面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

高等数学

上册

宣立新　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

高等数学

上 册

宣立新 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学　上册/宣立新主编;田桂林,成和平编.
－北京:高等教育出版社,1999(2001重印)
ISBN 7－04－007741－8

Ⅰ.高…　Ⅱ.①宣…②田…③成…　Ⅲ.高等数学
Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第37197号

高等数学　上册
宣立新　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**邮政编码**	100009
电　　话	010－64054588	**传　　真**	010－64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京外文印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	1999年9月第1版
印　　张	16	**印　　次**	2001年6月第5次印刷
字　　数	290 000	**定　　价**	13.90元

内容提要

本书是教育部高教司高等工程专科高等数学课程教学委员会，根据原国家教委于 1996 年修订的高等工程专科学校《高等数学教学基本要求》组织编写的全国通用教材.

本书汲取了全国高等工程专科教育创建示范专业数学教学改革的经验.突出以应用为目的，以必需、够用为度的原则.全书分上、下两册出版.上册内容为函数的极限与连续；导数与微分；微分中值定理和导数的应用；定积分与不定积分；定积分的应用；常微分方程.书末附有几种常用的曲线、积分表和习题答案.

本书说理浅显、便于自学，可作为高等专科教育、高等职业教育、成人教育工科类各专业的教材，也可作为工程技术人员的参考书.

序

数学与文明可谓自古并存,而且是同步发展的,无数事例都充分地证明了数学在文明发展、科学发展及社会发展中的重要地位和作用.大约在公元1800年,天才的军事家拿破仑(Napoleon)曾提出"国富民强要依靠数学发达"的著名论断.数学实为一切科学技术发展之基础与先导.不仅如此,数学也与文化教育的素质有着密切的关系,它有着极为丰富的文化教育的内涵,它还可以陶冶人品素质和提高人的精神品位.

我们在承担原国家教委"面向21世纪专科人才素质要求及人才培养模式"的课题时,有意识地抓了几个专业的改革试点及几门课程从教材到教学方法、手段的改革.我们把数学的改革列为重点.撰写这本教材时,已将本课题对工程专科人才培养素质的基本要求尽量融合其中了.

高等工程专科教育的人才培养宗旨是培养工程、工业第一线的高级技术应用人才,这本教材紧紧扣住办学宗旨,全书突出以应用为目的,以应用为主线的内容体系,十分注意对学生进行数学思想、方法的培养.一个学生毕业后,由于工作的局限可以遗忘了数学的具体内容,但如果他掌握了数学的思想、方法,则会终生受用,并会在运用中升华为自己的理性思维习惯,去认识和解决问题.这本教材从面向21世纪的要求,注意计算机的应用,编写了高等数学软件包的使用,为学生应用高等数学知识提供了现代化的计算手段.

几位作者都是长期从事高等工程专科数学教学并有较深造诣的专家.他们付出了极为艰辛的劳动,为高等工程专科教育、高等职业教育撰写了一本适应教改形势,很有特色、很有前瞻的好教材.

郑家泰

1999年7月

前　言

根据1996年国家教委高等教育司批准修订的、由高等教育出版社出版的高等工程专科学校《高等数学课程教学基本要求》(以下简称《高等数学基本要求》),在国家教委高等教育司高等工程专科学校"高等数学课程教学委员会"(以下简称"数学课委会")的组织下,在高等教育出版社的指导下,我们编写了本教材.

本教材是教育部"面向21世纪课程教材".汲取了原国家教委高等教育司批准的专业综合改革130多个试点专业数学教学改革的经验,又注意到了国外同类学校的数学改革,特别是新的数学思想和现代化的教学手段的应用,并兼顾我国的具体国情.该教材具有以下几个特点:

1. 进一步贯彻以应用为目的,以必需、够用为度的原则,加强数学知识的应用.如把有重要应用的"微元法"贯串在一元微积分、微分方程、多元积分的内容中;一元函数的积分学以有实际应用的定积分为主线,降低了不定积分的地位;注重基本概念的实际背景和理论知识的应用 .

2. 强调数学的思想和方法.在第一章的极限前面,介绍微积分的两个基本问题和解决这两个问题的思想和方法,并将这种思想和方法贯串于全书之中.对多元函数的积分,在定积分的基础上,利用积分的思想和方法,以物质构件的质量为模型,用点函数将二重积分、三重积分、对弧长的曲线积分和对面积的曲面积分等四个概念,统一为几何形体上的黎曼积分,并讨论它的性质,最后以第一型的线、面积分为基础,推广得到第二型的线、面积分.

3. 将现代化的计算工具——高等数学软件包编入教材并作为一章,引导学生重视把一些实际问题抽象为高等数学的相关问题,而不盲目追求运算技巧.

4. 注意教材的科学性和逻辑性的前提下,更注意培养学生科学的、良好的思维习惯,提高学生的学习素质.全教材力求做到语言准确、条理清楚.

根据1996年出版的《高等数学基本要求》,将原来《高等数学》教材中的"方程的近似解"、"定积分的近似计算"、"微分方程的数值解法"等内容安排在必修课程《数值计算》内.

本教材的基本教学时数不少于110学时.讲解标有 * 号的内容要另外安排课时.

本教材经"数学课委会"审定为高等工程专科学校各专业的高等数学教材,也可作为高等职业教育以及专科层次成人教育的高等数学教材和工程技术人员

的参考用书.

参加本教材编写的有宣立新(南京动力高等专科学校)、田桂林(哈尔滨理工大学工业技术学院)、成和平(成都电子机械高等专科学校)、侯风波(承德石油高等专科学校).全部教材的框架结构、统稿、定稿由宣立新承担.

北京机械工业学院朱铉道教授是本教材的主审,他认真审阅了全部教材的原稿,提出了许多有价值的意见.在此,编者对朱铉道教授表示衷心的感谢.

“数学课委会”对本教材的编写纲目组织了研讨会,对本教材的初稿组织了初审、复审会,提出了不少宝贵的意见,特别是彭玉芳、吴诗咏、苏永法、彭延铭等同志对本教材的编写、审查做了大量的工作,对此编者一并表示深深的谢意.

由于我们的水平所限,时间也比较仓促,本教材必有不少缺点和错误,敬请广大师生、读者批评指正.

编 者

1999年2月

目　录

第一章　函数的极限与连续

高等数学研究的内容是函数的微积分及其应用，而极限是研究函数的微积分的主要工具．中学数学里，介绍了函数的基本概念和数列的极限，本章将在中学数学的基础上对函数概念作必要的补充，提出微积分产生的两个基本问题，引进函数的极限与连续概念，为学习函数的微积分打好基础．

第一节　函　　数

一、常量与变量

现实世界中的事物往往表现为各种形式的量．其中有的量，在取定适当的单位以后，在考察的过程中可用固定的数值来表示，这种量称为常量；还有一些量，在考察的过程中取不同的数值，这种量称为变量．通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z,t 等表示变量．

如一架客机在飞行过程中，乘客人数是一个常量，而飞机飞行的高度则是一个变量．

二、集合与映射

讨论变量间的数量关系时，必须明确变量的取值范围，数集是表示取值范围的一种常用方法．

1．常用数集

在本书中，变量总是在实数范围内讨论．常用的数集除了有自然数集 $\mathbf{N}$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 外，还有各种类型的区间．设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$，

开区间 $(a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<b\}$；

闭区间 $[a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

左半开区间 $(a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\leqslant b\}$；

右半开区间 $[a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x<b\}$；

无穷区间 $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$；

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\}$；　$[a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\}$；

$(-\infty,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid x<b\}$；　$(-\infty,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant b\}$．

此外，为了讨论函数在一点附近的某些性态，需要引入点的邻域概念.

定义 1 设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$，数集 $\{x\in\mathbf{R}\mid |x-a|<\delta\}$，即实数轴上和 a 点的距离小于 δ 的点的全体，称为点 a 的 δ 邻域，记作 $N(a,\delta)$，点 a 与数 δ 分别称为这邻域的中心与半径. 有时用 $N(a)$ 表示点 a 的一个泛指的邻域. 数集 $\{x\in\mathbf{R}\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的空心 δ 邻域，记作 $N(\hat{a},\delta)$.

显然 $N(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$，$N(\hat{a},\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

2. 映射

定义 2 设 X,Y 为非空集合，从 X 到 Y 存在一个对应关系 f，任意的 $x\in X$，Y 中有唯一的元素 y 与之对应（记成 $y=f(x)$），则称 f 为 X 到 Y 的一个映射，记作 $f:X\to Y$. X 称为映射 f 的定义域.

例 1 设 X 为 x_1Ox_2 坐标面上点的集合，$Y=[0,+\infty)$，任意 $P\in X$，设 P 的坐标为 (x_1,x_2)，$f(P)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. 由定义 2，f 是 X 到 Y 的一个映射.

三、函数的概念

定义 3 设 x 和 y 是两个变量，D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，任意 $x\in D$，变量 y 按照某个对应关系 f 有唯一确定的实数与之对应（记作 $y=f(x)$），则称 f 是定义在 D 上的函数. x 称为自变量，y 称为因变量. D 称为函数 f 的定义域. 数集 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

由于常常通过函数值讨论函数，因此习惯上把自变量为 x、因变量为 y 的函数 f 记成 $y=f(x)$.

由定义 2 和定义 3 可见，当 X,Y 都是实数集的子集时，映射 $f:X\to Y$ 就是函数.

由定义 3 可见，两个函数相同的充分必要条件是对应关系相同、定义域也相同. 由于函数 $y=|x|$ 与 $y=x$ 的对应关系不同，因此它们是两个不同的函数；由于函数 $y=2\lg x$ 与 $y=\lg(x^2)$ 的定义域不同，因此它们也是两个不同的函数；而函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 则是同一个函数.

例 2 某商场 1998 年第一季度各月毛线的零售量(kg)如下表：

月份 t	1	2	3
零售量 s	84.1	95.3	62.4

上表表示了该商场 1998 年第一季度月零售量 s 与月份 t 之间的函数关系.

例 3 某地某日的气温 T 和时间 t 是两个变量，由气温自动记录仪描得一条曲线（如图 1-1），这个图形表示了气温 T 和时间 t（从 0 时开始）之间的函数

关系,记录的时间范围是$[0,24)(\mathrm{h})$.

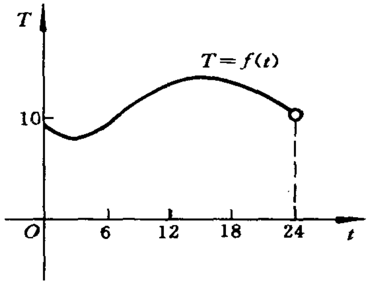


图 1-1

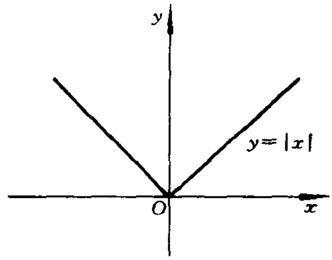


图 1-2

例 4 数学式

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

表明变量 y 是 x 的函数,它的图象如图 1-2 所示.

例 5 数学式

$$y=f(x)=\begin{cases} -x+1, & 0<x<1, \\ 0, & x=0, \\ -x-1, & -1\leqslant x<0 \end{cases}$$

也表明变量 y 是 x 的函数,它的图象如图 1-3 所示.

函数的定义域,对于具有实际意义的函数来说,则要按题意来确定,如例 2 中函数的定义域 $D=\{1,2,3\}$,例 3 中函数的定义域 $D=[0,24)$,又如圆的面积 A 是半径 r 的函数 $A(r)=\pi r^2$,它的定义域是$(0,+\infty)$;对于抽象地用公式表达的函数,函数的定义域是自变量所能取的使公式有意义的一切值.如例 4 中函数的定义域 $D=\mathbf{R}$.例 5 中的函数,其自变量的取值范围在函数的表达式中已经给定了,它的定义域 $D=[-1,1)$.

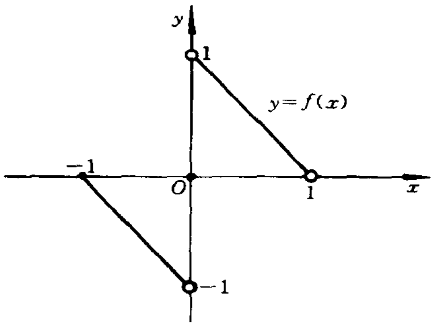


图 1-3

例 6 确定函数 $y=\dfrac{\lg(1+x)}{x}$ 的定义域.

解 该函数的定义域 D 为满足不等式组

$$\begin{cases}1+x>0,\\ x\neq 0\end{cases}$$

的 x 的集合，即 $D=(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

四、函数的表示法

表示函数，要把它的定义域和对应关系表述清楚．一般可根据函数自身的特点选择适当的表示方法．常用的方法有：表格法、图示法和公式法（解析法）．

（1）以表格形式表示函数的方法称为函数的表格表示法，如例 2 和数学用表中的函数都是用表格法表示的．

（2）以图形表示函数的方法称为函数的图示法，如例 3 的函数就是用图示法表示的．

（3）用数学式表示函数的方法称为函数的公式表示法，也称为解析法．如例 4、例 5、例 6 的函数都是用公式法表示的．在高等数学中讨论的函数几乎都用公式法表示．

例 4、例 5、例 6 的函数虽然都是用公式法表示的，但它们又代表了不同的情形．例 6 中的函数，与定义域中任意一个 x 相对应的 y 都用同一个解析式表示，而例 4、例 5 中的函数，与函数的定义域中不同部分的 x，相对应的 y 的解析式不相同．这种对定义域的不同部分，对应关系用不同的式子表示的函数，称为分段函数．例 4、例 5 的函数都是分段函数，不过例 4 中的分段函数可以等价变形为 $y=\sqrt{x^2}$，即对应关系可以化成一个式子．

必须注意：分段函数是用几个式子表示一个（不是几个）函数．在科技、工程中经常用到分段函数，如在等温过程中，气体压强 P 与体积 V 间的函数关系是

$$P=\begin{cases}\dfrac{k}{V}, & V\geqslant V_0,\\[2ex] \dfrac{\gamma}{V-\beta}-\dfrac{\alpha}{V^2}, & V<V_0.\end{cases}\qquad (V_0,k,\alpha,\beta,\gamma \text{ 都是常数})$$

公式法表示函数，除了以上直接用自变量的式子表示以外，还有以下形式．

若变量 x,y 之间的函数关系是由一个含 x,y 的方程 $F(x,y)=0$ 给出的，则称 y 是 x 的隐函数．相应地，把直接由自变量的式子表示的函数称为显函数．如 $2x-y+3=0$，$\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{y}+x-y=0$（e 是一个大于 1 的常数）等确定的函数都是隐函数．而 $y=x+1$，$y=\sin x$ 等都是显函数．由方程 $2x-y+3=0$ 可以解得 $y=2x+3$，即由方程 $2x-y+3=0$ 确定的隐函数可化为显函数，这个过程称为隐函数的显化，但不是每个隐函数都可以显化，如方程 $\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{y}+x-y=0$ 确定的隐函数是无法显化的，因此隐函数是表达函数的一种必不可少的形式．

若变量 x,y 之间的函数关系是通过参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (t\in T)$$

给出的，这样的函数称为由参数方程确定的函数，简称参数式函数，t 称为参数.

如物体作斜抛运动时，运动的曲线(如图 1－4)表示的函数就可写作参数式函数：

$$\begin{cases} x=v_0 t\cos\alpha, \\ y=v_0 t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases}$$

其中 α 为初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 与水平方向的夹角，$v_0=|\boldsymbol{v}_0|$.

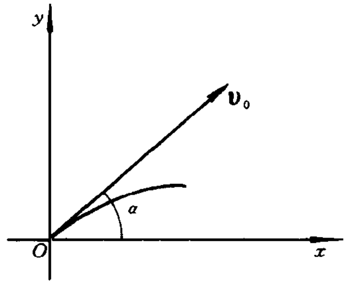


图 1－4

五、函数的几种特性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.

1. 有界性

设数集 $X\subset D$，存在正常数 M，任意 $x\in X$，相应的函数值满足 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果不存在这样的正常数 M，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

如果 $f(x)$ 在 D 上有界. 则称 $f(x)$ 为有界函数. 例如函数 $\sin x$ 是有界函数. 函数 $\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的，但它在 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上是有界的.

2. 单调性

设区间 $I\subset D$，任意 $x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果任意 $x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

在区间 I 上单调增加或单调减少的函数统称为区间 I 上的单调函数. 从几何直观上看，区间 I 上单调增加(减少)的函数，其图象自左向右是上升(下降)的.

3. 奇偶性

设 D 关于原点对称，任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数；任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图象关于原点对称；偶函数的图象关于 y 轴对称.

4. 周期性

设存在一个不为零的常数 T，任意 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且 $f(x+T)=$

$f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期．当周期函数存在最小正周期时，通常所说的周期指的是最小正周期．

周期函数若以 $T(>0)$ 为周期，则在每个长度为 T 的区间 $[nT,(n+1)T]$ $(n\in\mathbf{Z})$ 上函数的图象是相同的．

例 7　讨论函数

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

的特性．

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$．

(1) 任意 $x\in\mathbf{R}$，$|f(x)|=\left|\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|\leqslant\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$；

(2) 任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}=-f(x)$；

(3) 任意 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$、$x_1<x_2$，则

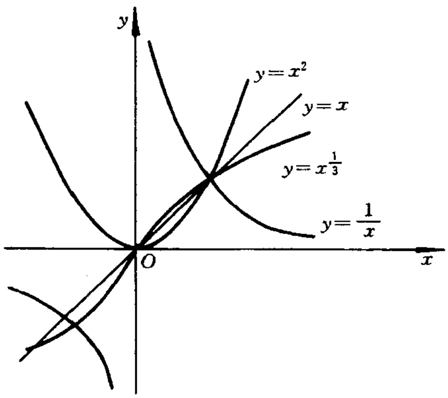
$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{e^{x_2}+e^{-x_2}}-\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{e^{x_1}+e^{-x_1}}=\frac{2(e^{x_2-x_1}-e^{x_1-x_2})}{(e^{x_2}+e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})}>0,$$

因此函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是有界的、单调增加的奇函数，$f(x)$ 不具有周期性．

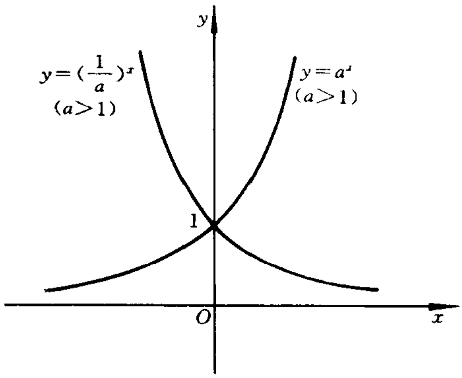
六、初等函数

1．基本初等函数及其图象

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等五类函数统称为基本初等函数，它们的图象如图 1－5 所示．



(a) 幂函数 $y=x^a$



(b) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$