同济大学应用数学系编

高等数学习题集(1996年修订本)

习题选解

上册

骆承钦 邱伯驺 李生文
徐鑑青 许新福 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集(1996年修订本)习题选解. 上册/骆承钦等编.
—北京:高等教育出版社,2000

ISBN 7-04-007894-5

Ⅰ.高… Ⅱ.骆… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第14269号

高等数学习题集(1996年修订本)习题选解　上册
骆承钦　邱伯驺　李生文　徐鑑青　许新福　编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　　话	010－64054588	传　　真	010－64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2000年5月第1版
印　　张	9.75	印　　次	2000年5月第1次印刷
字　　数	240 000	定　　价	10.80元

内容提要

本书选择同济大学应用数学系编《高等数学习题集》(1996 年修订本)中 32%的习题做出解答而成.挑选的标准主要是题目的难度,难度低的 A 类题不入选,而难度高的 C 类题都入选.本书仅供读者参考.读者在自己做了习题以后,再参考本书,对拓宽解题思路、学习解题规范将会是有益的.本书分上、下册出版,上册内容包括:函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与向量代数.

本书可供高等院校工科各专业师生使用,也可供科技工作者阅读.

前　言

同济大学应用数学系编《高等数学习题集》(1996年修订本)出版已近两年,受到了广泛的关注,吸引了众多的读者.我们挑选了该习题集中32%的习题做出解答而成这本习题选解.挑选的标准主要是题目的难度,难度低的**A**类题都不入选,而难度高的**C**类题全部入选.其中多数习题只给出一种解答,少数习题给出多种解答.

学习高等数学,自己动手做一定数量的习题是完全必要的,“自己做习题”是不能用“阅读题解”来替代的,仅仅读懂题解而没有自己做习题,你将会发现自己解题的能力未必提高.这本选解仅供读者参考,读者在自己做了习题以后,参考这本选解,对于拓广解题思路,学习解题规范将会是有益的.

本选解中所给解答不一定是最好的,且难免会有不妥乃至错误之处,欢迎广大读者和同行们批评指正.

编　者

1999年2月于同济大学

目　　录

第一章　函数与极限

一、函　　数

1.1.18. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.证明伯努利(Bernoulli)不等式:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

证　当 $n=2$ 时,$\because a_1,a_2$ 同号,$a_1a_2\geqslant 0$,

$$\therefore\quad (1+a_1)(1+a_2)=1+a_1+a_2+a_1a_2\geqslant 1+a_1+a_2.$$

设 $n=k(k\geqslant 2,k\in\mathrm{N}_+)$时,不等式

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_k$$

成立.当 $n=k+1$ 时,$\because a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 同号,$a_ia_{k+1}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,k)$,

$$\begin{aligned}&\therefore (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1})\\ \geqslant&(1+a_1+a_2+\cdots+a_k)(1+a_{k+1})\\ =&1+a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_ia_{k+1}\\ \geqslant&1+a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}.\end{aligned}$$

由数学归纳法知,对一切 $n\in\mathrm{N}_+$,Bernoulli 不等式成立;易知,其中等号当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少有 $n-1$ 个为零时成立.

1.1.21. 设函数 $f(x)$的定义域为 D,集合 $A\subset D,B\subset D$.证明:

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证 (1) 若 $y\in f(A\cup B)$,即存在 $x\in A\cup B$,使 $f(x)=y\Rightarrow$ $x\in A$ 或 $x\in B$.

使 $f(x)=y\Rightarrow f(x)\in f(A)$或 $f(x)\in f(B)\Rightarrow f(x)\in f(A)\cup f(B)$.

反之,若 $y\in f(A)\cup f(B)$,即

$$
\begin{aligned}
y\in f(A)\text{或 } f(B)&\Rightarrow x\in A \text{ 或} B,\text{使 } f(x)=y\\
&\Rightarrow x\in A\cup B,\text{使 } f(x)=y\\
&\Rightarrow f(x)\in f(A\cup B).
\end{aligned}
$$

(2) 若 $y\in f(A\cap B)$,即存在 $x\in A\cap B$,使 $f(x)=y\Rightarrow$ $x\in A$且$x\in B$,使 $f(x)=y\Rightarrow f(x)\in f(A)$且 $f(x)\in f(B)\Rightarrow$ $f(x)\in f(A)\cap f(B)$.

∴由子集的定义知(2)成立.

注 $f(x)\in f(A)$且 $f(x)\in f(B)\not\Rightarrow x\in A$ 且$x\in B$.

1.1.23. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且对任意实数 x、y,有 $f(x)\neq 0$,$f(xy)=f(x)\cdot f(y)$.求 $f(1996)$.

解 由 $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$,得

$$f(0)=f(1996\cdot 0)=f(1996)\cdot f(0),$$

因 $f(0)\neq 0$,故 $f(1996)=1$.

1.1.25. 设函数 $f(x)$的定义域和值域均为$[0,+\infty)$.令 $f_1(x)=f(x)$,$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$ $(n=1,2,\cdots)$.已知 $f_{n+1}(x)=[f_n(x)]^2(n=1,2,\cdots)$,求 $f(x)$及 $f_n(x)$.

解 按假设,$f_2(x)=f[f(x)]=[f(x)]^2$.令 $y=f(x)$,由 $f(x)$的值域为$[0,+\infty)$,知 $y\geqslant 0$.故

$$f(y)=y^2,y\in[0,+\infty).$$

即 $$f(x)=x^2,x\in[0,+\infty).$$

从而 $$f_2(x)=[f(x)]^2=x^{2^2},f_3(x)=[f_2(x)]^2=x^{2^3},\cdots,$$

$$f_n(x)=[f_{n-1}(x)]^2=x^{2^n}\quad(n\in\mathrm{N}_+).$$

1.1.26. 若函数 $f(x)$ 对于其定义域内的一切 x 恒有 $f(x)=f(2a-x)$，则称函数 $f(x)$ 对称于 $x=a$. 证明：如果函数 $f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b(b>a)$，则 $f(x)$ 必定是周期函数.

证 $\because f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b$,

$\therefore f(x)=f(2a-x), f(x)=f(2b-x)$.

从而
$$f(x)=f(2a-x)=f[2b-(2a-x)]$$
$$=f(x+2(b-a))$$
对定义域内的一切 x 成立. 由周期函数的定义便知，$f(x)$ 是周期函数，其周期 $T=2(b-a)$.

1.1.27. 设 a_k、$b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 均为实数. 证明：

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 .$$

证 $\because$ 对一切 $x\in\mathbb{R}$，有

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k x+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n} a_k^2\cdot x^2+2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\cdot x+\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geqslant 0,$$

$\therefore$ 由二次三项式的判别式知

$$\Delta=\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2-\sum_{k=1}^{n} a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant 0,$$

即
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 .$$

1.1.28. 设 $a_k>0(k=1,2,\cdots,n)$. 证明：

(1) $\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$;

(2) $\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$.

证 (1) 当 $n=2$ 时，$\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{1}{2}(a_1+a_2)$ 显然成立；

当 $n=2^2$ 时，

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}=\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}}\leqslant\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}\right)=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{2^2}.$$

由数学归纳法可知,当 $n=2^k(k\in\mathbb{N}_+)$时,有

$$\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{2^k}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}.$$

当 $n\neq 2^k(k\in\mathbb{N}_+)$时,设 $n\in(2^{k-1},2^k)$,记 $2^k-n=m$,则 $n+m=2^k$,$k,m\in\mathbb{N}_+$.取 $\bar{a}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.于是,有

$$\sqrt[n+m]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n(\bar{a})^m}=\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n(\bar{a})^m}$$

$$\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+m\bar{a}}{n+m}=\bar{a},$$

从而,

$$(a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n+m}}\leqslant\bar{a}^{1-\frac{m}{m+n}}=\bar{a}^{\frac{n}{m+n}},$$

$$(a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\bar{a}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

(2) 对$\frac{1}{a_k}(k=1,2,\cdots,n)$应用(1)中的不等式,得

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{a_n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right),$$

两端取倒数,改变不等号方向,便得

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n}.$$

1.1.29. 设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内有定义,$a>0,b>0$.证明:

(1) 若$\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调减少,则

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b);$$

(2) 若$\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调增加,则

$$f(a+b) \geqslant f(a)+f(b).$$

证 (1) $\because \dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少，$a<a+b$，$b<a+b$，

$$\therefore \frac{f(a)}{a} \geqslant \frac{f(a+b)}{a+b}, \frac{f(b)}{b} \geqslant \frac{f(a+b)}{a+b}.$$

从而

$$f(a) \geqslant \frac{a}{a+b} f(a+b), f(b) \geqslant \frac{b}{a+b} f(a+b),$$

$$f(a)+f(b) \geqslant f(a+b).$$

(2) 同理可证.

1.1.30. 设 $a>0, b>0$，利用上一题结论证明：

(1) 当 $0<p<1$ 时，有 $(a+b)^{p} \leqslant a^{p}+b^{p}$；

(2) 当 $p>1$ 时，有 $(a+b)^{p} \geqslant a^{p}+b^{p}$.

证 (1) 当 $0<p<1$ 时，设 $f(x)=x^{p}$，则 $\dfrac{f(x)}{x}=x^{p-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少. 由上一题结论，得

$$(a+b)^{p} \leqslant a^{p}+b^{p}.$$

(2) 同理可证.

1.1.31. 证明：$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-\infty,-1)$ 及 $(-1,+\infty)$ 内均为单调增加函数. 并由此证明对任意实数 a、b，有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

证 当 $x_{2}>x_{1}>-1$ 或 $-1>x_{2}>x_{1}$ 时，

$$\begin{aligned} f\left(x_{2}\right)-f\left(x_{1}\right) &=\frac{x_{2}}{1+x_{2}}-\frac{x_{1}}{1+x_{1}} \\ &=\frac{x_{2}-x_{1}}{\left(1+x_{1}\right)\left(1+x_{2}\right)}>0, \end{aligned}$$

即 $f(x)$ 为单调增加函数.

$\because f(x)$ 为单调增加函数，$0 \leqslant|a+b| \leqslant|a|+|b|$，

$$\therefore \quad \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|},$$

又
$$\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$
$$\leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$$

故有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

1.1.32. 设函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,且满足

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x},$$

其中 a、b、c 均为常数,$|a|\neq|b|$.证明 $f(x)$为奇函数.

证 $\because$
$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}, \tag{1}$$

以$\frac{1}{x}$代(1)式中的 x,得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx. \tag{2}$$

$(1)\cdot a-(2)\cdot b$,得

$$(a^2-b^2)f(x)=c\left(\frac{a}{x}-bx\right).$$

$\because a^2-b^2\neq 0, \therefore f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)$为奇函数.

二、初 等 函 数

1.2.18. 设函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$f_n(x)=\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n个f}(x),$$

求 $f_n(x)$.

解 $f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$,

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+[f_2(x)]^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

…

由数学归纳法可知:

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}\quad (n\in\mathbf{N}_+).$$

1.2.19. 设函数 $f(x)=\sqrt{x}\quad(0\leqslant x<1)$.

(1) 将函数 $f(x)$延拓到$(-1,1)$,使其成为偶函数,即找一个偶函数 $F(x)(-1<x<1)$,使得当 $x\in[0,1)$时,$F(x)=f(x)$;

(2) 将函数 $f(x)$延拓到$(-\infty,+\infty)$,使其成为周期为 1 的周期函数.

解 (1) 按题意,延拓后的函数 $F(x)$适合

$$F(-x)=F(x),x\in(-1,1).$$

当 $x\in[0,1)$时,$F(x)=f(x)=\sqrt{x}$,

当 $x\in(-1,0)$时,$F(x)=f(-x)=\sqrt{-x}$.

故

$$F(x)=\begin{cases}\sqrt{x},\ 0\leqslant x<1,\\ \sqrt{-x},\ -1<x<0.\end{cases}$$

(2) 按题意,延拓后的函数 $F(x)$适合

$F(x+1)=F(x)\ (x\in\mathbb{R})\Rightarrow F(x)=F(x-n)(n\in\mathbf{N})$.

特别有:

$$F(x)=F(x-[x]),x\in\mathbb{R}.$$

而 $x-[x]\in[0,1)$,故

$$F(x-[x])=f(x-[x])=\sqrt{x-[x]},x\in\mathbb{R}.$$

即 $$F(x)=\sqrt{x-[x]},x\in\mathbb{R}.$$

1.2.22. 设函数 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\arcsin x$. 试分别讨论函数 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$的定义域、奇偶性、周期性.

解 $f[g(x)]=\sin(\arcsin x)$,

$\because \arcsin x$ 的定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x$ 的定义域为$\mathbb{R}$, $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\subset\mathbb{R}$, $\therefore f[g(x)]$的定义域为$[-1,1]$.

又$\because \arcsin x$、$\sin x$ 均为奇函数, $\arcsin x$ 非周期函数,
$\therefore f[g(x)]$是奇函数、非周期函数.

$$g[f(x)]=\arcsin(\sin x),$$

$\because \sin x$ 的定义域为$\mathbb{R}$,值域为$[-1,1]$, $\arcsin x$ 的定义域为$[-1,1]$, $\therefore g[f(x)]$的定义域为$\mathbb{R}$.

又$\because \sin x$ 为奇函数,且为周期函数,周期为 2π,而 $\arcsin x$ 也为奇函数, $\therefore g[f(x)]$是奇函数,且为以 2π 为周期的周期函数.

1.2.25. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调增加,且对一切 x 有$f(x)\leqslant g(x)$. 证明:

$$f[f(x)]\leqslant g[g(x)].$$

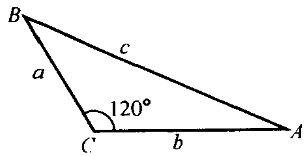
证 $\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调增加,且 $f(x)\leqslant g(x)$, $x\in\mathbb{R}$,

$\therefore$ $$f[f(x)]\leqslant f[g(x)].$$
又由假设, $$f[g(x)]\leqslant g[g(x)],$$
从而 $$f[f(x)]\leqslant g[g(x)].$$

1.2.26. 如图所示,在$\triangle ABC$ 中, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $\angle ACB=120°$. 现将$\triangle ABC$ 分别以 BC、AC、AB 所在的直线为轴旋转一周,设所得的三个旋转体的体积依次为 V_1、V_2、V_3.

(1) 求 $T=\dfrac{V_3}{V_1+V_2}$(用 a、b、c 表示);

(2) 令$\dfrac{a+b}{c}=x$,将 T 表为 x 的函数,写出这函数的定义域,并求这函数的最大值.



1.2.26 图

解 (1) 设△ABC 在边 BC、AC、AB 上的高依次为 h_1、h_2、h_3，则

$$h_1 = b\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}b, h_2 = a\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$h_3 = \frac{ab\sin 60^\circ}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{ab}{c}.$$

又 $$V_1 = \frac{1}{3}\pi h_1^2 \cdot a = \frac{1}{4}\pi b^2 a, V_2 = \frac{1}{3}\pi h_2^2 \cdot b = \frac{1}{4}\pi a^2 b,$$

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi h_3^2 \cdot c = \frac{1}{4}\pi \frac{a^2 b^2}{c}.$$

故 $$T = \frac{V_3}{V_1 + V_2} = \frac{ab}{(a+b)c}.$$

(2) $\because c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^\circ$

$$= a^2 + b^2 + ab = (a+b)^2 - ab, \frac{a+b}{c} = x,$$

$\therefore$ $$ab = (a+b)^2 - c^2 = \left[\left(\frac{a+b}{c}\right)^2 - 1\right]c^2 = (x^2 - 1)c^2,$$

$$T = \frac{ab}{(a+b)c} = \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{1}{\frac{a+b}{c}} = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}.$$

显然， $$x = \frac{a+b}{c} > 1.$$

而 $$c^2 = (a+b)^2 - ab \geqslant (a+b)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4}(a+b)^2,$$

故 $$x^2=\left(\frac{a+b}{c}\right)^2\leqslant\frac{4}{3},x\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

因此函数 $T=x-\frac{1}{x}$的定义域为$\left(1,\frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$.

易知函数 $T(x)$是单调增加函数,故函数的最大值为

$$T_{\max}=T\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

三、数列的极限

1.3.7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,根据定义证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a.$$

证 $\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\therefore\ \forall\varepsilon>0$,$\exists N_1$,当 $n>N_1$ 时,有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

对取定的 N_1,$x_1+\cdots+x_{N_1}-N_1a=M$ 为定值.

$$\because\quad\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_{N_1}-N_1a}{n}=0,$$

$\therefore$对$\frac{\varepsilon}{2}>0$,$\exists N_2$,当 $n>N_2$ 时,有

$$\left|\frac{x_1+\cdots+x_{N_1}-N_1a}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,当 $n>N$ 时,(1)、(2)同时成立,于是

$$\begin{aligned}&\left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-a\right|\\ =&\left|\frac{x_1+\cdots+x_{N_1}-N_1a}{n}+\frac{(x_{N_1+1}-a)+\cdots+(x_n-a)}{n}\right|\\ \leqslant&\frac{|x_1+\cdots+x_{N_1}-N_1a|}{n}+\frac{|x_{N_1+1}-a|+\cdots+|x_n-a|}{n}\end{aligned}$$