建造一个物理系统之前，对它的动态特性的预测。所谓动态特性也就是该物理系统从某个平衡位置受到干扰时所表现的自然运动和它受到外界扰动时所产生的响应。我们特别要讨论响应速度或瞬态响应，精确度或稳态响应以及系统的稳定性。所谓稳定性是指输出保持在某一个合理的极限值之内，此极限值取决于具体的用途。例如，一个建筑物内

部的空气调节使温度变化保持在 $\pm 1^{\circ}\text{C}$ 就可使住户满意了。然而，在某些低温系统的温度控制，却要求把温度控制在几分之一度以内。速度、精确度和稳定性的要求通常是十分矛盾的，必须作出某些折衷。例如，增加精确度通常会使瞬态响应恶化；如果把阻尼减少，系统的振荡就会增加并且需要较长时间才能达到某个稳态值。

重要的是，所有实际的控制系统都是非线性的，然而许多系统在一段有限的范围内可以近似地看作是线性系统，通常这是一种可接受的初次近似。假设为线性的最大好处是，可以应用迭加定理。如果我们获得的响应是由两个不同输入造成的，则两个输入合成的响应就等于两个单独响应之和。另一个好处是在分析线性系统时，可以采用运算微积，这种运算方法可以把常微分方程变成比较容易处理的代数方程。

控制系统往往用高阶线性微分方程来表达，而运算微积方法可以用来研究这些方程组。由于系统变得越来越复杂，所以需要使用数字计算机。如果所研究的系统可由一组一阶微分方程表示，而且分析是用矩阵理论进行的，则更利于用计算机来处理。这实质上就是状态空间法或状态变量法。这种方法尽管也可用在单输入单输出系统，但在多变量系统中得到广泛的应用。它还有一个很大的优点，就是可以研究到系统内部的各种变量。

其实，古典动力学理论的许多研究工作也是建立在状态变量观点上的。当用拉格朗日原理写出一个系统的运动方程时，需要用到一些与线性无关的变量或广义座标。座标的数目等于自由度的个数。汉密顿还指出，采用广义座标可使运动方程大为简化。这就是说一个二阶系统的状态可用独立变量及其对时间的导数来表示，因而所要研究的系统可用一组一阶微分方程来描述。

由于本书是一门导论性质的课程，所以我们力图把古典理论和状态空间观点同时向读者介绍。必须指出，虽然用古典观点去研究问题开始比较容易些，但遇到较复杂和较重要的课题时，还是状态空间法更适用。要深入全面的进行研究，理应包括这两方面的观点。

在设计与分析一个控制系统时，不论采用哪一种处理方法，至少应遵循下面各步骤：

- (1) 假设一个控制系统，列举该系统所应满足的技术要求；
- (2) 作出功能方框图并导出系统的数学表达式；
- (3) 采用适用于该课题的某种分析法或图解法来对系统进行分析；
- (4) 校验性能指标（速度、精确度、稳定性或其它性能准则）是否符合技术要求；
- (5) 使系统的参数达到最佳，以满足(1)的要求。

其实，无论是物理系统或具体装备，只有少数基本概念及分析方法对预测系统的特性是很关键性的。然而，这里所讨论的并用于几个例题上的基本概念却具有更广泛的应用范围。至于实际的应用范围，只有当读者把本书所提到的概念用于实际工作时才能较深刻地体会。

第二章 物理系统

§2-1 引言

分析一个控制系统之前, 需要建立它的数学模型。对数学模型进行分析可深入了解该物理系统的性能。当然, 所得到数据的精确性, 决定于对该系统取数学模型的好坏。

实际系统的性质在本质上都是非线性的, 通常很难进行分析, 但我们可以建立一些模型, 使这些模型在足够的运行范围内是线性的。这样处理有两个明显的好处: 第一, 可利用迭加原理, 即初始静止的系统对于同时加入的几个不同输入所引起的反应是互相独立的。设 $r_1(t)$ 、 $r_2(t)$ 是分别加到系统上的两个输入, 则输出分别为

$$r_1(t) \rightarrow x_1(t) \quad r_2(t) \rightarrow x_2(t)$$

如果把 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$ 一起往上加, 那么按迭加原理, 输出可表达为

$$[r_1(t) + r_2(t)] \rightarrow [x_1(t) + x_2(t)]$$

线性的第二个性质是成比例地响应, 也就是如果输入乘上一个常数 K , 那么输出也乘以相同的常数, 即

$$[K_1 r_1(t) + K_2 r_2(t)] \rightarrow [K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t)]$$

尽管许多机械系统及电气系统的确在相当大的有用范围内具有线性的性质, 但液压系统与热力系统通常则没有这种特性。同样, 有源网络元件如二极管及晶体管也呈现非线性的特性。当所要研究的这些元件是非线性的时, 可以在一个特定的工作点予以线性化。现在研究一个非线性的弹簧, 其工作特性如图 2-1 所示, 弹簧力 F 可用下式表示

$$F = f(x)$$

式中 $f(x)$ 是 x 的某种非线性函数。假如我们要在 x_1 点使用此弹簧, 则在这一点上的台劳级数展开式为

$$F = f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_1} + \dots$$

如果设 $[df(x)/dx]_{x=x_1}$ 是曲线在 x_1 点的斜率, 并以 k 表示, 则

$$F = f(x_1) + k(x - x_1)$$

或

$$F - F_1 = k(x - x_1)$$

假如我们把这个方程式的应用限制在工作点 x_1 附近, 那么非线性元件可以用上述线性近似式表示。

除了利用线性近似性质以外, 如果假设控制系统中的信号流动是增量值, 往往也可使分析简化。通过下述例子可以更好地了解这个原理。设有一个受力矩 $T(t)$ 作用的机械系统

$$T(t) = \frac{d}{dt} [I\omega(t)]$$

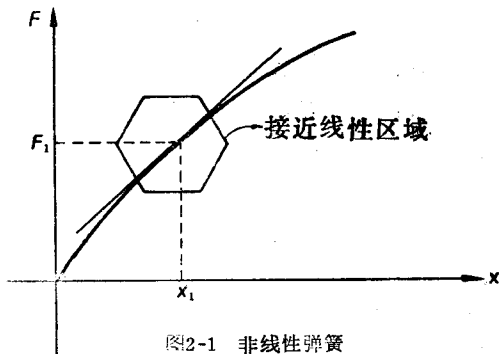


图2-1 非线性弹簧

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{T(t)}{I} \quad (2-1)$$

式中: I ——转动惯量, 恒定不变;

$\omega(t)$ ——角速度。

如果 $\Omega(s)$ 为拉氏域的输出信号, $T(s)$ 为拉氏域的输入信号^①, 则 $\Omega(s)/T(s)$ 的比值为

$$\frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Is} \quad (2-2)$$

这就是所谓系统的传递函数。如果转矩增加 $q(t)$, 从而引起角速度增加 $\theta(t)$, 于是

$$T(t) + q(t) = I \frac{d}{dt} [\omega(t) + \theta(t)]$$

使用拉氏变换法并利用上述结果, 上式可简化为

$$\frac{\Theta(s)}{Q(s)} = \frac{1}{Is}$$

应当注意, 现在虽然输入信号是 $Q(s)$, 输出信号是 $\Theta(s)$, 但方程式的右边都是相同的, 即传递函数相同。将它与前面的情况对比, 说明输入及输出值已为它们的增量值所代换。通常, 在分析控制系统时采用增量值, 这些数值是一些运行状态的变差。这种运行状态有时被认为是运行中的静态工作点。

在本章以下各节中, 我们的目的是说明一个系统如何去用它的传递函数或用一组如方程式 (2-1) 所表示的一阶微分方程组来表达。同时, 仅限于研究那些能够用线性常微分方程表达的系统。我们将用控制系统内常用的最基本元件来举例。

§2-2 模拟系统

应用一些说明系统和元件物理特性的基本定理, 就可以求得系统的数学模型。例如: 电路问题应用基尔霍夫定律及欧姆定律; 力学上的平移及转动问题应用牛顿定律及达朗贝原理; 热力系统应用富里埃热传导方程及牛顿定律, 有关流动及连续性方程的达西定律可用来描述液压系统。不管系统的性质如何, 应用这些定律中的任何一个定律都会得到基本形式相同的微分方程。因此, 我们就把它们看作是模拟系统。这些系统所用的单位及符号见附录 B。

本节中的其余部分可以看成是复习。因为我们所推导的方程式都是已经遇到过的。在这里, 我们的目的是推导系统的方程式, 或用传递函数来表达, 或用一阶微分方程组的方式来描述它们。前者用于古典分析方法, 而后者用于现代分析法或状态空间分析法。

电气系统

应用基尔霍夫定律可以求得描述电气系统特性的方程式。基尔霍夫定律指出: (1) 在任一给定回路中, 电压降的总和等于电压升的总和; (2) 流入一个节点的电流的总和, 等于流出这个节点的电流总和。应用第一个定律的方法称为回路法; 应用第二个定律的方法则称为

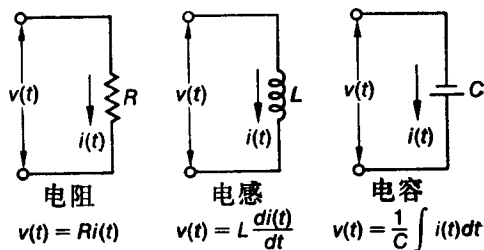


图2-2 电路元件

① 假定读者已熟悉拉氏变换。此处 $\Omega(s)$ 和 $T(s)$ 是 $\omega(t)$ 和 $T(t)$ 的拉氏变换。我们将全部用大写字母来表示拉氏域中的变量。常用的表达式见附录 A。

节点法。这两个方法中的任何一个方法与描述系统中每个元件物理特性的定律结合起来，就可推导出基本方程。

电路网络中所用的元件见图 2-2。如果在一个电阻上加上电压 $V(t)$ ，根据欧姆定律，则 $V(t) = Ri(t)$ 。同理，如电压加在一个电感或电容上，则由法拉第和库伦定律可得 $V(t) = Ldi(t)/dt$ 及 $V(t) = \frac{1}{C} \int i(t)dt$ 。电阻是耗能器，电感贮存动能而电容贮存势能。

现在来研究图 2-3(a) 所示的网络。为了推导所需的微分方程，使用回路法。这里有两个回路。把通过 R_1 、 L 及 C 的电压降相加，则可得到对应于两个回路的两个方程式

$$R_1 i_1(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i_1(t)dt - \frac{1}{C} \int i_2(t)dt = 0 \quad (2-3a)$$

$$-\frac{1}{C} \int i_2(t)dt - \frac{1}{C} \int i_1(t)dt + R_2 i_2(t) = v_2(t) \quad (2-3b)$$

取拉氏变换，并设初始条件为零，经整理后，则得

$$I_1(s) \left[R_1 + LS + \frac{1}{Cs} \right] - I_2(s) \left[\frac{1}{Cs} \right] = 0$$

$$-I_1(s) \left[\frac{1}{Cs} \right] + I_2(s) \left[-\frac{1}{Cs} + R_2 \right] = V_2(s)$$

解此联立方程式，并设 $V_1(s) = R_1 I_1(s)$ ，则得

$$\frac{V_1(s)}{V_2(s)} = \frac{R_1}{LCR_2 s^2 + s(R_1 R_2 C + L) + (R_1 + R_2)} \quad (2-4)$$

式中 $V_1(s)/V_2(s)$ 为该网络的传递函数，它用 $G(s)$ 来表达，如图 2-3(b) 所示。

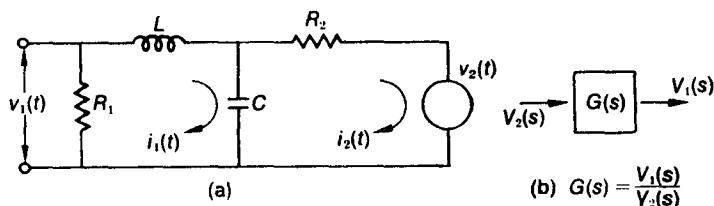


图2-3 电路网络

作为另一种数学表达法，我们规定

$$x_1(t) = i_1(t) \quad x_2(t) = \frac{1}{C} \int i_1(t)dt - \frac{1}{C} \int i_2(t)dt \quad (2-5a)$$

将它们代入方程式 (2-3a) 和 (2-3b)，则

$$R_1 x_1(t) + L \dot{x}_1(t) + x_2(t) = 0 \quad (2-5b)$$

$$-x_2(t) + R_2 i_2(t) = v_2(t) \quad (2-5c)$$

第二个方程式可改写为

$$-x_2(t) + R_2 [-Cx_2(t) + x_1(t)] = v_2(t)$$

将此方程式及式 (2-5b) 加以整理，则可得出描述该网络的两个一阶微分方程式

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{R_1}{L}x_1(t) - \frac{x_2(t)}{L} \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{x_1(t)}{C} - \frac{x_2(t)}{R_2C} - \frac{v_2(t)}{R_2C}\end{aligned}\quad (2-6)$$

这里应指出：

(1) 只要电路元件是独立连接的，总是可以把经过电感的电流及电容两端的电压作为状态变量。这对其它系统的能量储存变量来说，也是正确的；

(2) 系统的阶数等于特征方程的阶数。这与我们要研究的系统所需最少的状态变量的数目相同。

在下一章里我们将把这个过程予以定型，这里只想说明一个系统是如何用一组一阶微分方程式来表达的。节点分析法及回路分析法可以推广到有源网络。研究有源网络是十分重要的，因为绝大多数反馈控制系统都包括若干个有源元件。虽然这些元件不完全是线性的，但如前所述，在有限的运行范围内可以作为线性处理。现在研究使用于共发射极连结的单级放大器的晶体管，如图2-4(a)所示，其等效电路见图2-4(b)。利用回路方程式，则得

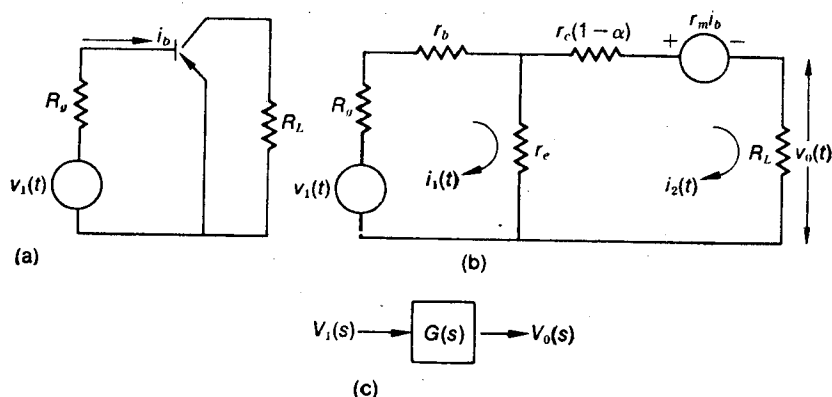


图2-4 单级放大器

(a)符号表示；(b)等效电路；(c)方框图

$$\begin{aligned}(R_g + r_b + r_e)i_1(t) - r_e i_2(t) &= v_1(t) \\ -r_e i_1(t) + [r_e + r_c(1-\alpha) + R_L]i_2(t) &= -r_m i_b(t)\end{aligned}$$

式中： r_e ——发射极电阻；

r_c ——集电极电阻；

r_b ——基极电阻；

r_m ——互电阻。

由于输出电压 $v_0(t)$ 等于 $R_L i_2(t)$ ，并且 $i_b(t) = i_1(t)$ ，故可得

$$\begin{aligned}(R_g + r_b + r_e)i_1(t) - \left(\frac{r_e}{R_L}\right)v_0(t) &= v_1(t) \\ (r_e - r_m)i_1(t) + \frac{r_e + r_c(1-\alpha) + R_L}{R_L}v_0(t) &= 0\end{aligned}$$

现在可以求传递函数 $V_0(s)/V_1(s)$ 。通常称它为放大器增益并且看作是常数。

电路网络中，常用变压器作为耦合器或匹配器。当电路网络中有一个变压器时，在初级线圈的电流有变化时会使次级线圈产生一感应电压，反之亦然。这个现象称为互感。设有图

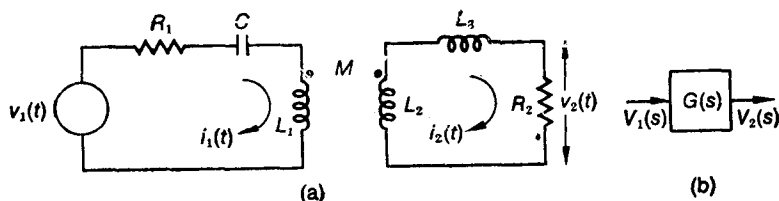


图2-5 具有变压器的电路

2-5(a)所示的电路，图中黑点表示互感为负值^①。利用回路法，可得

$$R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i_1(t) dt - M \frac{di_2(t)}{dt} = v_1(t) \quad (2-7a)$$

$$R_2 i_2(t) + (L_2 + L_3) \frac{di_2(t)}{dt} - M \frac{di_1(t)}{dt} = 0 \quad (2-7b)$$

用前面讲的办法，取拉氏变换再求解联立方程式就可求得传递函数。若要用一阶微分方程组来表达该系统，可作如下规定：

$$x_1(t) = \int i_1(t) dt \quad x_2(t) = i_1(t) \quad x_3(t) = i_2(t)$$

由此可得到一组一阶微分方程式。读者可以作为一道习题自行推导。

机械系统

机械系统可以分为两大类，即平移和转动。虽然这两种情形分析方法均相同，但齿轮的出现使得对回转系统的分析更复杂化一些。

机械系统的方程式通常应用牛顿定律，即施加力的总和等于动量的变化。因为这里所研究的系统具有固定的质量，所以这个定律相当于著名的 $F = ma$ 关系式。

平移是指沿着直线的运动。描述平移问题的物理元件是重块、弹簧和阻尼器。图 2-6 是它们的示意图，图中还列出了力、位移与元件的物理特性关系式。质量是储存动能的元件。在重力场中，有一个重量为 W 的物体，则 $m = W/g$ ，式中 g 是重力加速度。如果力 $f(t)$ 作用于质量为 m 的物体上，则 $f(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$ 。弹簧是储存势能的元件。如果力 $f(t)$ 加到一个线性弹簧（有时称为虎克弹簧）上，由虎克定律可得 $f(t) = kx(t)$ 。阻尼器是产生摩擦力的元件。通常，运动物体的摩擦力包括静摩擦力、库伦摩擦力和粘性或线性摩擦力。这里只讨论

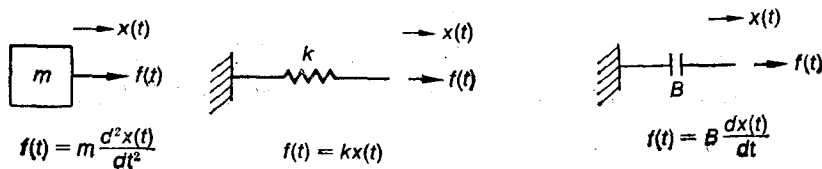


图2-6 机械元件

线性摩擦。当力 $f(t)$ 加到一个线性阻尼器上时，那么 $f(t) = B \frac{dx(t)}{dt}$ 。现在来研究图2-7(a)所示的机械系统及其等效图2-7(b)。设此系统初始时处于静平衡状态，以后重块 m 受到扰

① 如果 i_1 和 i_2 都由该点流入或流出，那么磁力线的作用和互感的作用看作是电压降并且具有与自感相同的符号，即正号。如果 i_1 是流入该点而 i_2 自该点流出，则互感为负号。

动, 图2-7(c)表示取 m 作脱离体时所有作用力的简图。如果该重块被拉下 $x(t)$, 则弹簧加阻尼器的力就等于惯性力, 即

$$\Sigma F = -(f_s + f_D) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

若代入弹簧和阻尼器力, 则得

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0$$

现在, 如果再加一个输入力 $f(t)$, 则

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t) \quad (2-8)$$

现在我们规定

$$x_1(t) = x(t) \quad x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad r(t) = \frac{f(t)}{m}$$

然后将它代入方程式 (2-8), 得到两个一阶微分方程式

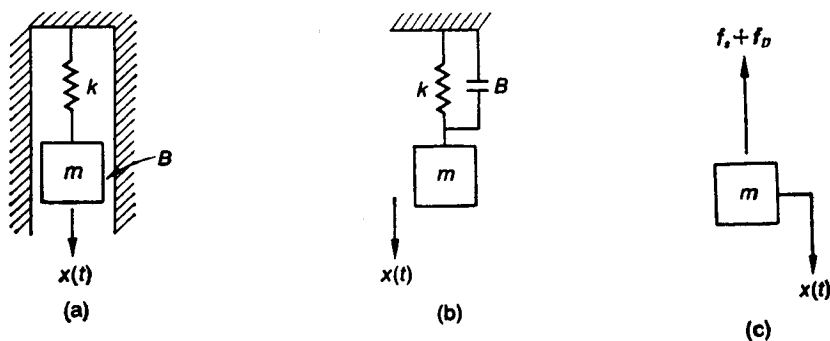


图2-7 机械系统示意图

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \quad (2-9a)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{B}{m} x_2(t) - \frac{k}{m} x_1(t) + r(t) \quad (2-9b)$$

这两个方程式全面地描述了上述系统。假设初始条件为零并把方程式 (2-8) 作拉氏变换, 整理后即可得到传递函数表达式

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + Bs + k} \quad (2-10)$$

应当注意: 对于图 2-7 所示的系统, 只得到一个二阶微分方程, 因为这个系统只有一个自由度。自由度的数目等于以这种形式运动的重块的数目。如果有两个重块, 这个系统应有两个自由度, 此时需要两个坐标来描述这些重块的位置。

例 题 2-1

试求图 2-8 所示双重块问题的传递函数。

设 $x > y > z > 0$, $dy(t)/dt > 0$, $dx(t)/dt > 0$ 。则两个弹簧均受张力。把作用于每个重块的力相加, 得

$$\Sigma F_1 = m_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = k_1 [x(t) - y(t)] - k_2 [y(t) - z(t)] - B_1 \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\Sigma F_z = m_2 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = k_2 [y(t) - z(t)] - B_2 \frac{dz(t)}{dt}$$

整理这些方程式后, 得

$$m_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B_1 \frac{dy(t)}{dt} + (k_1 + k_2)y(t) - k_2 z(t) = k_1 x(t)$$

$$m_2 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + B_2 \frac{dz(t)}{dt} + k_2 z(t) - k_2 y(t) = 0$$

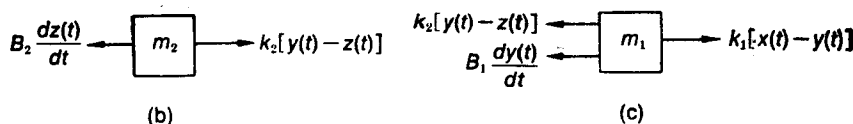
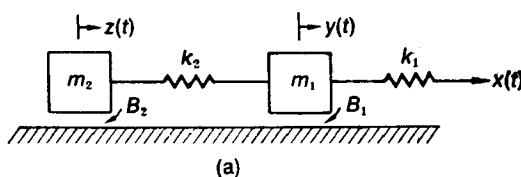


图2-8 两个自由度的机械系统

如初始条件为零, 则其拉氏变换为

$$\begin{aligned} [m_1 s^2 + B_1 s + (k_1 + k_2)]Y(s) - k_2 Z(s) &= k_1 X(s) \\ -k_2 Y(s) + [m_2 s^2 + B_2 s + k_2]Z(s) &= 0 \end{aligned}$$

每个重块各有一个输出, 所以要找出两个传递函数。解上述联立方程式, 得两个传递函数分别为

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k_1 [m_2 s^2 + B_2 s + k_2]}{\Delta} \quad (2-11a)$$

$$\frac{Z(s)}{X(s)} = \frac{k_1 k_2}{\Delta} \quad (2-11b)$$

$$\Delta = [m_1 s^2 + B_1 s + (k_1 + k_2)][m_2 s^2 + B_2 s + k_2] - k_2^2$$

如果例题 2-1 的系统用一组一阶微分方程式来表达, 则这方程组包括四个方程式。

当机械系统的运动是旋转运动时, 则牛顿定律说明, 转矩的总和等于动量矩的变化。在多数情况下, 转动惯量为常数, 所以它可用下式来表示:

$$T(t) = I \alpha(t)$$

式中: $T(t)$ ——转矩,

I ——转动惯量,

$\alpha(t)$ ——角加速度。

描述回转问题的物理元件是: 转动惯量、弹簧和阻尼器。这些物理元件的分析与在平移运动所叙述的完全一样。

现在来研究图 2-9(a) 所示的单自由度回转系统 (通过一根轴的位置就能完全决定旋转元件的位置)。图 2-9(b) 是它的脱离体图, 图中 $\theta_i(t)$ 是正输入角位移, 且 $\theta_i > \theta_0$ 。弹簧扭矩的作用方向为正, 阻尼转矩的作用方向为负。转矩之和为