面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

现代数学方法选讲

谢季坚　邓小炎　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材

Textbook Series for 21st Century

现代数学方法选讲

谢季坚 邓小炎 编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材．主要内容有：模糊集合、模糊统计、模糊识别、模糊聚类、模糊决策、分形几何、分维、几种规则分形、分形的计算机生成以及它们在科学技术、经济管理中的应用．附录包括：习题参考答案、名词术语索引．

本书内容简明扼要，注意实际背景与直观描述，通俗易懂，理论联系实际．

本书可作非数学专业的各类大学生的相关教材，也可作为一般读者的科普读物．

图书在版编目(CIP)数据

现代数学方法选讲/谢季坚，邓小炎编．—北京：高等教育出版社，2001

ISBN 7-04-009139-9

Ⅰ．现…　Ⅱ．①谢…②邓…　Ⅲ．数学方法　Ⅳ．01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第75499号

现代数学方法选讲

谢季坚　邓小炎　编

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010-64054588	传　真	010-64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
排　版	高等教育出版社照排中心		
印　刷	北京民族印刷厂		

开　本	787×960　1/16	版　次	2001年2月第1版
印　张	11.25	印　次	2001年2月第1次印刷
字　数	200 000	定　价	10.10元

前　　言

1995 年原国家教委适时推出了"高等农林教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划",从 1995 年开始,我们经历了申报、立项、制定改革方案和试验等过程.在原国家教委高等教育司的指导下,华中农业大学于 1997 年和 1998 年按照新的改革方案进行两轮试验.在原有讲义的基础上,多方征求教师、学生的意见,经过反复研讨,我们编写了这本"面向 21 世纪课程教材"——《现代数学方法选讲》.

在面向 21 世纪的教学改革中,为什么要开设这样一门课程呢?

首先是为了让大学生**开阔视野、扩大知识面,提高综合素质**.大家知道,对于非数学专业的大学生,在大学阶段还只是接触到 17 世纪、18 世纪的数学.正如美国同行所指出的,如果一个大学生学了一年微积分后就终止了数学学习,"或许正当我们进入 21 世纪时,最要指责的是他(或她)学到很少或者甚至没有学到比 18 世纪的数学更现代的数学了."[1]美国大学生如此,中国大学生也如此.这能责怪学生吗?不能!改革才是唯一出路.为了改变这一状况,在学校的支持下,我们开设了这门课程.

其次,国际数学联盟(IMU)专门将 2000 年定为"**世界数学年**",其主要宗旨就是"**使数学及其对世界的意义被社会所了解,特别是被普通公众所了解**".我们认为,作为数学工作者,有责任有义务向人们乃至社会宣传数学对社会进步的作用,宣传"数学就在我们身边",让数学成为人们生活的组成部分.

再次,市场上已经出现了模糊洗衣机等家用电器,到底什么是模糊?多大年龄的人才算青年人?英国的海岸线到底有多长?对诸如此类的问题,我们认为,当代大学生应该有所了解.本书选择讲授模糊数学方法、分形几何方法,也考虑到这两个新兴的数学分支都诞生在 20 世纪下半叶(模糊数学诞生在 60 年代,分形几何诞生在 70 年代),离我们现在还不远,还比较"现代".它们的理论基础正在不断地发展与逐步完善;在方法应用方面,二者都是应用走在理论的前面,表现出强大的生命力,并且方法应用易于被学生接受.

基于以上考虑,我们编写了这本《现代数学方法选讲》.在编写时注重问题的实际背景与概念的直观描述,内容选择上,注意循序渐进,从实际与直观出发,通

俗易懂,具有科普性;注重理论联系实际,具有应用性;开发了与教材配套使用的计算机应用软件,具有可操作性.

本书由谢季坚主编.谢季坚负责编写1、2讲;邓小炎负责编写3、4讲;刘承平、邓小炎开发了相应的计算机应用软件.

本书由武汉理工大学胡则成教授审稿.

在本书出版的时候,我们感谢教育部,是教育部富有远见地推出了《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》,为我们提供了一个参与的机遇.还要感谢教育部高教司、《面向21世纪高等农林教育教学内容和课程体系改革计划》工作协调指导小组、04—6项目组、华中农业大学及教务处、理学系、数学教研室所给予的支持与帮助.

武汉理工大学胡则成教授在百忙之中为本书审稿,并提出许多中肯意见与建议.李启文副教授、刘承平副教授、高红工程师为本书的出版付出许多心血.对于他们的支持与帮助,我们表示衷心的感谢.

最后,对高等教育出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动和大力支持,我们表示衷心的感谢.

由于编写水平所限,恳请读者和使用本书的教师对书中不妥之处不吝赐教.

编者

2000年5月于

武昌狮子山

目　　录

第 1 讲　模糊数学基础

由于模糊概念(现象)在现实世界中普遍存在,因此,用数量化方法来研究模糊概念(现象)是一种发展趋势.本讲主要介绍模糊数学的基础知识:集合、映射、关系、模糊集合及其运算以及模糊集合的应用.

1.1　模糊数学概述

1965 年美国加利福尼亚大学著名的控制论专家扎德(Zadeh L A, 1921—)教授在《Information and Control》杂志发表了一篇开创性论文"Fuzzy sets"(模糊集合)[2],这标志着模糊数学的诞生.

扎德 1921 年 2 月 4 日出生于前苏联巴库(现今阿塞拜疆共和国首都).1942 年获伊朗德黑兰大学电机工程系学士,1944 年获美国麻省理工学院电机工程系硕士,1946 年获美国哥伦比亚大学电机工程博士.1956 年,他是普林斯顿高级研究院的访问成员.1957 年,在哥伦比亚大学担任教授职务.1959 年起,他在加利福尼亚大学电机工程系任教授.在 1965 年以前,扎德的工作集中在系统理论和决策分析方面.从 1965 年开始,他的主要的研究兴趣转移到发展模糊集理论和将其应用于人工智能、语言、逻辑、决策分析和人类系统的分析方法.自从"信息与控制"杂志发表了他的开创性论文"模糊集合"后,扎德被世界公认为是对系统理论及其应用这一领域最有贡献的人之一.被人们称为"模糊集之父"[3].

与其他数学分支一样,模糊数学也是由于科学技术的发展与社会实践的需要而产生的.模糊概念(现象)在现实世界中普遍存在.例如,厚,薄,快,慢,大,小,长,短,高,低,重,轻,强,弱,硬,软,稠,稀;白天,黑夜,黎明,中午,傍晚,多云,阴天,晴天等;在科学技术、经济管理中模糊概念(现象)也是无处不在.如感冒,胃病,心脏病;高产作物,早熟品种,蔬菜,水果,动物,植物,微生物;通货膨胀,经济繁荣,经济萧条,劳动密集型企业,信得过产品,贫困,温饱,小康,富裕等都是模糊概念.当代科技发展的趋势之一,就是各个学科领域都要求定量化、数学化.当然也迫切要求将模糊概念(现象)定量化、数学化,这就促使人们去寻求一种研究和处理模糊概念(现象)的数学方法.

众所周知,传统的经典数学是以精确性为特征的.然而,与精确性相悖的模糊性并不完全是消极的.比如,要你某日上午 10 时到校门口去迎接一位"高个子

长头发大胡子戴宽边棕色眼镜的青年男生”，尽管这里只提供一个确定信息——男生，其他都是模糊信息，经过大脑去识别，你仍可以不大费力地迎接到这位男生．如果这件事让计算机来做，那就要测量人的身高多少厘米，头发多少根，头发长度多少，……，一一记录在案．偶尔，这位男生的头发在中途掉了一根，计算机就不认识了．由此可见，太精确了未必一定是好事．

模糊数学绝不是把数学变成模模糊糊的东西，它同样具有数学的特性：条理分明，一丝不苟．即使描述模糊概念（现象），也会描述得清清楚楚．由扎德教授创立的模糊数学是继经典数学、统计数学之后数学的一个新发展．统计数学将数学应用范围从必然现象领域扩大到偶然现象领域，模糊数学则把数学的应用范围从精确现象扩大到模糊现象的领域．

在科学技术领域和客观世界中，人们所遇到的各种量大体上可以分为两大类：确定性的与不确定性的，而不确定性的量又分为随机性的与模糊性的．人们正是用三种数学来分别刻画客观世界中不同的量[4]：

$$\text{量}\begin{cases}\text{确定性——经典数学；}\\ \text{不确定性}\begin{cases}\text{随机性——随机数学；}\\ \text{模糊性——模糊数学．}\end{cases}\end{cases}$$

为了弄清上述两种不确定性，这里讨论一下它们的区别．

随机性的不确定性，也就是概率的不确定性，主要与事件的发生有关．例如，“明天有雨”，“掷一粒骰子出现 6 点”等，它们的发生是一种偶然现象，具有不确定性．在这里事件本身（“有雨”，“出现 6 点”）是确定的，而事件发生与否不确定．只要时间过去了，到了明天，“明天有雨”是否发生就变成确定的了；只要做一次实验，“6 点”是否出现就变成确定的了．而模糊性的不确定性则不相同，如“青年人”，“高个子”的不确定性，即使到了明天，或者做一次实验，它们仍是不确定的．这主要是事件本身（“青年人”，“高个子”）是不确定的，具有模糊性，它是由概念、语言的模糊性产生的．

模糊数学诞生至今已经三十多年了．1976 年传入我国后，得到了迅速发展．1980 年成立了中国模糊数学与模糊系统学会，1981 年创办《模糊数学》杂志（武汉，华中工学院），1987 年创办《模糊系统与数学》杂志（长沙，国防科技大学）．我国已经成为模糊数学研究的四大中心（美国、欧洲、日本、中国）之一．

模糊数学的应用几乎涉及到国民经济的各个领域与部门．特别值得一提的是，模糊理论在智能计算机的应用与开发上将起到重要作用．模糊评判决策在工程管理、经济管理中也有广泛应用．20 世纪 80 年代以来，空调器、洗衣机等家用电器中已广泛采用了模糊控制技术，日本在这方面已走在世界的前列．我国也于 20 世纪 90 年代初在杭州生产了第一台模糊洗衣机．模糊数学甚至已开始进入普通百姓家庭．

1.2 集合·映射·关系

1.2.1 经典集合

1.2.1.1 集合及其表示

集合是现代数学的一个基础概念.一些不同对象的全体称为集合,也简称为集.常用大写英文字母 A,B,X,Y 等表示.本书有时称集合为经典集合,这是为了区别于模糊集合.集合内的每个对象称为集合的元素,常用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.a 属于 A,记为 $a\in A$;a 不属于 A,记为 $a\notin A$.

不含有任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$.

只含有限个元素的集合,称为有限集,有限集所含元素的个数称为集合的基数.包含无限个元素的集合称为无限集.以集合作为元素所组成的集合称为集合族.所谓论域是指所论及对象的全体,它也是一个集合,常用 X,Y,U,V 等表示.

集合的表示法主要有两种:

(1)枚举法.如由 15 以内的质数组成的集合可表示为

$$A=\{2,3,5,7,11,13\};$$

$$\text{自然数集 } \mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}.$$

(2) 描述法.使 $P(x)$ 成立的一切 x 组成的集合可表示为 $\{x\mid P(x)\}$,如 $\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$ 是实数集,简记为 $\mathbf{R}$;又如集合 $B=\{x\mid x^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$,实际上是由元素 -1 与 1 组成的集合.

经典集合具有两条最基本的属性:元素彼此相异及范围边界分明.一个元素 x 与集合 A 的关系是:要么属于 A,要么不属于 A,二者必居其一.

例如,把某班男生组成的集合记为 A,即 $A=\{\text{男生}\}$.那么,这个班的每个学生之间,彼此不相同,而且可以判明每个学生是否属于 A.如果以某班“高个子”学生为元素,就不能组成一个经典集合,因为“高个子”无分明界限.

1.2.1.2 集合的包含

集合的包含概念是集合之间的一种重要相互关系.

定义 1 设集合 A 和 B,若集合 A 的每个元素都属于集合 B,即 $x\in A\Rightarrow x\in B$,则称 A 是 B 的子集,记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.读作“A 包含于 B 中”或“B 包含 A”.

显然 $A\subseteq A$.空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing\subseteq A$.又若 $A\subseteq B,B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

定义 2　设集合 A 和 B，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记为 $A=B$.

定义 3　设有集合 U，对于论域中的任何集合 A，总有 $A\subseteq U$，则称 U 为全集.

全集是具有相对性的概念.

例如，实数集对于整数集、有理数集而言是全集，而整数集对于偶数集、奇数集而言是全集.

定义 4　设有集合 A，A 的所有子集所组成的集合称为 A 的幂集，记为 $\mathscr{T}(A)$，即 $\mathscr{T}(A)=\{B\mid B\subseteq A\}$.

例 1　设 $A=\{a,b\}$，则 A 的幂集为 $\mathscr{T}(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

由定义 4 知，幂集是集合族.

1.2.1.3　集合的运算

定义 5　设 $A,B\in\mathscr{T}(X)$，X 是论域，规定

$$A\cup B\xlongequal{\text{def}}\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}\text{，称为 }A\text{ 与 }B\text{ 的并集；}$$

$$A\cap B\xlongequal{\text{def}}\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}\text{，称为 }A\text{ 与 }B\text{ 的交集；}$$

$$A^c\xlongequal{\text{def}}\{x\mid x\notin A\}\text{，称为 }A\text{ 的余集.}$$

1.2.1.4　集合运算（$\cup$，$\cap$，^{c}）的性质

定理 1　设 $A,B,C\in\mathscr{T}(X)$，X 是论域，则有

(1) 幂等律：$A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

(2) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(3) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(4) 吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$；

(5) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(6) 0－1 律：$A\cup U=U$，$A\cap U=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；

(7) 还原律：$(A^c)^c=A$；

(8) 对偶律：$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$；

(9) 排中律：$A\cup A^c=U$，$A\cap A^c=\varnothing$.

这些性质均可由 $\cup$，$\cap$ 及求余集的定义直接推出，集合的并、交运算可推广到任意多个集合的并、交运算.

1.2.1.5　集合的直积

在日常生活中,有许多事物是成对出现的,且具有一定的顺序.例如,上、下;左、右;平面上点的坐标等.任意两个元素 x 与 y 配成一个有序的对 (x,y),称为 x 与 y 的序对,有序是指当 $x\neq y$ 时,$(x,y)\neq(y,x)$;$(x,y)=(x',y')\Leftrightarrow x=x'$,$y=y'$.

定义 6 设 X,Y 是两个集合,由 X 的元素与 Y 的元素配成的全体序对组成一个集合,称为 X 与 Y 的直积(或笛卡尔积),记为 $X\times Y$.即

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}.$$

例 2 设 $X=\{1,2\}$,$Y=\{0,2\}$,则

$$X\times Y=\{(1,0),(1,2),(2,0),(2,2)\};$$
$$Y\times X=\{(0,1),(0,2),(2,1),(2,2)\}.$$

一般地,$X\times Y\neq Y\times X$.

1.2.2 映射与扩张

1.2.2.1 映射

定义 7 设 X 与 Y 是两个非空集,如果存在一个对应规则 f,使得对于任一元素 $x\in X$,有唯一元素 $y\in Y$ 与之对应,则称 f 是从 X 到 Y 的映射,记为

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x)=y\in Y. \end{aligned}$$

y 称为 x 在映射 f 下的象,x 称为原象.

集 X 称为映射 f 的定义域,记为 $D(f)$.集

$$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$$

称为映射 f 的值域,记为 $R(f)$.一般地,$f(X)\subset Y$.若 $f(X)=Y$,则称 f 是从 X 到 Y 的满映射.

映射概念是函数概念的推广.微积分中定义在区间 $[a,b]\subset\mathbf{R}$ 上的一元函数 $f(x)$,就是从 $[a,b]$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射,即

$$\begin{aligned} f:[a,b] &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto f(x)=y. \end{aligned}$$

定义 8 若映射 $f:X\longrightarrow Y$,对 $\forall x_1,x_2\in X$,成立 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 是从 X 到 Y 的一一映射.如果 $f:X\longrightarrow Y$ 是一一的满映时,则称 f 为从 X 到 Y 的一一对应.

例 3 设映射 $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$,$f(x)=\sin x$.$f$ 不是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的满映射,而是 $\mathbf{R}$ 到区间 $[-1,1]$ 的满映射.

例 4 $C[a,b]$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实连续函数集.定义 $C[a,b]$ 到 $\mathbf{R}$ 上的一个映射

$$f:\varphi(x)\longmapsto\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x,\varphi(x)\in C[a,b].$$

这是一个满映射，但不是一一映射.

例 5　设 $X=\{a,b,c,d\}$，$Y=\{1,2,3,4\}$，f 是从 X 到 Y 的映射，$f=\{(a,1),(b,3),(c,4),(d,2)\}$，则 f 是满映射，又是一一映射，所以 f 是一一对应.

1.2.2.2　集合的特征函数

定义 9　设 $A\in\mathscr{T}(X)$，具有如下性质的映射

$\chi_A: X\longrightarrow\{0,1\}$

$$x\longmapsto\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

称为集合 A 的特征函数.

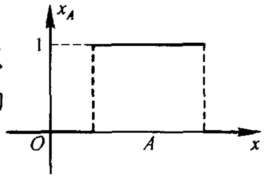

图 1－1

由定义可知，集合 A 由特征函数 χ_A 唯一确定. 以后总是把集合 A 与特征函数 $\chi_A(x)$ 看作是同一的(图 1－1).

下面是特征函数与集合之间的几个基本关系：

(1) $A=U\Leftrightarrow\chi_A(x)\equiv1$，$A=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A(x)\equiv0$；

(2) $A\subseteq B\in\mathscr{T}(U)\Leftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$；

(3) $A=B\in\mathscr{T}(U)\Leftrightarrow\chi_A(x)=\chi_B(x)$. 这个性质表明 U 的任一子集 A 完全由它的特征函数确定.

特征函数还满足：

$\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)\vee\chi_B(x)$；

$\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\wedge\chi_B(x)$；

$\chi_{A^c}(x)=1-\chi_A(x)$.

此处"$\vee$"是上确界"sup"，"$\wedge$"是下确界"inf".

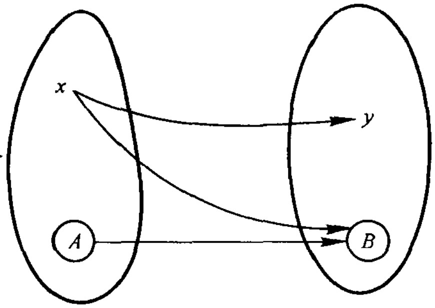

图 1－2

1.2.2.3　映射的扩张

上述映射概念实际上是把点 x 映射为点 $y=f(x)$. 但在实际中往往需要将点映射为集合(图 1－2).

定义 10　设 $f: X\longrightarrow Y$ 或 $x\longmapsto f(x)$，则称映射

$$f: X\longrightarrow\mathscr{T}(Y)$$
$$x\longmapsto f(x)=B\in\mathscr{T}(Y)$$

为从 X 到 Y 的点集映射.

定义 11 设 $T:X\longrightarrow Y$ 或 $x\longmapsto f(x)$,则称映射

$$T:\mathscr{T}(X)\longmapsto\mathscr{T}(Y)$$
$$A\longmapsto T(A)$$

为从 X 到 Y 的集合变换.

例 6 设 $X=\{a,b\}$,$Y=\{1,2,3\}$,则 $\mathscr{T}(X)=\{\varnothing,X,\{a\},\{b\}\}$,$\mathscr{T}(Y)=\{\varnothing,Y,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$,令 $f:a\longmapsto\{1\}$,$b\longmapsto\{2,3\}$;

令 $T:\varnothing\longmapsto\varnothing$,$\{a\}\longmapsto\{1,2\}$,$\{b\}\longmapsto\{1\}$,$X\longmapsto Y$,则 f 是从 X 到 Y 的点集映射,而 T 是从 X 到 Y 的集合变换.

1.2.3 二元关系

关系是一个基本概念.在日常生活中有“朋友关系”、“师生关系”等,在数学上有“大于关系”、“等于关系”等.而序对又可以表达两个对象之间的关系.于是,引进下面的定义.

定义 12 设 $X,Y\in\mathscr{T}(U)$,$X\times Y$ 的子集 R 称为从 X 到 Y 的二元关系.特别地,当 $X=Y$ 时,称之为 X 上的二元关系,以后把二元关系简称为关系.

若 $(x,y)\in R$,则称 x 与 y 有关系,记为 xRy;若 $(x,y)\notin R$,则称 x 与 y 没有关系,记为 $x\bar{R}y$. R 的特征函数

$$\chi_R(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } xRy \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } x\bar{R}y \text{ 时}.\end{cases}$$

例 7 设 $X=\{1,4,7,8\}$,$Y=\{2,3,6\}$,定义关系 $R\Leftrightarrow x<y$,称 R 为“小于”关系.于是

$$R=\{(1,2),(1,3),(1,6),(4,6)\}.$$

例 8 设 $X=\mathbf{R}$,则子集

$$R=\{(x,y)\mid(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R},y=x\}$$

是 $\mathbf{R}$ 上元素间的“相等”关系.

关系的性质主要有:自反性、对称性和传递性.

定义 13 设 R 是 X 上的关系

(1)若 $\forall x\in X$,有 xRx,即 $\chi_R(x,x)=1$,则称 R 是自反的.

(2)$\forall x,y\in X$,若 $xRy\Rightarrow yRx$,即 $\chi_R(x,y)=\chi_R(y,x)$,则称 R 是对称的.

(3)$\forall x,y,z\in X$,若 xRy,$yRz\Rightarrow xRz$,即 $\chi_R(x,y)=1$,$\chi_R(y,z)=1\Rightarrow\chi_R(x,z)=1$,则称 R 是传递的.

例 9 设 $\mathbf{N}$ 为自然数集,$\mathbf{N}$ 上的关系“$<$”具有传递性,但不具有自反性和对称性.

例 10　设 $\mathscr{T}(X)$为 X 的幂集，$\mathscr{T}(X)$上的关系"$\subseteq$"具有自反性和传递性，但不具有对称性.

1.2.3.1　关系的矩阵表示法

关系的表示方法很多，除了用直积的子集表示外，对于有限论域情形，用矩阵表示在运算上更为方便.

定义 14　设两个有限集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，R 是从 X 到 Y 的二元关系，即

R	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	r_{11}	r_{12}	$\cdots$	r_{1n}
x_2	r_{21}	r_{22}	$\cdots$	r_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	r_{m1}	r_{m2}	$\cdots$	r_{mn}

其中 $r_{ij}=\begin{cases}1, & 当\ x_iRy_j;\\ 0, & 当\ x_i\bar{R}y_j,\end{cases}$

称 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$为 R 的关系矩阵，记为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn}\end{bmatrix}.$$

由定义可知，关系矩阵中的元素或是 0 或是 1. 在数学上把诸元素只是 0 或 1 的矩阵称为布尔(Boole G)矩阵. 因此，任何关系矩阵都是布尔矩阵.

例 11　例 7 中"<"关系 R 的关系矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

1.2.3.2　等价关系

为了将集合的元素进行分类，下面引进一个重要的关系——等价关系.

定义 15　设集合 X 上的二元关系 R 具有自反性、对称性和传递性，则称 R 是 X 上的等价关系，此时 xRy 又称为 x 等价于 y，记为 $x\simeq y$.

比如，"同龄关系"，数学上的"="都是等价关系，而朋友关系不是等价关系，因为它不具有传递性.

集合 X 上等价关系的重要性在于可以将集合 X 分成适当的子集(实际上就是将集合 X 进行分类)，为此又引进下面的定义.

定义 16 设 X 是非空集，X_i 是 X 的非空子集，若 $\bigcup X_i = X$，且 $X_i \cap X_j = \varnothing$ $(i \neq j)$，则称集合族 $\{\cdots, X_i, \cdots\}$ 为 X 的一个划分，称集 X_i 为这个划分的一个类，以 $\prod$ 表示为

$$\prod = \{X_i \mid X_i \subseteq X, \text{且} \forall x \in X \text{ 恰属于 } X_i\}.$$

划分 $\prod$ 的每个元素称为一个块，也称为划分的一个类.

当划分的块数为有限时，划分 $\prod$ 可表示为

$$\prod = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, n \text{ 为块数}.$$

显然，对有限集而言，它的划分块数一定是有限的.

例 12 设 $X = \{1,2,3,4\}$，则 $\prod_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$，$\prod_2 = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$，$\prod_3 = \{\{1,2,3\},\{4\}\}$，$\prod_4 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$，$\prod_5 = \{\{1,2,3,4\}\}$ 等都是 X 的划分，但 $\prod' = \{\{1\},\{2,3\}\}$，$\prod'' = \{\{1\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ 等不是 X 的划分.

下面的定理说明了集合 X 上的等价关系与划分(即分类)之间的联系.

定理 2 集合 X 上的任一等价关系可以确定 X 的一个划分(即分类)；反过来，集合 X 的任一划分(即分类)可以确定 X 上的一个等价关系.

例 13 设论域 $X = \{$某高校全体本科生(四年制)$\}$，在 X 上定义了 $R_1 =$"同年级关系"，显然"同年级关系"是一个等价关系. 因此，关系 R_1 把 X 划分为四个不同的年级：

$$X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\},$$

其中 X_i 表示 i 年级，$i = 1,2,3,4$. 这就表明，论域 X 上的等价关系 R_1(同年级关系)可以确定一个划分(分类)：

$$X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}.$$

例 14 设论域 $X = \{$某高校学生$\}$，在论域 X 上有一个划分(分类)：

$X = \{$男生，女生$\} = \{Y_1, Y_2\}$，因为这个划分是按性别划的，所以这个划分可以确定 X 上的一个关系 $R_2 =$"同性别关系". 显然，"同性别关系" $= R_2$ 是一个等价关系.

1.2.3.3 相似关系

与等价关系一样，相似关系的应用也是非常广泛的.

定义 17 设 R 是集合 X 上的关系，若关系 R 是自反的、对称的，则称 R 是相似关系.

例如朋友关系、同学关系都是相似关系.

例 15 设 $X = \{1\,244, 157, 287, 456, 690\}$，定义在 X 上的关系 $R = \{(x, y) \mid x, y \in X, x \text{与} y \text{ 有相同的数字}\}$，则 R 为相似关系，其相似矩阵为