21世纪 自学·复习·考研系列丛书

电路试题精选与答题技巧

明确要求
精练知识
提高能力

DIANLU SHITI JINGXUAN
YU DATI JIQIAO

陈希有 主编

哈尔滨工业大学出版社

电路试题精选与答题技巧
哈尔滨工业大学

21世纪自学·复习·考研系列丛书

电路试题精选与答题技巧

陈希有　主编

齐超　柴凤　王毅　编

哈尔滨工业大学出版社

·哈尔滨·

内 容 简 介

本书旨在帮助学生准确掌握电路课程的教学基本要求、知识要点和基本的解题方法及技巧。全书共分十一章，主要内容有：基尔霍夫定律及其方程、电路元件、线性直流电路、正弦电流电路、非正弦周期电流电路、频率特性与谐振现象、三相电路、线性动态电路暂态过程的时域分析、线性动态电路暂态过程的复频域分析、二端口网络、非线性电路。书末附有近年哈尔滨工业大学研究生入学考试电路试题、本科生期末考试电路试题和书中练习题及试题答案。

本书每章内容分为四部分：基本要求、必备知识、范例与要点、练习与提高。

本书可作为研究生入学考试复习用书，对高校本、专科学生学习电路课程及复习备考也有较大的实用价值，同时也可供教师和工程技术人员参考。

电路试题精选与答题技巧

Dianlu Shiti Jingxuan yu Dati Jiqiao

陈希有　主编

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

(哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006)

哈 尔 滨 工 业 大 学 印 刷 厂 印 刷

哈尔滨工业大学出版社电脑排版中心排版

*

开本 787×1092　1/16　印张 14.25　字数 329 千字

2000 年 1 月第 1 版　2000 年 1 月第 1 次印刷

印数 1～6 000

ISBN 7-5603-1431-7/TM·23　定价 18.00 元

前　　言

熟练解算电路习题是学好电路课程的一个重要标志，更是准备各种考试的必备技能。为此，除学生的刻苦努力和教师的严格要求外，适用的试题精选也必将起到很重要的作用。这便是我们的编写目的。

本书共分十一章，每章由四部分组成：

第一部分　基本要求。根据国家教育部规定的电路课程教学基本要求，结合实际教学和考试命题规律，指出了对所学内容要求掌握的程度，用以指导学生在学习和复习时准确把握重点。

第二部分　必备知识。对基本内容按照一定关系提纲挈领性地进行概述和精炼，这对总结所学内容、强化对概念和方法的理解是十分必要的。

第三部分　范例与要点。精心选择和设计了相当数量的具有典型性的例题，每个题目都给出了常规解题步骤，部分题目还给出了解题要点及技巧。希望读者能够触类旁通，抓住解题关键，领会概念，探讨方法。

第四部分　练习与提高。为读者准备了一定数量的难度与范例相当的练习题，用于读者自我检验自己的学习情况，提高解题能力。书后附有这部分题的答案。

本书既强调对基本概念的理解和对基本方法的掌握，又注重特殊解题技巧的运用。题目的来源主要是近十年的研究生入学考试题、本科生期末考试题、作者新编题目以及其他出版物中的优秀习题。题目的难易程度符合一般考试规律，所涉及的概念和方法符合基本要求。本书共精选了 215 个范例和 229 个练习题。

书后附有近年哈尔滨工业大学研究生入学考试电路试题及标准答案、部分本科生期末考试电路试题及标准答案，旨在帮助准备考研和正在学习电路课程的读者准确把握复习的深度和广度。

本书第一、二、三、十章及附录一、附录二由陈希有编写；第四、五、六、七章由齐超和王毅编写；第八、九、十一章由柴凤编写；全书由陈希有统稿。本书成稿后，承蒙周长源教授和刘润教授认真审阅，作者从中吸取了许多宝贵建议。在编写过程中，许承斌教授提供了许多有益的材料。在本书问世之际，向他们一并表示由衷的感谢。对教研室其他教师给予的支持也一并致以谢意。

在成书过程中，作者自认为做了许多努力，力争减少错误，但不足之处仍恐难免，希望广大读者和同行不吝赐教。如果本书能使读者的电路理论水平和解题技能有所提高的话，作者会感到莫大的欣慰。

编　者

1999 年 10 月于哈工大

目　　录

附录一　研究生入学考试电路试题选

附录二　本科生期末考试电路试题选

附录三　参考答案

第一章　基尔霍夫定律及其方程

1.1　基本要求

1. 理解电路模型、电路变量(电压、电流)及其参考方向。

2. 透彻理解并熟练列写基尔霍夫定律方程(KCL 与 KVL),理解结构约束的含义。

3. 熟练掌握节点电压的概念,理解节点电压与 KVL 的关系、节点电压的独立性。

4. 透彻理解线图与电路模型的关系以及树、基本回路和基本割集的定义。

5. 能够根据定义列写关联矩阵 $\boldsymbol{A}$、基本回路矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和基本割集矩阵 $\boldsymbol{C}$ 及矩阵形式的基尔霍夫定律方程。

6. 理解基本割集上的 KCL 方程是一组独立方程,基本回路上的 KVL 方程是一组独立方程。

7. 理解树支电压是一组独立的支路电压,连支电流是一组独立的支路电流。

8. 一般理解并简单应用特勒根定理。

1.2　必备知识

1. 电路模型　电路模型是由理想的电路元件组成,能够近似反映实际电路的主要特征。

2. 电路变量　电路的基本变量包括电压、电流、电荷和磁通。功率和能量是由若干个基本变量复合而成的量,称为基本复合变量。常用的电路变量是电压和电流。在列写电路方程时,要指定电压、电流的参考方向。所谓参考方向是指人为规定的电流的流向或电压的极性。当按参考方向计算的结果为正时,表明真实方向与参考方向一致;否则,相反。一旦选定了参考方向,在计算过程中就不宜变更。若元件或支路电压与电流的参考方向相同,则称该方向为关联参考方向,在电路分析中常采用这种参考方向。

3. 基尔霍夫电流定律(KCL)　在任一时刻,流入(或流出)集中参数电路中任一可分割的孤立部分的电流代数和恒等于零,即 $\sum i = 0$。节点和割集都是一种可分割的孤立部分。

4. 基尔霍夫电压定律(KVL)　在任一时刻,沿着集中参数电路中任一回路,元件端对电压或支路电压的代数和恒等于零,即 $\sum u = 0$。

KCL、KVL 是集中参数电路理论中的两个基本公理。它们与元件性质无关,称为结构约束。因此,可将电路模型抽象成线图再列写 KCL 与 KVL 方程。

KCL、KVL 有时域形式、相量形式、复频域形式,分别用于电路的时域分析、相量分析和复频域分析。

5. 节点电压　节点电压是指节点到参考点之间的电压。当参考点选定后,节点电压便随之确定,这是节点电压的单值性;当参考点改变时,各节点电压均改变相同量值,这是节点电压的相对性。但各节点间电压的大小和极性保持不变。节点电压是一组独立的电压变量(节点电压法就是基于这组独立变量)。对于 n 个节点的电路,有 $n-1$ 个独立的节点电压。

支路电压等于两端节点电压之差：$u_{ij}=u_{ni}-u_{nj}$，与参考点无关。用节点电压来表示支路电压自然满足 KVL。

6. 图论中的有关概念　为了列写独立的 KCL 和 KVL 方程或将 KCL 和 KVL 方程表述成矩阵形式，引入了图论中的有关概念。

(1)图：图是一组节点和支路的集合，其中每条支路都要连到相应的节点上。图的一部分称为子图。孤立节点是最简单的子图。

(2)路径：从一个节点出发，依次经过图上的支路和节点（每个支路和节点只经过一次）到达另一个节点，这种子图称为路径。

(3)连通图：图中任何两个节点之间都至少存在一条路径。

(4)回路：闭合的路径称为回路。每个回路对应一个 KVL 方程。

(5)割集：割集是一组支路的集合。若删除集合中的全部支路，则图变成分离的两部分；若保留任一条支路，则该图仍是连通的。每个割集对应一个 KCL 方程。

(6)树：连通图的树是包含其全部节点而不构成任何回路的连通子图。一个连通图通常有许多树[树的个数为 $\det(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为关联矩阵]。树将图中支路分成树支与连支，属于树的支路称为树支，共 $n-1$ 条树支；其余称为连支，共 $b-(n-1)$ 条连支。树是图论中最重要的概念。

(7)基本割集：只包含一个树支的割集称为基本割集。通常取该树支方向作为其参考方向。基本割集数等于树支数。

(8)基本回路：只包含一个连支的回路称为基本回路。通常取该连支方向作为其参考方向。基本回路数等于连支数。

7. 独立的 KCL 与 KVL 方程　对各个基本割集列写的 KCL 方程是一组独立方程。因为在每个基本割集的 KCL 方程中，都含有一个树支电流不出现在其它基本割集的 KCL 方程中，所有基本割集上的 KCL 方程不能相互线性表示。同理，对各个基本回路列写的 KVL 方程也是一组独立方程。因为在每个基本回路的 KVL 方程中，都含有一个连支电压不出现在其它基本回路的 KVL 方程中，所有基本回路上的 KVL 方程不能相互线性表示。

8. 树支电压与连支电流的独立性　树支电压是一组独立变量。因为(1)树不含任何回路，仅在 KVL 约束下任一树支电压不能由其它树支电压来求得；(2)每个基本回路只含一个连支，该连支电压可用回路中的树支电压通过 KVL 来求得。类似分析得出连支电流也是一组独立变量。树支电压和连支电流只是选择独立变量的充分条件，并非必要条件。

9. 关联矩阵 $\boldsymbol{A}$、基本回路矩阵 $\boldsymbol{B}$、基本割集矩阵 $\boldsymbol{C}$　它们分别描述线图节点与支路、基本回路与支路、基本割集与支路间的关联关系，均是线图结构的数学表示，其中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 与树的选择有关。各矩阵间的关系是 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{BC}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$。（$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 矩阵的定义参见电路教科书）

10. KCL、KVL 的矩阵形式　KCL、KVL 可用 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 矩阵表示为

$$\text{KCL}: \boldsymbol{AI}=\boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_l \qquad \boldsymbol{CI}=\boldsymbol{0}$$

$$\text{KVL}: \boldsymbol{U}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{n}} \qquad \boldsymbol{BU}=\boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{U}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{t}}$$

式中，$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{I}$ 分别表示支路电压和支路电流列矢量；$\boldsymbol{U}_{\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{I}_l$ 分别表示树支电压和连支电流列矢量；$\boldsymbol{U}_{\mathrm{n}}$ 表示节点电压列矢量。

11. 特勒根定理

定理一（功率定理）：在任意集中参数电路中，设支路电压、电流列矢量分别为

$$\boldsymbol{U}=[u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_b]^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{I}=[i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_b]^{\mathrm{T}}$$

电压、电流取关联参考方向，则有

$$U^{\mathrm{T}}I=\sum_{k=1}^{b}u_k i_k=0$$

定理一的物理意义是功率守恒。

定理二(似功率定理)：设有两个具有相同拓扑结构(即线图相同)的集中参数电路 N 与 $\hat{N}$，它们的支路电压、电流列矢量分别为 U、I 及 $\hat{U}$、$\hat{I}$，电压、电流取关联参考方向，则有

$$\hat{U}^{\mathrm{T}}I=0 \text{ 及 } U^{\mathrm{T}}\hat{I}=0$$

特勒根定理可以通过 KCL 和 KVL 来证得。它适用于任何集中参数电路，与电路元件性质无关，与电压、电流变化规律及表达形式无关。对于某些问题，利用特勒根定理可以巧妙地得到解答。

1.3 范例与要点

【例 1.1】网络线图如图所示，已知部分支路电流，求电流 i_2。

【解】方法一：在节点上应用 KCL，则

节点③：$i_4=2\ \mathrm{A}+3\ \mathrm{A}=5\ \mathrm{A}$

节点④：$i_3=8\ \mathrm{A}-i_4=3\ \mathrm{A}$

节点①：$i_2=1\ \mathrm{A}+i_3=4\ \mathrm{A}$

方法二：在封闭面上应用 KCL，则

封闭面 S：$-i_2+1\ \mathrm{A}-2\ \mathrm{A}-3\ \mathrm{A}+8\ \mathrm{A}=0$

$i_2=4\ \mathrm{A}$

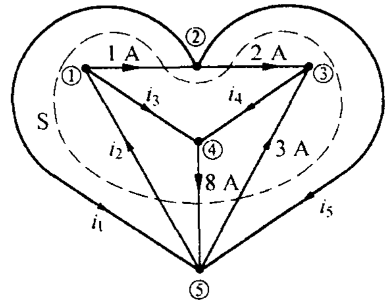

图 例 1.1

要点 封闭面上的 KCL 是节点上 KCL 的推广，有时可以简化问题求解。

【例 1.2】网络线图如图所示，已知部分支路电压，又知 $u_{25}=4\ \mathrm{V}$，求其余支路电压。

【解】在回路上应用 KVL，则

回路①②⑤①：$u_1=u_{25}+u_{51}=4\ \mathrm{V}-1\ \mathrm{V}=3\ \mathrm{V}$

回路①④⑤①：$u_2=u_{41}+u_{15}=-2\ \mathrm{V}+1\ \mathrm{V}=-1\ \mathrm{V}$

回路①②③④①：$u_3=u_{41}+u_{12}+u_{23}=-2\ \mathrm{V}-u_1+3\ \mathrm{V}=-2\ \mathrm{V}$

回路②③⑤②：$u_4=u_{32}+u_{25}=-3\ \mathrm{V}+4\ \mathrm{V}=1\ \mathrm{V}$

或回路③④⑤③：$u_4=-u_3+u_2=1\ \mathrm{V}$

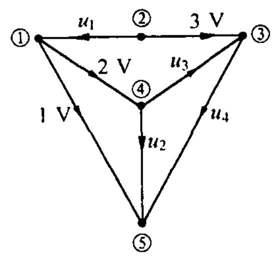

图 例 1.2

要点 在应用 KVL 时，回路的含意不仅是指由图(或电路)上的支路组成的闭合路径，而且可以推广到由一组节点组成的节点序列，其中除首尾节点号相同外，不存在其它相同的节点号，如本例中①②⑤①、②③⑤②。

【例 1.3】电路如图所示，已知 $u_1=2\ \mathrm{V}$，$u_2=4\ \mathrm{V}$，$u_3=6\ \mathrm{V}$，$u_4=8\ \mathrm{V}$。

(1)求以⑤为参考点的各节点电压。

(2)求以④为参考点的各节点电压。

(3)利用闭合回路上的 KVL 求未知支路电压。

(4)由节点电压求未知支路电压。

【解】(1)$u_{n1}=u_1=2\ \mathrm{V}$

$u_{n2}=-u_2+u_1=-2\ \mathrm{V}$

$u_{n3}=-u_3+u_{n2}=-8\ \mathrm{V}$

$u_{n4} = -u_4 + u_{n3} = -16\ \text{V}$

$u_{n5} = 0$

(2) $u_{54} = -u_{n4} = 16\ \text{V}$

$u'_{n1} = u_{n1} + u_{54} = 18\ \text{V}$

$u'_{n2} = u_{n2} + u_{54} = 14\ \text{V}$

$u'_{n3} = u_{n3} + u_{54} = 8\ \text{V}$

$u'_{n4} = 0$

$u'_{n5} = u_{n5} + u_{54} = 16\ \text{V}$

(3) 回路①③②①：$u_5 = -u_3 - u_2 = -10\ \text{V}$

回路③①⑤③：$u_6 = u_5 + u_1 = -8\ \text{V}$

回路②③④②：$u_7 = u_3 + u_4 = 14\ \text{V}$

回路④③⑤④：$u_8 = -u_4 + u_6 = -16\ \text{V}$

(4) $u_5 = u_{n3} - u_{n1} = u'_{n3} - u'_{n1} = -10\ \text{V}$

$u_6 = u_{n3} - u_{n5} = u'_{n3} - u'_{n5} = -8\ \text{V}$

$u_7 = u_{n2} - u_{n4} = u'_{n2} - u'_{n4} = 14\ \text{V}$

$u_8 = u_{n4} - u_{n5} = u'_{n4} - u'_{n5} = -16\ \text{V}$

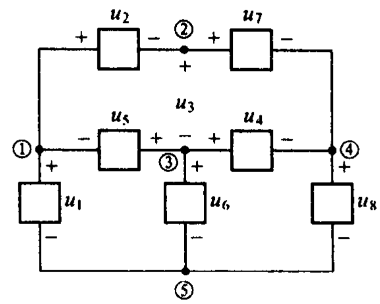

图 例 1.3

要点 (1)当参考点选定以后,各节点电压便是确定的,与计算方法无关。

(2)当参考点改变以后,各节点电压改变同一增量,该增量等于旧、新参考节点之间的电压。

(3)支路电压等于两端节点电压之差,与参考点无关。

【例 1.4】电路如图(a)所示,已知部分电流值和部分电压值。

(1)试求其余未知电流。如果只求电流 i_D,能否一步求得?若已知电流少一个,能否求出全部未知电流?

(2)试求其余未知电压 u_{14}、u_{15}、u_{52}、u_{53}。若已知电压少一个,能否求出全部未知电压?

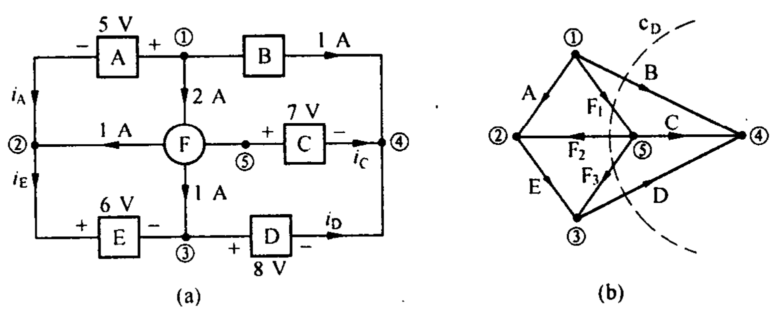

图 例 1.4

【解】(1)将电路抽象成线图,如图(b)所示。由 KCL 得

节点①:$i_A = -i_B - i_{F1} = -3\ \text{A}$

节点⑤:$i_C = i_{F1} - i_{F2} - i_{F3} = 0$

节点④:$i_D = -i_B - i_C = -1\ \text{A}$

节点③:$i_E = i_D - i_{F3} = -2\ \text{A}$

若只求电流 i_D,可以一步求得。由割集 c_D 的 KCL 方程得

$$i_D = -i_B - i_{F1} + i_{F2} + i_{F3} = -1\ \text{A}$$

若已知电流少一个,不能求出全部未知电流。因为图中含有 5 个节点、8 条支路,独立的支路电

流个数是 $b-(n-1)=8-(5-1)=4$。当已知电流个数少于 4 时，便不能求出全部支路电流。

(2)由 KVL 方程得

回路①②③④①：$u_{14}=u_{12}+u_{23}+u_{34}=19\ \text{V}$

回路①④⑤①：　$u_{15}=u_{14}+u_{45}=19\ \text{V}-7\ \text{V}=12\ \text{V}$

回路⑤①②⑤：　$u_{52}=u_{51}+u_{12}=-12\ \text{V}+5\ \text{V}=-7\ \text{V}$

回路⑤④③⑤：　$u_{53}=u_{54}+u_{43}=7\ \text{V}-8\ \text{V}=-1\ \text{V}$

若已知支路电压少一个，不能求出全部未知电压。因为图中独立的支路电压个数是 $n-1=5-1=4$。当已知电压个数少于 4 时，便不能求出全部支路电压。

要点 (1)在 KCL 约束下，独立的支路电流是一组仅用 KCL 便能求出全部未知电流的最少支路电流集合。对独立的支路电压可用对偶规律来理解。

(2)对于具有 n 个节点 b 条支路的电路，其独立的支路电流个数为 $b-(n-1)$，独立的支路电压个数为 $n-1$。

【例 1.5】网络线图如图所示。

(1)任选一组独立的支路电压，并用以表达其它支路电压。

(2)任选一组独立的支路电流，并用以表达其它支路电流。

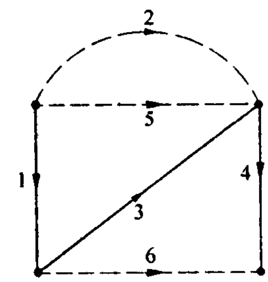

图 例 1.5

【解】任选一树，例如 1、3、4 支路，则

(1)树支电压 u_1、u_3、u_4 是一组独立的支路电压，借助基本回路上的 KVL，其它支路电压可表示成：

基本回路 123：$u_2=u_1+u_3$

基本回路 135：$u_5=u_1+u_3$

基本回路 346：$u_6=u_3+u_4$

(2)连支电流 i_2、i_5、i_6 是一组独立的支路电流，借助基本割集上的 KCL，其它支路电流可以表示成：

基本割集 125：　$i_1=-i_2-i_5$

基本割集 2536：$i_3=-i_2-i_5-i_6$

基本割集 46：　$i_4=-i_6$

要点 对连通的网络线图任选一树后，树支电压是一组独立电压变量，连支电流是一组独立电流变量。

【例 1.6】电路如图(a)所示。

(1)选一树，使得各连支电压均可用电压 u_1 表示。

(2)取一割集，列一方程，求出 u_1。

【解】(1)选择图(b)实线所示的树，则由基本回路上的 KVL 得各连支电压为

基本回路 135：　$u_5=u_1+u_3=u_1+50\ \text{V}$

基本回路 246：　$u_6=u_4-u_2=100\ \text{V}-1.5u_1$

基本回路 13724：$u_7=-u_3-u_1+u_4-u_2=50\ \text{V}-2.5u_1$

基本回路 1384：$u_8=-u_3-u_1+u_4=50\ \text{V}-u_1$

基本回路 149：　$u_9=-u_1+u_4=-u_1+100\ \text{V}$

(2)取图(b)所示的基本割集，对其列 KCL 方程

$$i_1+i_5-i_7-i_8-i_9=0$$

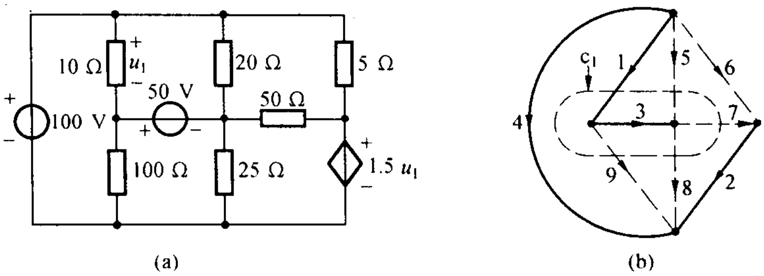

图 例 1.6

再由欧姆定律得
$$\frac{u_1}{10}+\frac{u_5}{20}-\frac{u_7}{50}-\frac{u_8}{25}-\frac{u_9}{100}=0$$

将(1)中求出的各电压代入上式得
$$u_1=6\ \text{V}$$

要点 (1)树支电压是一组独立电压,连支电压可用树支电压通过基本回路上的 KVL 来表示。因此,独立电压源、受控电压源及 u_1 支路被选为树支。

(2)基本割集只含一个树支,该树支电流可由连支电流通过该基本割集上的 KCL 来表示。

【例 1.7】 电路如图(a)所示,选一树,求出电流 i。

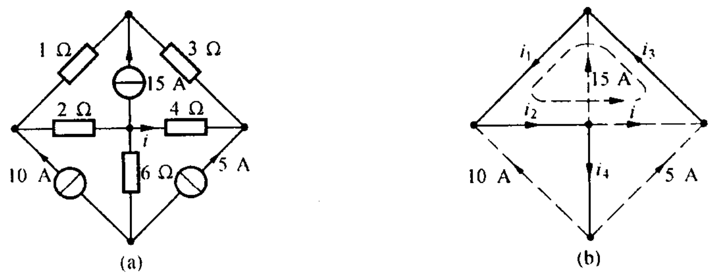

图 例 1.7

【解】 选择图(b)所示的树,由基本割集上的 KCL 求得树支电流为

$$i_1 = 15\ \text{A} + i + 5\ \text{A} = 20\ \text{A} + i$$
$$i_2 = 15\ \text{A} + 5\ \text{A} + 10\ \text{A} + i = 30\ \text{A} + i$$
$$i_3 = 5\ \text{A} + i$$
$$i_4 = 10\ \text{A} + 5\ \text{A} = 15\ \text{A}$$

再对含支路电流 i 的基本回路列 KVL 方程
$$4i+3i_3+1\times i_1+2i_2=0$$

将树支电流代入上式得
$$i=-9.5\ \text{A}$$

要点 连支电流是一组独立变量,树支电流可由连支电流借助基本割集上的 KCL 来表示。因此,独立电流源宜选作连支。

【例 1.8】 网络线图如图所示。

(1)以④为参考点,写出节点支路关联矩阵 $\boldsymbol{A}$,并用以表达基尔霍夫定律方程。

(2)以 1、2、3 支路为树支,写出基本回路矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和基本割集矩阵 $\boldsymbol{C}$,并用以表达基尔霍夫定律方程。

(3)证明对同一连通图的任一树,恒有 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{BC}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$,并用本题的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 矩阵加以验证。

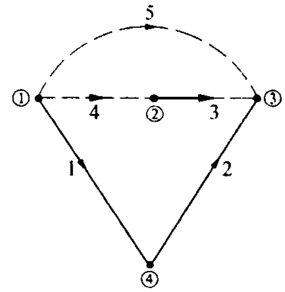

图 例 1.8

【解】(1)关联矩阵

$$
\begin{array}{c} \\ n_1 \\ A = n_2 \\ n_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

KCL 方程：$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}[i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_4 \quad i_5]^{\mathrm{T}} = [0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

KVL 方程：$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{n}}$，即

$$[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}[u_{\mathrm{n}1} \quad u_{\mathrm{n}2} \quad u_{\mathrm{n}3}]^{\mathrm{T}}$$

(2)基本回路矩阵

$$
\begin{array}{c} \\ l_4 \\ \boldsymbol{B} = \\ l_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc:cc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{array}
= [\boldsymbol{B}_{\mathrm{t}} \; \vdots \; \boldsymbol{1}_l]
$$

KCL 方程：$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_l$，即

$$[i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_4 \quad i_5]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}[i_4 \quad i_5]^{\mathrm{T}}$$

KVL 方程：$\boldsymbol{BU} = \boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{B}[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5]^{\mathrm{T}} = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

基本割集矩阵

$$
\begin{array}{c} \\ c_1 \\ \boldsymbol{C} = c_2 \\ c_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]
\end{array}
= [\boldsymbol{1}_{\mathrm{t}} \; \vdots \; \boldsymbol{C}_l]
$$

KCL 方程：$\boldsymbol{CI} = \boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{C}[i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_4 \quad i_5]^{\mathrm{T}} = [0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

KVL 方程：$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{t}}$，即

$$[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}[u_1 \quad u_2 \quad u_3]^{\mathrm{T}}$$

(3)证明。由 KCL 得

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_l = \boldsymbol{0}$$

上式对任意的连支电流 $\boldsymbol{I}_l$ 均成立，所以 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$。

又由 KVL 得 $$\boldsymbol{BU} = \boldsymbol{BC}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{0}$$

上式对任意的树支电压 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{t}}$ 均成立，所以 $\boldsymbol{BC}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$。

验证：

$$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BC}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

要点 (1)矩阵 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 与所对应的树有关，一旦选定树，利用定义便可求得矩阵 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$。

(2)当树支和连支先后按自然数顺序连续编号时，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都将出现单位子矩阵，并且由 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$，可证得 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{t}}=-\boldsymbol{C}_l^{\mathrm{T}}$，这是一个很有用的关系。

(3)利用 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 可方便地将独立的基尔霍夫定理方程表达成矩阵形式。注意各种表现形式间的相似性。

(4)$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 矩阵从不同的关联角度来描述网络的拓扑结构。

【例 1.9】 某有向连通图的关联矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

取 1、2、3 支路为树支，写出基本割集矩阵 $\boldsymbol{C}$。

【解】 由 $\boldsymbol{A}$ 画出网络线图如图所示。由题中给定树支并根据定义求得

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

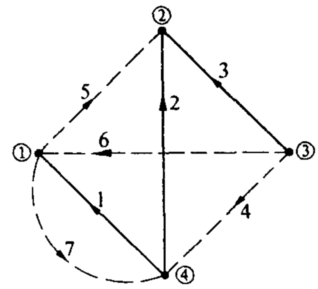

图 例 1.9

要点 (1)关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与网络线图是一一对应的，可以相互求得。

(2)由关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 画出有向图，再由给定的树得到基本割集矩阵 $\boldsymbol{C}$。

【例 1.10】 已知某网络线图的基本割集矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\left[\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right]=[\boldsymbol{1}_{\mathrm{t}} \vdots \boldsymbol{C}_l]$$

试画出此图。

【解】 由 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{t}}=-\boldsymbol{C}_l^{\mathrm{T}}$ 得基本回路矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{cccc:cccc}-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]=[\boldsymbol{B}_{\mathrm{t}} \vdots \boldsymbol{1}_l]$$

由 $\boldsymbol{B}$ 矩阵画出各基本回路，如图(a)～(d)所示。将各基本回路综合在一起得题中所求线图，如图(e)所示。

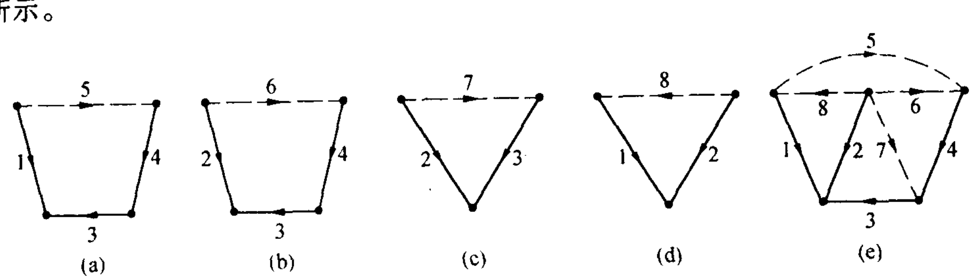

图 例 1.10

要点 (1)由矩阵 $\boldsymbol{B}$ 画网路线图要比由矩阵 $\boldsymbol{C}$ 画网络线图来得容易。

(2)矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 与网络线图及其某树是一一对应的，可以相互求得。

【例 1.11】某网络线图的连支电流 $i_4=4\ \mathrm{A}, i_5=5\ \mathrm{A}, i_6=6\ \mathrm{A}$，树支电阻 $R_1=1\ \Omega, R_2=2\ \Omega, R_3=3\ \Omega$，基本割集矩阵为

$$C=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&0&1&-1\end{array}\right]=[\mathbf{1}_t \ \vdots\ C_l]$$

试求连支电压。

【解】由 KCL 得

$$CI=[\mathbf{1}_t \ \vdots\ C_l]\begin{bmatrix}I_t\\\cdots\\I_l\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

树支电流
$$I_t=\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\i_3\end{bmatrix}=-C_lI_l=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\mathrm{A}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}\mathrm{A}$$

树支电压
$$U_t=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1&0&0\\0&R_2&0\\0&0&R_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\i_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-4\\3\end{bmatrix}\mathrm{V}$$

连支电压
$$U_l=\begin{bmatrix}u_4\\u_5\\u_6\end{bmatrix}=C_l^{\mathrm{T}}U_t=\begin{bmatrix}5\\2\\-7\end{bmatrix}\mathrm{V}$$

要点 利用矩阵形式的基尔霍夫定律方程，不必画出网络线图即可进行求解。

【例 1.12】图中 N 表示纯二端电阻网络。已知如下两组数据：(1)当 $R_2\to\infty$、$R_3\to\infty$、$u_1=30\ \mathrm{V}$ 时，$i_1=2\ \mathrm{A}, u_2=12\ \mathrm{V}, u_3=8\ \mathrm{V}$；(2)当 $R_2=6\ \Omega$、$R_3=4\ \Omega$、$u_1=30\ \mathrm{V}$ 时，$i_1=3\ \mathrm{A}, u_2=9\ \mathrm{V}$。求第(2)组条件下的电压 u_3。

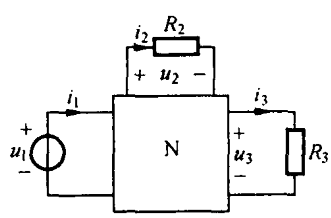

图 例 1.12

【解】两组数据可看作是来自两个具有相同拓扑结构的网络。设网络共有 b 条支路，由特勒根定理可得

$$-u_1\hat{i}_1+u_2\hat{i}_2+u_3\hat{i}_3+\sum_{k=4}^{b}u_k\hat{i}_k=0 \qquad (1)$$

$$-\hat{u}_1i_1+\hat{u}_2i_2+\hat{u}_3i_3+\sum_{k=4}^{b}\hat{u}_ki_k=0 \qquad (2)$$

式中，$\hat{u}_k$、$\hat{i}_k(k=1,2,\cdots,b)$表示对应第(2)组条件的支路电压和支路电流。因为 N 为纯电阻网络，故

$$\sum_{k=4}^{b}u_k\hat{i}_k=\sum_{k=4}^{b}R_ki_k\hat{i}_k=\sum_{k=4}^{b}\hat{u}_ki_k$$

将上式代入(1)、(2)式便得

$$-u_1\hat{i}_1+u_2\hat{i}_2+u_3\hat{i}_3=-\hat{u}_1i_1+\hat{u}_2i_2+\hat{u}_3i_3 \qquad (3)$$

由已知条件得

$u_1=30\ \mathrm{V}$　　$u_2=12\ \mathrm{V}$　　$u_3=8\ \mathrm{V}$

$i_1=2\ \mathrm{A}$　　$i_2=0$　　$i_3=0$

$$\hat{u}_1 = 30\ \text{V} \qquad \hat{u}_2 = 9\ \text{V}$$

$$\hat{i}_1 = 3\ \text{A} \qquad \hat{i}_2 = \hat{u}_2/R_2 = 1.5\ \text{A} \qquad \hat{i}_3 = \hat{u}_3/R_3 = 0.25\hat{u}_3$$

将以上条件代入(3)式得

$$-30\times 3 + 12\times 1.5 + 8\times 0.25\hat{u}_3 = -30\times 2$$

$$\hat{u}_3 = 6\ \text{V}$$

$\hat{u}_3$ 即为所求。

要点 (1)当题给 N 与 $\hat{\text{N}}$ 为具有相同拓扑结构的纯二端电阻网络或互为伴随网络时，宜应用特勒根定理进行求解。

(2)表达式(3)可作为公式来使用，它联系的是端口上的电流与电压。

【例 1.13】 图(b)中的 $\hat{\text{N}}$ 是图(a)中的 N 的伴随网络。试证明在量值上 $u_2/u_1 = \hat{i}_1$。

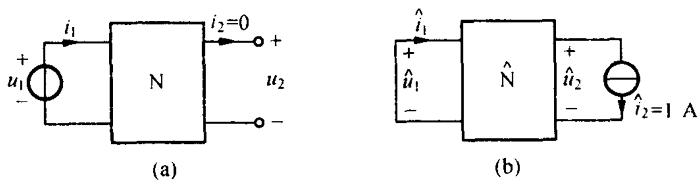

图 例 1.13

【证明】 由特勒根定理得

$$-u_1\hat{i}_1 + u_2\hat{i}_2 + \sum_{k=3}^{b} u_k\hat{i}_k = 0 \tag{1}$$

$$-\hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^{b} \hat{u}_k i_k = 0 \tag{2}$$

由于 $\hat{\text{N}}$ 是 N 的伴随网络，则有

$$\sum_{k=3}^{b} u_k\hat{i}_k = \boldsymbol{U}^{\text{T}}\hat{\boldsymbol{I}} = (\boldsymbol{RI})^{\text{T}}\hat{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I}^{\text{T}}\boldsymbol{R}^{\text{T}}\hat{\boldsymbol{I}} =$$

$$\boldsymbol{I}^{\text{T}}\hat{\boldsymbol{R}}\hat{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I}^{\text{T}}\hat{\boldsymbol{U}} = \sum_{k=3}^{b} \hat{u}_k i_k \tag{3}$$

式中，$\boldsymbol{R}$ 和 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 分别表示 N 与 $\hat{\text{N}}$ 的支路电阻矩阵(不一定是对角阵)。

将(3)式代入(1)、(2)式得

$$-u_1\hat{i}_1 + u_2\hat{i}_2 = -\hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

由已知条件 $i_2 = 0$、$\hat{u}_1 = 0$、$\hat{i}_2 = 1$ A 得

$$-u_1\hat{i}_1 + u_2\hat{i}_2 = 0$$

所以

$$u_2/u_1 = \hat{i}_1/\hat{i}_2 = \hat{i}_1$$

要点 若支路电阻矩阵满足 $\hat{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}^{\text{T}}$，则称 $\hat{\text{N}}$ 与 N 互为伴随网络，在 $\hat{\text{N}}$ 与 N 中可以应用特勒根定理。

【例 1.14】 图(a)、(b)两电路中 N 表示纯二端电阻网络。在图(a)中，$u_1 = 4$ V，$R_2 = 2\ \Omega$，$i_1 = 1$ A，$i_2 = 0.5$ A；在图(b)中，$\hat{i}_1 = 2$ A，$\hat{R}_2 = 4\ \Omega$，$\hat{u}_2 = 3.2$ V。求等效电阻 $\hat{R}_{\text{i}}$。

【解】 由特勒根定理得

$$-u_1\hat{i}_1 + u_2\hat{i}_2 = -\hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

将 $u_2 = R_2 i_2 = 1$ V、$\hat{i}_2 = \hat{u}_2/\hat{R}_2 = 0.8$ A 及其它已知条件代入上式得

$$-4\times 2 + 1\times 0.8 = -\hat{u}_1\times 1 + 3.2\times 0.5$$