

弹性结构与液体的耦联振动理论

居荣初 曾心传 编著

地震出版社

弹性结构与液体的耦联振动理论

居荣初 曾心传 编著

地震出版

1983

内 容 提 要

本书是有关弹性结构和液体耦联振动分析方面的专门著作。书中详细介绍了液体弹性力学的基本计算原理，然后按结构的不同类型诸如贮液容器、构架式容器、混凝土重力坝、梁式结构、管道、平板结构以及闸墩等，分章介绍了它们在地震、冲击及谐振荷载作用下的计算方法。最后一章扼要介绍了随机振动理论在这一领域内的应用，并结合反应谱理论介绍了某些实用的工程计算方法。

本书适合在土木、水利、化工和机械等工程领域内从事于结构振动分析的科学工作者和工程技术人员以及大专院校有关专业的师生和研究生参考。

弹性结构与液体的耦联振动理论

居荣初 曾心传 编著

*

地震出版社出版

北京复兴路63号

北京建国门外印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

*

787×1092 1/16 20.5印张 510千字

1983年3月第一版 1983年3月第一次印刷

印数：1—5,000册

统一书号：13180·190 定价：3.10元

前 言

随着社会主义建设和科学技术事业的迅速发展,工业、农业和国防等方面,都将提出很多新问题,需要我们去探索 and 解决,并作出科学的回答。其中,固体和液体的耦联振动就是重要问题之一。关于这个问题的研究,从1933年H. M 韦斯特加德(Westergaard)发表他的著名文章《由地震而引起作用于坝体的动水压力》以来,已有四十余年了,但引起人们的极大注意和兴趣的却只是近十余年的事。

随着电子计算机时代的到来,在土建、水利、机械、造船、化工和航空等部门都已出现了各种类型的新颖结构,这些结构物的共同点是薄壁、轻质和高强。因此,对设计、制造和施工等方面都提出了更为严格和合理的要求。过去我们没有考虑或者无法精确考虑的一些问题,现在则已不能回避了。特别是现在有了电子计算机这一先进运算工具,为结构物达到精确、合理的最佳设计提供了可靠的保证。

在工程实践中,结构物和液体耦联振动的实例是极为常见的,例如在地震荷载或其它振动荷载作用下的挡水坝、进水塔、输液管道、桥墩、各种类型的贮液器和冷却塔等等都属于这种类型的问题。而随着海洋石油开采事业的发展,大量修建在海洋里的采油平台、江河里的结构物、化工容器、船舶结构以至航空结构,都存在着上述的实际问题。又如当今正兴起的力学分支——生物力学,在其中某些方面也要涉及到弹性体和流体的耦联力学问题。当然,关于后一问题的研究,已超出了本书的研究范围。

近年来,国外有关固体和流体相互作用方面的文献日渐增多,也说明了人们对于这个问题的研究愈来愈重视。但遗憾的是,目前还没有一本系统介绍这一专门问题的书。因此,我们觉得有必要编写这样一本书以飨读者。

本书主要是向有关工程技术人员较系统地介绍关于弹性体(包括刚体)和液体耦联振动的基本概念和理论,使他们能掌握相应的解题方法,并为他们在参阅其它有关的专门文献时作必要的知识准备。当然本书也希望能对有关的科研、教学人员有所裨益。鉴于上述原因,书中对于一些主要公式的推演都比较详尽、仔细。有关梁式结构、圆柱形管道、贮液容器和闸墩结构等章节的大部分内容,均是作者们历年来的研究成果。

本书在编写过程中,得到中国科学院工程力学研究所江近仁同志,中国建筑科学研究院刘锡芸同志等的大力支持。上海化工学院王良琛同志对本书的出版提出了有益的建议。国家地震局地震研究所陈冬生、梁传珏两位同志分别承担了第二章的一、二及三、四等节内容的编写工作。作者在此谨致谢忱。

本书难免存在缺点或错误,恳切地希望广大读者给予批评指正。

作 者

目 录

第一章 不可压缩流体动力学的基本知识.....	(1)
第一节 欧拉方程及其边值问题的提法.....	(1)
第二节 重力波.....	(4)
第三节 阻尼的考虑.....	(7)
参考文献.....	(10)
第二章 弹性系统振动的基本理论	(11)
第一节 单自由度系统的振动.....	(11)
第二节 多自由度系统的振动.....	(24)
第三节 连续体系的振动.....	(31)
第四节 地震力计算的基础知识.....	(35)
参考文献.....	(39)
第三章 贮液构筑物的抗震分析	(40)
第一节 刚性贮液构筑物的液动压力.....	(40)
第二节 弹性贮液构筑物的动力性质.....	(71)
第三节 反应谱理论的应用.....	(93)
第四节 作用于贮液构筑物上的液动压力的简化计算方法.....	(115)
参考文献.....	(138)
第四章 构架式贮液容器的抗震分析	(140)
第一节 单层构架贮液容器.....	(140)
第二节 多层构架贮液容器.....	(148)
第三节 算例.....	(152)
参考文献.....	(154)
第五章 混凝土坝的动力计算	(155)
第一节 概述.....	(155)
第二节 水平简谐运动时作用于刚性坝面的动水压力.....	(156)
第三节 水平地震时作用于刚性坝面的动水压力.....	(165)
第四节 水平地震时弹性坝体和水库体系的耦联振动.....	(169)
第五节 竖向地面运动时的计算.....	(194)
第六节 坝体具有倾斜上游面时的计算.....	(198)
第七节 若干问题的讨论.....	(211)

参考文献	(220)
第六章 梁式结构物在液体内的耦联振动	(222)
第一节 基本运动方程	(222)
第二节 圆柱形结构物的动水压力	(223)
第三节 受弯曲悬臂梁的横向自由振动	(227)
第四节 地震作用下的反应 (广义坐标的确定)	(230)
第五节 剪切悬臂梁结构的自由振动	(231)
第六节 弯曲梁自振特性计算实例	(235)
第七节 椭圆坐标中的三维波动方程	(237)
第八节 椭圆形结构物的动水压力	(249)
第九节 椭圆形截面梁的自由振动	(246)
第十节 地震作用下的反应计算	(248)
第十一节 若干计算结果	(250)
参考文献	(252)
第七章 输液管道、平板结构和液体的耦联振动	(253)
第一节 管道内可压缩性液体的一维流动	(253)
第二节 管道内具有液体时的弯曲振动	(262)
第三节 平板在流体作用下的振动	(266)
第四节 有限及无限长管道具有加劲圆环及弹簧支承时的振动	(270)
第五节 无限长管道具有中间“固定”支承时的振动	(283)
参考文献	(288)
第八章 泄水闸的抗震分析	(289)
第一节 概述	(289)
第二节 动水压力计算	(289)
第三节 对称性的利用	(291)
第四节 运动方程及其解	(293)
第五节 算例	(297)
第六节 模型试验	(302)
第七节 对闸墩抗震计算的一些看法	(304)
参考文献	(305)
第九章 随机振动理论在贮液建筑物抗震分析中的应用	(306)
第一节 线性动力系统对随机荷载的反应	(306)
第二节 贮液容器在地震荷载作用下的计算	(308)
第三节 构架式贮液容器在平稳随机干扰作用下的计算	(315)
参考文献	(317)

附 录 一 (318)

一、椭圆坐标的推导..... (318)

二、式 (7.3.28) 的推导..... (320)

第一章 不可压缩流体动力学的基本知识

本书除少数几个章节中考虑了流体的可压缩性影响外,绝大部分章节是以不可压缩流体动力学作为考虑各种问题的基础。为了便于读者阅读,这里对它们的一些基本知识作简要的叙述。对于想在这些领域中有更深入了解的读者,可以参阅有关专著^[1-4]。

第一节 欧拉方程及其边值问题的提法

一、欧拉方程

所谓不可压缩流体,是指它的密度在运动过程中保持为常数,即密度既不随时间亦不随空间变化的流体。在研究流体运动时,常常可以忽略液体中内摩擦力(粘滞力)的影响,这种流体称为理想流体。本书主要考虑理想不可压缩流体的运动问题。

如图 1.1.1 所示,首先设想一个能够确定流体所充满的空间内任意点坐标的坐标系。为方便起见,采用直角坐标系,并认为它是静止的。至于向圆柱坐标、球坐标以及任意坐标系的坐标变换和在运动坐标系中的表示等问题,可根据一般向量解析或运动学的各种定理加以解决。

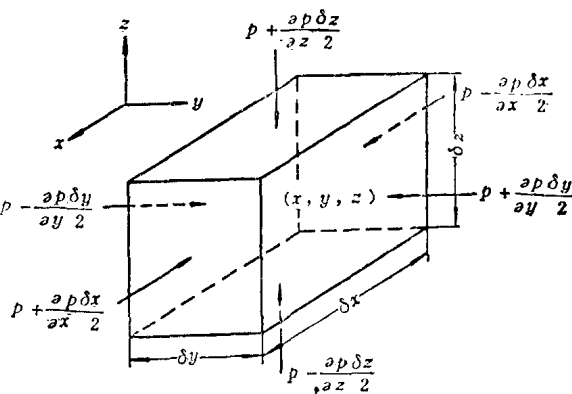


图 1.1.1

下面求流体内的加速度。在流体内考虑一点 (x, y, z) ,在 x, y, z 方向所观察到的流速分别为 u, v, w 。现在我们只考虑 x 方向的流速,而其它方向的流速也可以用同样的方法考虑。

流速 u ,一般作为空间坐标 x, y, z 和时间 t 的函数,并表示如下:

$$u = f(x, y, z, t). \quad (1.1.1)$$

在这里一定要注意: u 是观察到的流速,所以

$$\frac{dx}{dt} = u.$$

x, y, z 是已在空间确定的坐标,时刻 t 是独立变数。

在时刻 t ,我们考虑以流体中一点 (x, y, z) 为中心的一个微小六面体,令 x, y, z 方向的边长分别为 $\delta x, \delta y, \delta z$ 。若 $\delta x, \delta y, \delta z$ 很小,则该六面体内的密度和温度等可以看成是不变的。经过时间 δt 后,即在时刻 $t + \delta t$,该微小六面体移动到点 $(x + u\delta t, y + v\delta t, z + w\delta t)$ 。于是,微小六面体的速度变化量为

$$\begin{aligned} & f(x + u\delta t, y + v\delta t, z + w\delta t) - f(x, y, z, t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} \delta t + \frac{\partial f}{\partial x} u \delta t + \frac{\partial f}{\partial y} v \delta t + \frac{\partial f}{\partial z} w \delta t. \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \delta t,$$

即微小六面体的动量在 δt 时间内的改变量为

$$\delta_M = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \delta t \cdot (\rho \delta x \delta y \delta z). \quad (1.1.2)$$

式(1.1.2)所表示的量, 应等于 δt 时间内作用于微小六面体上力的冲量。式中 ρ 是点 (x, y, z) 处流体的密度。因此有

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (1.1.3)$$

我们把它称为点 (x, y, z) 处流体的加速度。

下面研究作用于微小六面体上的力。如图 1.1.1 所示, 设 X 是质量力在 x 方向的分力, p 是压力, 则在 x 方向的合力为

$$p \delta y \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z + \rho X \delta x \delta y \delta z. \quad (1.1.4)$$

式(1.1.2)与式(1.1.4)乘 δt 而得的冲量相等, 这就是牛顿运动第二定律, 即

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho X. \quad (1.1.5a)$$

同样, 对于 y 和 z 方向有

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y, \quad (1.1.5b)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z, \quad (1.1.5c)$$

式中 Y 和 Z 是质量力在 y 和 z 方向的分力。式(1.1.5)叫做欧拉方程。

欧拉方程的特点, 是假定流体内部与坐标面平行的应力(即摩擦力)是零。因此欧拉方程对于上面所定义的理想流体是完全成立的, 而对于实际流体是不正确的。关于摩擦力, 在本章第三节还要叙述。

在柱坐标系 r, θ, z 中, 欧拉方程具有下列形式:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho X_r, \\ \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) &= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{X_\theta}{r}, \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} + X_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.6)$$

这里, v_r, v_θ, v_z 是流体微团速度向量在 r, θ, z 方向上的分量, X_r, X_θ, X_z 是质量力在相应坐标方向上的分量。

对于二维流动, 欧拉方程为

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho X, \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.7)$$

二、连续性方程

所谓连续性方程，就是将质量守恒定律应用于流体的运动。在图 1.1.2 中，流入（或流出）微小六面体的流体总质量，应等于该微小六面体内流体质量的增加（或减少）。

在 δt 时间内，由表面 $ABCD$ 流入的质量为

$$(\rho u) \delta y \delta z \delta t,$$

由表面 $A'B'C'D'$ 流出的质量为

$$\left\{ \rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \delta x \right\} \delta y \delta z \delta t.$$

同样也能考虑 y 和 z 方向，就是说，在六面体内只留有质量

$$-\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right\} \delta x \delta y \delta z \delta t. \quad (1.1.8)$$

这就只能看成六面体内的密度发生了变化，其质量增量为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \delta t. \quad (1.1.9)$$

因此根据式(1.1.8)和(1.1.9)，能够得出

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right\},$$

或

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.1.10)$$

在式(1.1.10)中，如果流体是不可压缩的，即 $\rho = \text{常数}$ ，那么就有

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.1.11)$$

式(1.1.10)称为流体的连续性方程；式(1.1.11)是不可压缩流体的连续性方程。这些方程不是从式(1.1.5)导出的，也就是说，式(1.1.10)或(1.1.11)是独立的。比如理想流体的运动，是由变量 u, v, w, p 表示的，所以能够用式(1.1.5)和式(1.1.11)这四个方程完全描述。因此，将这些方程联立，并在已知的边界条件下求解，就能求得 u, v, w 和 p 。

在柱坐标系中，连续性方程具有下列形式：

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0. \quad (1.1.12)$$

对于二维流动，连续性方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.1.13)$$

三、势流

如果运动流体的速度向量满足方程

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (1.1.14)$$

则流体的运动称为无旋的。若将流体微团的速度分量借助于速度势 $\varphi(x, y, z, t)$ 来表示：

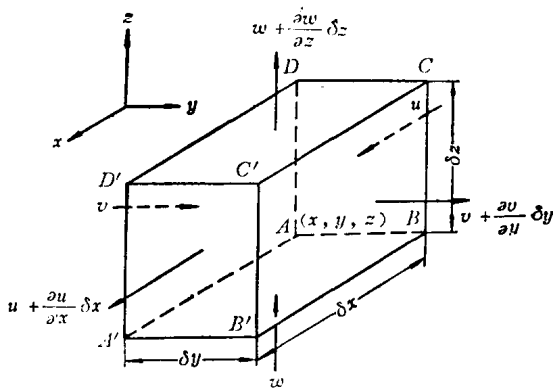


图 1.1.2

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (1.1.15)$$

显然, (1.1.14)式恒满足。将(1.1.15)代入连续性方程(1.1.11), 可见速度势 $\varphi(x, y, z, t)$ 满足拉普拉斯(Laplace)方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.1.16)$$

无旋运动同样称为势流。对于势流, 我们今后假定流体微团运动速度是小到可以忽略掉速度的二次项以上的量。于是, 由欧拉方程 (1.1.5) 即可导得如下决定流体中压力的关系式:

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \Omega, \quad (1.1.17)$$

其中 Ω 是质量力(体力)的势,

$$X = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

如果体力(质量力)仅由重力所产生, 此时

$$\Omega = -\rho g z,$$

则可得到

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (1.1.18)$$

其中 g 为重力加速度。

四、边界条件的提法

对于理想不可压缩流体流动的具体问题, 需要寻求方程 (1.1.11) 满足给定边界条件的解。对于不动墙, 其边界条件为: 流体速度在墙上的法向分量为零; 对于可动墙, 其边界条件为: 在墙的法线方向上, 流体速度与墙的运动速度相等。考虑到由于流体沿着单位向量 $\vec{n}$ 方向的流动速度 v_n 与速度势 φ 间存在着关系式

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

因而, 边界条件可以写为:

对于不动墙

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad (1.1.19)$$

对于可动墙

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_{0n}, \quad (1.1.20)$$

其中 v_{0n} 是墙体运动速度 v_0 在该墙的法线方向 $\vec{n}$ 上的投影。必须指出的是, 速度势 φ 所满足的方程(1.1.11)不显含时间, 因而, 时间只经过边界条件(1.1.20)而包含在解中。求出速度势 φ 之后, 流体中的压力 p 可由式(1.1.18)得到。

第二节 重 力 波

位于定常均匀重力场中的流体的自由表面是一平面。如果在流体自由表面的无论什么区

域中激发一局部扰动，那末，此扰动就将以所谓重力波的形式向所有方向传播。这种波具有如下特点：它们基本上沿着流体表面传播，且由初始扰动所激发的运动将在流体内部随深度的增加非常迅速地消失。

重力波中流体的运动是有势的，所以，在给定情况下，问题归结为满足拉普拉斯方程(1.1.16)及边界条件式(1.1.19)或式(1.1.20)的速度势 $\varphi(x, y, z, t)$ 。

我们把流体的自由平衡表面置于 xy 平面， z 轴垂直向上。以 $f(x, y, t)$ 表示振动流体表面偏离平衡位置的垂直位移，并设 p_0 为振动流体表面的压力。从式(1.1.18)，可以写出

$$p_0 = -\rho g f - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=f}. \quad (1.2.1)$$

用下面表示式来代替 φ ：

$$\varphi' = \varphi + \frac{p_0}{\rho} t.$$

由于速度向量的分量是速度势关于坐标的导数，显然，对速度势增加以与时间有关的项不会影响速度向量的分量之值，故这样作常常是允许的。将上式代入式(1.2.1)，得

$$g f + \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \Big|_{z=f} = 0. \quad (1.2.2)$$

考虑到与波体的尺寸相比较，波面上的位移是很小的，因此，波面上的速度分量 w 可以由公式

$$w = \frac{\partial f}{\partial t}$$

来计算；另一方面，计及 $w = \frac{\partial \varphi'}{\partial z}$ ，我们可以写出关系式

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial z} \Big|_{z=f} = \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.2.3)$$

将式(1.2.2)对 t 求导，得

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} \Big|_{z=f},$$

将它代入式(1.2.3)，即得到在波面上应满足的条件：

$$\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} \Big|_{z=f} = 0. \quad (1.2.4)$$

考虑到波面的位移 f 很小，可以在条件式(1.2.4)中用 $z=0$ 来代替 $z=f$ 。换句话说，问题归结为求解如下方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} \right)_{z=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.5)$$

设流体自由表面无论在 x 轴方向还是在 y 轴方向上均是无限的，且假定重力波波高与流体深度相比是很小的。在此情况下，我们可以把流体深度认为是无限的。如果这些条件均满足，则可不计侧墙的流体底部的边界条件。

现在，考虑在 x 轴方向上传播的重力波，如图 1.2.1 所示。在此情况下，表征流体运动的所有量均可以认为与座标 y 无关。此时，可以把(1.2.5)中第一个方程的解设为

$$\varphi' = Z(z)\cos(kx - \omega t). \quad (1.2.6)$$

其中 ω 是流体中给定点处运动的圆频率, k 称为波数, 它与波长(即运动状态在给定瞬时沿 x 轴变化的周期)之间存在关系式 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ 。将式(1.2.6)代入(1.2.5)中的第一个方程, 得

到

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0,$$

其一般解具有如下形式:

$$Z(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}. \quad (1.2.7)$$

由于流体在 $z < 0$ 的区域中, 随着深度的增加, 流体微团的运动速度和动压力均应趋于零, 即当 $z \rightarrow \infty$ 时应有 $\varphi' \rightarrow 0$, 从而有 $C_2 = 0$ 。

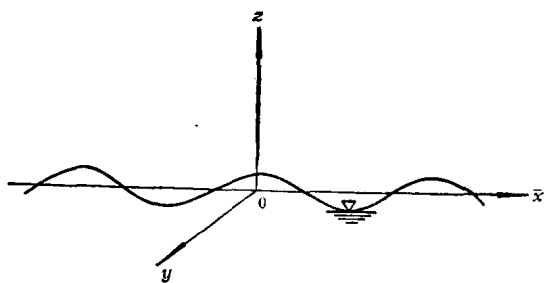


图 1.2.1

这样, 可以将式(1.2.6)写为

$$\varphi' = C_1 e^{kz} \cos(kx - \omega t). \quad (1.2.8)$$

现在, 将式(1.2.8)代入(1.2.5)的第二个方程, 即使之满足波面上的条件, 得到

$$k = \frac{\omega^2}{g},$$

即

$$\omega^2 = kg. \quad (1.2.9)$$

由此可见, 圆频率 ω 和波数 k 并非相互独立的量, 其间乃是互为联系的。

将势式(1.2.8)对坐标变量取导数, 得到流体微团的相应速度分量:

$$\left. \begin{aligned} u &= -C_1 k e^{kz} \sin(kx - \omega t), \\ w &= C_1 k e^{kz} \cos(kx - \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (1.2.10)$$

从上列方程看出, 在空间每一给定点处, 流体微团的速度向量的端点可画出以 $C_1 k e^{kz}$ 为半径的圆, 且其绝对值随 z (流体的深度) 的增加成指数地减小(注意: 在图 1.2.1 的坐标系中, z 是一负值)。此外, 从此方程还可以看出, 重力波传播的相速度为

$$c = \frac{\omega}{k},$$

而其群速度则等于

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

计及式(1.2.9), 我们得到

$$\left. \begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \\ U &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.11)$$

由此可见, 重力波传播的速度正比于其波长的平方根。

最后, 我们来考查流体微团的运动轨迹。为此目的, 我们用 x 和 z 表示随此微团在空间运动之移动座标, 而以 x_0 和 z_0 表示其在某一初始时刻在空间中的位置。计及流体微团的位移很小, 我们可以写出

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial z}{\partial t},$$

从而, 由式(1.2.10)进行积分, 得到

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= C_1 \frac{k}{\omega} e^{kz} \cos(kx - \omega t), \\ z - z_0 &= C_1 \frac{k}{\omega} e^{kz} \sin(kx - \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (1.2.12)$$

从此结果明显看出, 流体微团在空间的运动轨迹是以点 (x_0, z_0) 为圆心的圆周, 其半径等于 $C_1 \frac{k}{\omega} e^{kz}$ 。与速度向量一样, 此半径随 z 的增加而成指数地衰减。

第三节 阻 尼 的 考 虑

上两节, 我们讨论了理想不可压缩流体运动的基本方程以及将在以后遇到的一类重要波——重力波。为了讨论方便起见, 我们忽略掉了由于流体内部的粘滞效应而产生的阻尼力。但是, 众所周知, 在真实流体中, 粘滞性总是存在着的。因而, 流体运动时, 流体微团之间总要因为粘滞作用而产生阻尼力。

计算流体中耗散力的最好途径归结为考虑粘性流体的运动; 但是, 由此而产生的数学和力学上的困难, 使问题的求解变得异常复杂, 除了对某些具体问题可以利用数值方法, 比如有限差分法或有限单元法求解外, 现在还不可能得到对于实际有用的解。因此, 本书凡在不得不考虑流体阻尼力的地方, 均利用由雷利(Rayleigh)提出、尔后由兰姆(Lamb)^[3]所采用的方法, 认为流体微团的运动被正比于相对速度的力所阻扰。

这样, 在考查具有阻尼的不可压缩流体的运动时, 在方程(1.1.5)和(1.1.6)中, 应引入正比于相应速度之力。用 ν 表示流体中的阻尼系数(量纲为1/秒), 此时, 欧拉方程(1.1.5)和(1.1.6)应写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \nu u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \nu v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \nu w + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.5')$$

和

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} + \nu v_r + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X_r, \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{\nu v_\theta}{r} + \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \frac{X_\theta}{r}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \nu v_z + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= X_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.6')$$

而连续性方程仍然具有原来的形式。对于势流, 如果考虑三维流动, 速度势仍然应满足拉普拉斯方程(1.1.16)。

和前面一样, 假设流体微团运动速度相当小, 以至可以忽略掉速度二次以上的项。此时, 以方程(1.1.5')为例, 可以得到决定流体中压力的如下关系式:

$$p = -\rho v \varphi - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \Omega. \quad (1.3.1)$$

如果计及重力的影响, 则可得到

$$p = -\rho g z - \rho v \varphi - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (1.3.2)$$

现在, 考察重力波在具有阻尼的流体中的传播。此时, 仿照前面, 由式(1.3.2)可见, 波面上应满足条件

$$p_0 = -\rho g f - \rho v \varphi \Big|_{z=0} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}. \quad (1.3.3)$$

设

$$\varphi = \varphi' - \frac{p_0}{v \rho}, \quad (1.3.4)$$

将它代入式(1.3.3)中, 得

$$g f + v \varphi' \Big|_{z=0} + \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \Big|_{z=0} = 0.$$

考虑到式(1.2.3), 从上式可以得到条件

$$\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \frac{v}{g} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0. \quad (1.3.5)$$

和前面一样, 若假定重力波在 xz 平面内传播, 并考虑到 $z \rightarrow -\infty$ 时流体的运动速度应趋于零, 则满足式(1.2.5)中第一个方程的速度势可以具有如下形式:

$$\varphi' = C_1 e^{kz + i(kx - \omega t)}. \quad (1.3.6)$$

将式(1.3.6)代入式(1.3.5), 得

$$C_1 \left(k - \frac{iv}{g} \omega - \frac{\omega^2}{g} \right) = 0.$$

由于 C_1 为不恒等于零的常数, 故有

$$k - \frac{iv}{g} \omega - \frac{\omega^2}{g} = 0,$$

或

$$k = \frac{iv}{g} \omega + \frac{\omega^2}{g}, \quad (1.3.7)$$

$$\omega = \frac{1}{2}(-iv \pm \sqrt{4kg - v^2}). \quad (1.3.7')$$

由此可见, 在流体具有阻尼的情形里, 波数 k 与圆频率 ω 之间同样是互有联系的, 并且这时的关系比无阻尼时更为复杂。

将 k 的表示式(1.3.7)代入式(1.3.6)并对座标求导, 然后分离实部和虚部, 得到液体微团相应速度分量:

$$\left. \begin{aligned} u &= -C_1 e^{\left(\frac{\omega^2}{g}z - \frac{\nu\omega}{g}x\right)} \left[\frac{\nu\omega}{g} \cos\left(\frac{\nu\omega}{g}z + \frac{\omega^2}{g}x - \omega t\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega^2}{g} \sin\left(\frac{\nu\omega}{g}z + \frac{\omega^2}{g}x - \omega t\right) \right] \\ w &= C_1 e^{\left(\frac{\omega^2}{g}z - \frac{\nu\omega}{g}x\right)} \left[\frac{\omega^2}{g} \cos\left(\frac{\nu\omega}{g}z + \frac{\omega^2}{g}x - \omega t\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu\omega}{g} \sin\left(\frac{\nu\omega}{g}z + \frac{\omega^2}{g}x - \omega t\right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.8)$$

若令

$$\begin{aligned} \frac{\nu\omega}{g} &= A \cos \theta, \\ \frac{\omega^2}{g} &= A \sin \theta, \end{aligned}$$

则上式可以改写为

$$\left. \begin{aligned} u &= -C_1 A e^{\left(\frac{\omega^2}{g}z - \frac{\nu\omega}{g}x\right)} \cos\left(\frac{\nu\omega}{g}z + \frac{\omega^2}{g}x - \omega t - \theta\right), \\ w &= -C_1 A e^{\left(\frac{\omega^2}{g}z - \frac{\nu\omega}{g}x\right)} \sin\left(\frac{\nu\omega}{g}z + \frac{\omega^2}{g}x - \omega t - \theta\right). \end{aligned} \right\} \quad (1.3.9)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\omega}{g} \sqrt{\nu^2 + \omega^2}, \\ \theta &= \arctg \frac{\omega}{\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.10)$$

由此可见,在具有内阻尼的不可压缩流体中的任意给定点处,和无阻尼流体情形一样,速度向量的端点亦画出一个圆,不过,这时圆的半径为 $C_1 A e^{\left(\frac{\omega^2}{g}z - \frac{\nu\omega}{g}x\right)}$, 因而其量值不但随 z (流体的深度,在图 1.2.1 坐标系中 z 为负值), 同时亦随 x (距扰动源的水平距离) 的增加成指数地衰减。当然,由于流体的粘性系数一般是比较小的,因而在 x 方向上的衰减比在 z 方向上的衰减速度为慢。另一方面,我们从式(1.2.10)得知,对于理想(无阻尼)不可压缩流体,速度向量的绝对值只在 z 方向上发生衰减,而在 x 方向上则无衰减发生。这是无阻尼流体和具有内阻尼的流体之间的一大差异。

我们从式(1.2.10)还可以看出,在理想(无粘性)不可压缩流体自由表面上某一局部区域中激发一扰动时,所产生的重力波基本上沿着流体表面传播;而对于具有内阻尼的流体,从式(1.3.9)知,重力波将向流体内部传播,其传播方向与水平方向成 $(90^\circ - \theta)$ 角度。其次,从式(1.7.9)知,重力波在粘滞流体内传播的相速度等于^[5]

$$c = \frac{g}{\sqrt{\nu^2 + \omega^2}}.$$

再由(1.3.7),得

$$c = \frac{2g}{\sqrt{2\nu^2 + 2\nu} \sqrt{\frac{8\pi g}{\lambda} - \nu^2 + \frac{8\pi g}{\lambda}}}, \quad (1.3.11)$$

亦即传播速度不再简单地正比于波长 λ 的平方根。这是重力波在无阻尼流体和有阻尼流体中

传播的又一差异。

最后, 我们来考虑粘性流体中流体微团的轨迹。为此, 从式(1.3.9) 对时间变量 t 进行积分, 得到

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= C_1 \frac{A}{\omega} e^{\left(\frac{\omega^2}{\epsilon} z - \frac{\nu \omega}{\epsilon} x\right)} \sin\left(\frac{\nu \omega}{g} z + \frac{\omega^2}{g} x - \omega t - \theta\right), \\ z - z_0 &= C_1 \frac{A}{\omega} e^{\left(\frac{\omega^2}{\epsilon} z - \frac{\nu \omega}{\epsilon} x\right)} \cos\left(\frac{\nu \omega}{g} z + \frac{\omega^2}{g} x - \omega t - \theta\right). \end{aligned} \right\} \quad (1.3.12)$$

从这个表示式明显看出, 与无阻尼流体一样, 有阻尼流体微团在空间的运动轨迹仍然是一以点 (x_0, z_0) 为圆心的圆周, 只不过此时其半径变成了 $C_1 \frac{A}{\omega} e^{\left(\frac{\omega^2}{\epsilon} z - \frac{\nu \omega}{\epsilon} x\right)}$, 它随着 z 或 x 的增加成指数地衰减。

当阻尼系数 ν 为零时, 上面各公式均变成了无阻尼流体情况下与之相应的公式。因而, 以上讨论是理想无粘性流体向着粘性流体的一种简单推广。应当指出的是, 由于流体的阻尼系数一般均很小^[6], 从实用观点来说, 将流体阻尼力略去可以使计算大大简化且可以得到足够精确的结果。因此, 在以后各种问题的讨论中, 除非特殊需要, 我们将只对理想(无粘性)的不可压缩流体进行研究。

参 考 文 献

- [1] Н. Е. Кочин, И. А. Кебель, Н. В. Розе, Теоретическая Гидромеханика, ОГИЗ, 1948.
- [2] L. M. Milne-Thomson, Theoretical Hydrodynamics, 3rd ed., Macmillan, New York, 1960.
- [3] H. Lamb, Hydrodynamics, Dover Publ., Inc., New York, 1945.
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics, Pergamon Press, 1963.
- [5] A. C. Eringen, E. S. Suhubi, Elastodynamics, Vol. II, Academic Press, New York, 1975.
- [6] Г. Н. Микишев, Н. Я. Дорожкин, Экспериментальные исследования свободных колебаний жидкост и в сосудах, Изв. АН СССР, ОГН, «Механика и Машиностроение», №4, АН ССР, 1961.