复变函数

渡部隆一
〔日〕宫崎　浩　著
远藤静男

工科数学丛书 4 习题集

工科数学丛书之四

复 变 函 数

（习 题 集）

渡部隆一
〔日〕宫崎 浩 著
远藤静男

王 运 达 译

赵 惠 元
熊 民 旦 校

辽 宁 人 民 出 版 社

1 9 8 1 年 · 沈阳

译 者 的 话

这套丛书译自日本庆应大学教授田岛一郎和东京大学名誉教授近藤次郎主编的《工科の数学》。全书共分五册：《微分·积分》《线性代数·向量分析》《微分方程·傅里叶分析》《复变函数》和《统计·数值分析》。该丛书逻辑清晰，结构严谨，取材广泛，内容新颖；每册编有相应的习题集，并与基础部分紧密结合。该丛书当前在日本国内各工科大学已被广为采用，并深受读者欢迎。

为适应我国工科院校广大师生与科技人员的学习需要，特将此书全部译出。由于水平有限，误译之处在所难免，恳切地希望读者提出批评指正。

参加本丛书翻译的有：王运达、潘德惠、刘俊山、于溶波、傅文章、关颖男等同志；总校：赵惠元教授和熊民旦同志。在翻译过程中，党恺谦和田永成同志做了部分工作，在此，谨致谢意。

一九八〇年五月

目　　录

第一章 复 平 面

1·1 复 平 面

重点

1° **复数的四则** 对于 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$

$$z_1=z_2 \Longleftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2 \tag{1}$$

$$z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+i(y_1 \pm y_2)\quad (\pm\text{号顺序相同}) \tag{2}$$

$$z_1 \cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1) \tag{3}$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2}+i\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2}\quad (z_1 \neq 0) \tag{4}$$

对于 $z=x+iy$, $x=\mathrm{Re}(z)$ 称为z的实部（实数部分），$y=\mathrm{Im}(z)$ 称为 z 的虚部（虚数部分），$\bar{z}=x-iy$ 称为 z 的共轭复数，$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 称为 z 的绝对值。

$$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z),\quad z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}(z) \tag{5}$$

$$\bar{\bar{z}}=z,\ |z|=|\bar{z}|,\ z\bar{z}=|z|^2 \tag{6}$$

$$\overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2,\ \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2,\ \overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}\quad (z_1 \neq 0) \tag{7}$$

$$|z_1z_2|=|z_1|\ |z_2|,\ \left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{|z_2|}{|z_1|}\qquad (z_1 \neq 0) \tag{8}$$

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|\quad (\text{三角不等式}) \tag{9}$$

在平面上选择一种直角坐标轴，将此平面上的点 $P(x,y)$

与复数 $z=x+iy$ 等同之时，此平面称为**复平面**或**高斯平面**。

复平面上的点 $z=x+iy$ 在极坐标

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

下的表达式

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \tag{10}$$

称为z的**极形式**。

$r=|z|\quad(\geqslant 0)$，θ 称为 z 的**幅角**，记做 $\arg z$。但对于 $z=0$，$\arg 0$ 没有定义，规定 $r=0$。对于 $z(\neq 0)$，$\arg z$ 不是唯一地决定，但如规定 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$，则唯一地决定，称之为幅角的**主值**，记做 $\mathrm{Arg}z$。

$$\arg z=\mathrm{Arg}z+2n\pi,\quad -\pi<\mathrm{Arg}z\leqslant\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{11}$$

当 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ 时

$$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \tag{12}$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}\{\cos(\theta_2-\theta_1)+i\sin(\theta_2-\theta_1)\}\quad(z_1\neq 0) \tag{13}$$

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\Rightarrow z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\quad(n\text{：整数})$$

（**棣美弗定理**）　(14)

2° **复平面的点集**　复平面 $\boldsymbol{C}$ 上两点 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 的距离由 $|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$而定。

对于集D内的任意点 z，存在 $|z|\leqslant K$ 的常数K时，则称D**有界**。

以 z_0 为中心，半径 $\varepsilon>0$ 的圆的内部，即集$U_\varepsilon(z_0)=\{z\mid |z-z_0|<\varepsilon\}$称为 z_0 的 ε **邻域**，对于各个 ε，总称 z_0 的ε邻域为 z_0 的**邻域**。属于集D的点 z_0 具有包含于D的 z_0 的某邻域时，z_0称为D的**内点**。又当点 z_1 的某邻域不包含D的任何一点时，z_1称为D的**外点**。既不是D的内点，又不是D的外点的点称为D的**边界点**，D的边界点的全体称为D的**边界**。在点 z_2 的任何邻域里都包含无穷多个D的点时，称 z_2 为D的**聚点**。

是D的点，但不是D的聚点称为D的**孤立点**.

只由内点而成的集称为**开集**，当某集包含它的所有聚点时，则称此集为**闭集**.

当集D的任何二点都能用D内的连续曲线连结起来时，则称D**连通**，连通的开集称为**域**。给域添上它的边界点而得的闭集称为**闭域**.

例题1·1·1 （1）将下列复数表示成 $x+iy$ 的形状.

(a) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$ (b) $\dfrac{i}{1-i}+\dfrac{1-i}{i}$

(c) $\left(\dfrac{3+4i}{1-2i}\right)^2$

（2）将下列复数表示成极形式.

(a) $1-\sqrt{3}i$ (b) $-5i$ (c) $\sqrt{-i}$

【解】 （1） (a) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}$

$$=\frac{(1-i)^2}{2}=-i$$

$$\therefore\quad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8=(-i)^8=1$$

(b) $\dfrac{i}{1-i}+\dfrac{1-i}{i}=\dfrac{i^2+(1-i)^2}{(1-i)i}=\dfrac{-1-2i}{1+i}$

$$=\frac{(-1-2i)(1-i)}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

(c) $\dfrac{3+4i}{1-2i}=\dfrac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{-5+10i}{5}=-1+2i$

$$\therefore\quad \left(\frac{3+4i}{1-2i}\right)^2=(-1+2i)^2=-3-4i$$

(2) (a) $|1-\sqrt{3}i|=2$, $\operatorname{Arg}(1-\sqrt{3}i)=-\pi/3$

$$\therefore\quad 1-\sqrt{3}i=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$$

(b) $|-5i|=5$, $\operatorname{Arg}(-5i)=-\pi/2$

$$\therefore\quad -5i=5\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=5\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$

(c) 令$z=\sqrt{-i}$，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$。由 $z^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)=-i=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$ 可见

$$r^2=1,\ 2\theta=\frac{3}{2}\pi+2k\pi \qquad (k\ 是整数)$$

$$\therefore\quad r=1,\ \theta=\frac{3}{4}\pi+k\pi \qquad (k\ 是整数)$$

当 $k=0$ 时，$\sqrt{-i}=\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi$

当 $k=1$ 时，$\sqrt{-i}=\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi$

类题 1·1·1[1] (1)将下列复数表示成 $x+iy$ 的形状。

(a) $(1+i)^3+(1-i)^3$ (b) $\left(\dfrac{5}{2+i}\right)^2$

(2) 将下列复数表示成极形式。

(a) -1 (b) $(1+\sqrt{3}i)^n$（n 是正整数）

例题1·1·2 假设 $z=x+iy$，$y\neq0$，$z\neq\pm i$，试证只有 $x^2+y^2=1$ 时$\dfrac{z}{1+z^2}$才是实数。

1）意思是同类题的代表。（译者注）

【解】 $\frac{z}{1+z^2}=$实数$\Longleftrightarrow\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$

$$\Longleftrightarrow z+z\bar{z}^2=\bar{z}+z^2\bar{z}\Longleftrightarrow(z-\bar{z})(1-z\bar{z})=0$$

从 $y\neq0$ 得 $z-\bar{z}\neq0$，故

$(z-\bar{z})(1-z\bar{z})=0\Longleftrightarrow1-z\bar{z}=1-|z|^2=0\Longleftrightarrow|z|^2=1$

$$\Longleftrightarrow x^2+y^2=1$$

类题1·1·2 假设 $z=x+iy$，$|x|\neq|y|$，试证只有 $xy=0$ 时 z^4 才是实数。

例题1·1·3 试证下列等式、不等式。

（1）$\frac{1}{\sqrt{2}}\{|x|+|y|\}\leqslant|z|\leqslant\{|x|+|y|\}$

（但设 $z=x+iy$）

（2）$|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

（3）当 $|\alpha|<1$，$|\beta|<1$时，$\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|<1$。

【解】（1）$2|z|^2-(|x|+|y|)^2$

$=2(x^2+y^2)-(x^2+y^2+2|x||y|)=(|x|-|y|)^2\geqslant0$

$\therefore\ \frac{1}{2}(|x|+|y|)^2\leqslant|z|^2\quad\therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}}\{|x|+|y|\}\leqslant|z|$

又因 $|z|=|x+iy|\leqslant|x|+|iy|=|x|+|y|$，所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\{|x|+|y|\}\leqslant|z|\leqslant\{|x|+|y|\}$$

（2）$|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$+(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$

$=|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+|z_1|^2+|z_2|^2$

$+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

（3）$1-\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|^2=1-\frac{(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})}{|1-\bar{\alpha}\beta|^2}$

$$=\frac{(1-\bar{\alpha}\beta)(1-\alpha\bar{\beta})-(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})}{|1-\bar{\alpha}\beta|^2}$$

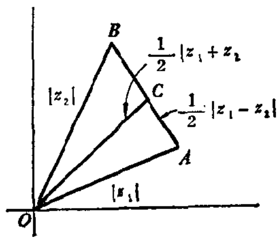
$$=\frac{1-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+|\alpha|^2|\beta|^2-|\alpha|^2-|\beta|^2+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta}{|1-\bar{\alpha}\beta|^2}$$

$$=\frac{(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2)}{|1-\bar{\alpha}\beta|^2}$$

从 $|\alpha|<1$，$|\beta|<1$ 得 $1-|\alpha|^2>0$，$1-|\beta|^2>0$。

$$\therefore\quad 1-\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|^2>0\qquad\therefore\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|<1$$

注 等式（2）以三角形的中线定理而知名。在复平面上，假设用O，z_1，z_2 作成三角形，又设z_1，z_2 为 A，B；AB 的中点为C。



$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(z_1+z_2),$$

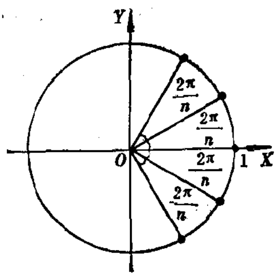
$$\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}(z_1-z_2)$$

从（2）得

$$|z_1|^2+|z_2|^2=2\left\{\left|\frac{1}{2}(z_1-z_2)\right|^2+\left|\frac{1}{2}(z_1+z_2)\right|^2\right\}$$

故 $OA^2+OB^2=2(OC^2+AC^2)$

例题1·1·4 试求 1 的n次根，并在复平面上画出图来。



【解】设$z^n=1$，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$。

从 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=1$得

$r^n=1$，$n\theta=2k\pi$ （k 是整数）

$$\therefore\quad r=1,\theta=\frac{2k}{n}\pi\qquad(k\text{ 是整数})$$

$$\therefore\quad z=\left(\cos\frac{2k}{n}\pi+i\sin\frac{2k}{n}\pi\right)\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

这些点是内接于单位圆，以1为一顶点的正 n 角形的顶点。

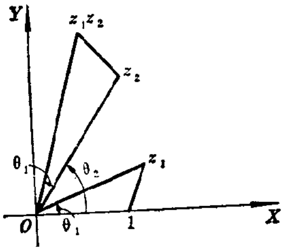
类题1·1·3 试求$\sqrt[5]{-1}$，并在复平面上画出图来。

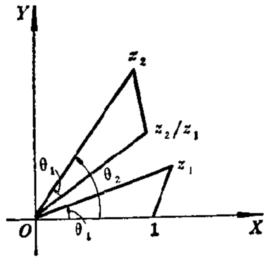
例题1·1·5 在复平面上，作 z_1z_2, $z_2/z_1(z_1\neq 0)$ 的图。

【解】 设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$.
从 $z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$ 得

$$1:|z_1|=|z_2|:|z_1z_2|,\quad \angle 1Oz_1=\angle z_2O(z_1z_2)$$

$$\therefore\quad \triangle 1Oz_1\backsim\triangle z_2O(z_1z_2)\quad（参照下左图）$$





再从$\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{r_2}{r_1}\{\cos(\theta_2-\theta_1)+i\sin(\theta_2-\theta_1)\}$ 得

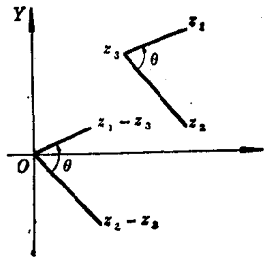
$$1:\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=|z_1|:|z_2|,\qquad \angle 1Oz_1=\angle\left(\frac{z_2}{z_1}\right)Oz_2$$

$$\therefore\quad \triangle 1Oz_1\backsim\triangle\left(\frac{z_2}{z_1}\right)Oz_2\ （参照上右图）$$

例题1·1·6 （1）z_1, z_2, z_3 在一直线上的条件是$\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$为实数。试证明之。

（2）z_1, z_2, z_3, z_4 在同一圆周上或同一直线上的条件是 $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\cdot\dfrac{z_2-z_4}{z_1-z_4}\right)=0$. 试证明之。

【解】（1）z_1, z_2, z_3 在一直线上的条件是以线段 z_2z_3 与线段 z_1z_3 为两边的角$\angle z_2z_3z_1$是 π 的整数倍，即将 z_3 平移到原点来考虑，则



$$\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)=n\pi$$

故$\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$为实数是充要条件。

（2）z_1, z_2, z_3, z_4 在同一圆周上或同一直线上的条件是$\angle z_2z_3z_1-\angle z_2z_4z_1=n\pi$。故

$$\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\Big/\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}\right)$$

$$=\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\cdot\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}\right)=n\pi$$

$$\therefore\quad \mathrm{Im}\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\cdot\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}\right)=0$$

类题1·1·4 不同三点z_1, z_2, z_3为等边三角形的顶点的条件是$\dfrac{1}{z_1-z_2}+\dfrac{1}{z_2-z_3}+\dfrac{1}{z_3-z_1}=0$。试证明之。

例题1·1·7 图示满足下列条件的点的存在范围。

（1）$\mathrm{Re}(z^2)\leqslant 1$　　（2）$|\arg z|<\pi/3$

（3）$|1/z|<3$　　（4）$\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|>a\ (>0)$

（5）$|z-1|+|z+1|<4$　　（6）$|z+1|\cdot|z-1|<1$

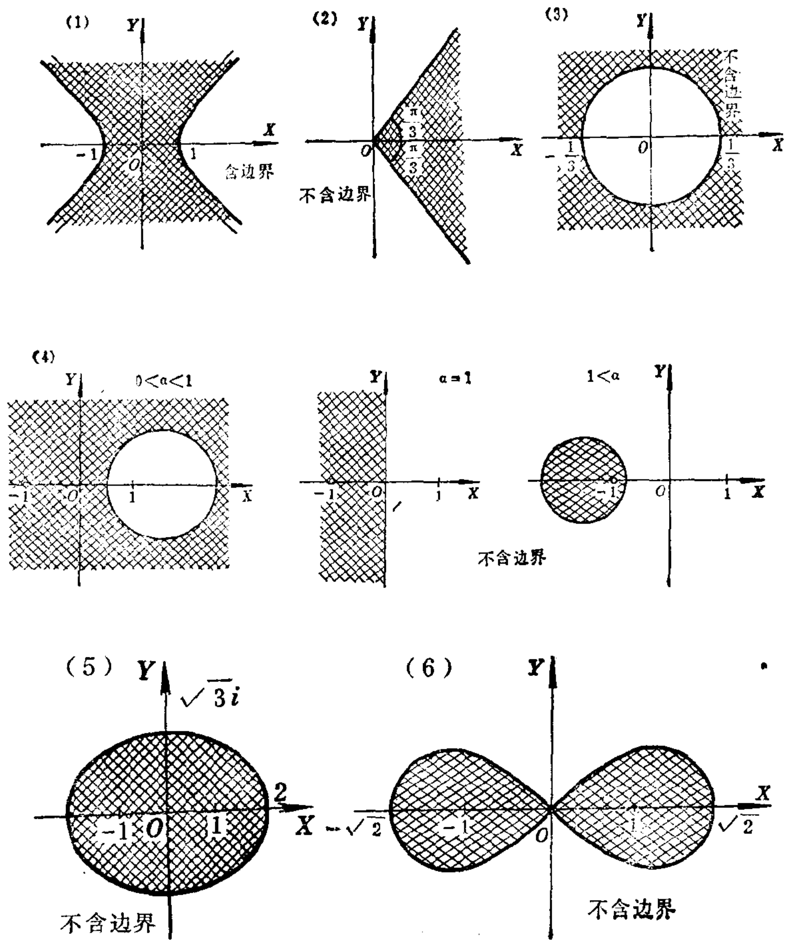
【解】（1）当 $z=x+iy$ 时，$\mathrm{Re}(z^2)=x^2-y^2$。

$$\therefore\quad \mathrm{Re}(z^2)\leqslant 1\Longleftrightarrow x^2-y^2\leqslant 1$$

边界为 $x^2-y^2=1$（第（1）图）。

（2）$|\arg z|<\pi/3\Longleftrightarrow -\pi/3<\arg z<\pi/3$

边界是 $\arg z=\pm\pi/3$，即两条以原点为端点的射线（第（2）图）。



（3） $|1/z|<3 \Longleftrightarrow |z|>\frac{1}{3}$

边界是以原点为中心，半径为$\frac{1}{3}$的圆（第（3）图）

（4）边界$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=\alpha$ 是到点1，－1的距离比为一定的点的轨迹，故当 $\alpha\neq1$ 时是阿勒罗纽斯圆，$\alpha=1$ 时，是连结（－1）与1的线段的垂直平分线（第（4）图）．

（5）因为边界 $|z-1|+|z+1|=4$ 到点1，－1的距离之和一定（＝4），所以是椭圆（第（5）图）．

（6）令 $z=r\cos\theta+i\sin\theta$，则边界 $|z+1|\cdot|z-1|=1$ 变为 $|z+1|^2\cdot|z-1|^2=\{(r\cos\theta+1)^2+r^2\sin^2\theta\}\{(r\cos\theta-1)^2+r^2\sin^2\theta\}=1$，由此得

$$(r^2+2r\cos\theta+1)(r^2-2r\cos\theta+1)=1,$$

$$(r^2+1)^2-4r^2\cos^2\theta=1$$

$$\therefore\quad r^4+2r^2-4r^2\cos^2\theta=r^2\{r^2-2(2\cos^2\theta-1)\}$$

$$=r^2(r^2-2\cos2\theta)=0$$

故由 $r=0$，$r^2=2\cos2\theta$ 可知是双纽线（第（6）图）．

类题1·1·5　图示满足下列条件的点 z 的存在范围．

（1）$-\pi<\mathrm{Im}(z)<\pi$　（2）$|z+1|-|z-1|<1$

例题1·1·8　试求下列集的内点，外点，边界点，聚点，孤立点．

（1）单位圆内非实数的点之集

（2）实部，虚部都是有理数的点集．

【解】（1）设 $D=\{z\,||z|<1,\ z\neq\text{实数}\}$．对于 $z=x+iy\in D$[1]，取 $0<\varepsilon<\mathrm{Min}(1-|z|,|y|)$ 的 ε，则

$$U_\varepsilon(z)\subset D$$

故 z 是D的内点，于是D的任意点是D的内点．

设 $D_1=\{z\,|\,|z|>1\}$，对于 $z\in D_1$，取 $0<\varepsilon<|z|-1$ 的 ε，则

$$U_\varepsilon(z)\subset D^C=D\text{ 的补集}$$

1）$z\in D$是 z 属于D的记号．

故 D_1 的任意点是D的外点.

设 $D_2=\{z\,||z|=1$ 或 $z=x(-1<x<1)\}$. 对于 $z\in D_2$, 取任意的 $\varepsilon>0$, 则

$$U_\varepsilon(z)\cap D\neq\phi,\ U_\varepsilon(z)\cap D^C\neq\phi$$

故D_2的任意点都是D的边界点.

设 $D_3=\{z\,||z|\leqslant 1\}=D_1{}^C$. 对于 $z\in D_3$, 取任意的 $\varepsilon>0$, 则

$$U_\varepsilon(z)\cap(D-\{z\})\neq\phi$$

故 D_3 的任意点是D的聚点.

又因D的任意点都是D的内点, 故不能是D的孤立点. 即D中不存在孤立点.

(2) 设 $D=\{z=x+iy\,|x,y=$有理数$\}$.

对于 $z\in D$, 取任意的 $\varepsilon>0$, 则在 $U_\varepsilon(z)$ 里存在实部或虚部为无理数的点. 故D的任何点都不是D的内点, 因此不存在D的内点.

对于 $z\in D^C$, 取任意的 $\varepsilon>0$, 则

$$U_\varepsilon(z)\cap D\neq\phi$$

故不存在D的外点.

对于复平面 $\mathbf{C}$ 的任意点 z, 取任意的 $\varepsilon>0$, 则

$$U_\varepsilon(z)\cap D\neq\phi,\ U_\varepsilon(z)\cap D^C\neq\phi$$

故 $\mathbf{C}$ 的点全是D的边界点.

对于 $z\in\mathbf{C}$, 取任意的 $\varepsilon>0$, 则

$$U_\varepsilon(z)\cap(D-\{z\})\neq\phi$$

故 $\mathbf{C}$ 的点全是D的聚点.

由以上事实可见, D的点全是聚点, 故不存在 D 的孤立点.

类题1·1·6 (1) 试求 $\{z\,|1\leqslant|z|<2\}$ 的内点, 外点, 边界点.

（2）试求$\left\{z \,\middle|\, z=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}i\ (m, n\text{是正整数})\right\}$的聚点，孤立点。

■类题解答

1·1·1（1）(a) -4 (b) $3-4i$

（2）(a) $\cos\pi+i\sin\pi$ (b) $2^{n}\left(\cos\dfrac{n}{3}\pi+i\sin\dfrac{n}{3}\pi\right)$

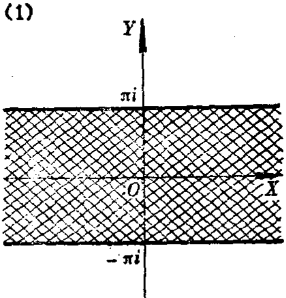
1·1·2 略

1·1·3 $\cos\dfrac{2k+1}{5}\pi+i\sin\dfrac{2k+1}{5}\pi$ $(k=0,1,2,3,4)$

1·1·4 略

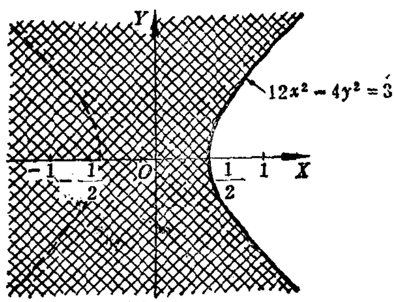
1·1·5

(1)



不含边界

(2)



不含边界

1·1·6（1）

内点：满足 $1<|z|<2$ 的点 z

外点：满足 $|z|<1$ 或 $2<|z|$ 的点 z

边界点：满足 $|z|=1$ 或 $|z|=2$ 的点 z

（2）聚点：$z=\dfrac{1}{m}$，$z=\dfrac{1}{n}i$，$z=0$

孤立点：$z=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}i$