2001年

人大版考研

第2轮复习必备

考研数学

重点、难点辅导

北京启航考试学校 组编

李永乐 姚孟臣 鹿立江 编著

中国人民大学出版社

考研数学重点、难点辅导

北京启航考试学校　组编
李永乐　姚孟臣　鹿立江　编著

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学重点、难点辅导/李永乐,姚孟臣,鹿立江编著
北京:中国人民大学出版社,2000

ISBN 7-300-03282-6/G・628
Ⅰ. 考...
Ⅱ. ①李...②姚...③鹿...
Ⅲ. 数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 67089 号

考研数学重点、难点辅导
北京启航考试学校 组编
李永乐 姚孟臣 鹿立江 编著

出版发行:中国人民大学出版社
(北京海淀路 157 号 邮编 100080)
发行部:62514146 门市部:62511369
总编室:62511242 出版部:62511239
E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn
经 销:新华书店
印 刷:中国煤田地质总局制图印刷中心

开本:787×1092 毫米 1/16 印张:16.5
1999 年 11 月第 1 版
2000 年 8 月第 2 版 2000 年 8 月第 1 次印刷
字数:404 000

定价:21.00 元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

出　版　说　明

近年来，我们在进行考研辅导的过程中，发现大部分考生常常遇到下列问题：

(1)复习内容多，范围广，大多数考研辅导书又以内容系统、全面为特征，在复习过程中很难分清重点内容和非重点内容。这是重点如何提炼的问题。

(2)复习过程中遇到难点问题时，往往不容易理解透彻，更不易把握其“难”的程度。这是难点如何突破的问题。

(3)目前的考研试题(尤其是大分值试题)命题跨度增大，不仅涉及的知识点多，而且往往贯穿若干章节甚至学科，而在复习过程中很难进行这方面的训练。这实际上是重点和难点的交织问题。

针对上述问题，北京启航考试学校专门组织考研辅导专家进行了研究，编写了这套考研第二轮复习用书。

这套书之所以称为“第二轮复习用书”，主要有两种考虑：第一，从出版时间来看，这批书的出版时间一般在下半年，相对于上半年出版的考研书，属于第二阶段；第二，从复习阶段来看，这套书是在全面复习之后进行重点复习的，属于复习的第二阶段。

本书有以下特点：

(1)重点、难点突出。本书的内容按专题进行讲解，共选择了近50个专题对整个考研数学进行深入分析和讲解，使考生对重点、难点一目了然，以便进行专项突破。

(2)知识纵横联系强。书中对跨章节甚至跨学科的知识点进行了归纳和总结，并进行纵横讲解。如本书的线性代数部分，就专门讲解有关微积分和线性代数相结合的题类、题型及其解答。

(3)内容少而精，内容更实在。本书基本上不再解析基本概念和方法，而对基本内容进行高度总结，从而使该书达到少而精的目的。

编写第二轮复习用书是一种积极有益的探索，希望能方便广大考生考研的复习。如果你在复习中遇到难点，可来信告之。通讯地址：北京市9633信箱启航学校教材资料部(邮编100086)。

编著者

2000年6月

目　录

第一章　高等数学复习重点、难点

1.1　未定式极限的计算

极限的计算是高等数学的重点与难点之一，称其为重点是由于它是高等数学的基础，而称其为难点是由于它没有统一的方法，所以需要针对不同的题型采用不同的方法. 正因为如此，在极限计算中首先就应该分辨它是属于哪种类型的极限问题.

一、极限计算的主要类型

(1) $\frac{0}{0}$ 与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限；

(2) $0 \cdot \infty$ 与 $\infty - \infty$ 型未定式的极限；

(3) 1^{∞}, 0^0 与 ∞^0 型未定式的极限；

(4) 含待定参数的极限问题；

(5) n 项和数列的极限；

(6) n 项乘积数列的极限；

(7) 递归数列的极限；

(8) 其他类型的极限.

这里的主要类型的极限不包括最简单的极限问题，其他类型的极限是指有些极限问题不属于前面的 8 种类型，也不是最简单的极限问题，如求 $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sin\sqrt{x+a} - \sin\sqrt{x})$ 就是如此.

二、求极限的主要方法

(1) 恒等变换法，如三角变换，分式的分子、分母同乘或同除某一因子等；

(2) 利用极限的运算法则及函数的连续性；

(3) 利用洛必达法则及泰勒公式求未定式极限；

(4) 利用函数极限求数列极限；

(5) 利用极限计算中的变量替换与等价无穷小代换求极限；

(6) 利用两个重要极限求极限；

(7) 利用导数的定义求极限；

(8) 利用极限的存在法则求极限；

(9) 利用定积分求某些和式的极限；

(10) 利用级数的收敛性证明数列的极限为零；

(11) 某些特殊形式的极限，如递归数列的极限计算法等.

这里需要指出的是，题型与方法并不具有确定的关系，一种题型可以有几种计算法，一种

方法也可能用于几种题型，所以要具体问题具体分析，方法要灵活运用.

未定式极限是极限的主要类型之一，而$\frac{0}{0}$与$\frac{\infty}{\infty}$型未定式又是最基本的未定式极限.

三、$\frac{0}{0}$与$\frac{\infty}{\infty}$型未定式的极限

求$\frac{0}{0}$与$\frac{\infty}{\infty}$型未定式的极限最常用的方法是洛必达法则.除此之外，常用的方法还有：

(1) **恒等变换法**；

(2) **利用重要极限** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，以及由它直接导出的一些结果，如

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

(3) **泰勒公式法**.

例 1 求极限 $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

解 分母使用恒等变换法将其有理化，分子使用等价无穷小代换，即得

$$I=\lim_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=2\lim_{x\to0}\frac{2x}{2\sin x+x\cos x}$$

$$=4\lim_{x\to0}\frac{1}{3\cos x-x\sin x}=\frac{4}{3}$$

这里在使用了一次洛必达法则后，也可以分子、分母同除以x，由此即得

$$I=4\lim_{x\to0}\left(\frac{2\sin x}{x}+\cos x\right)^{-1}=\frac{4}{3}$$

例 2 求极限 $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

解法 1 使用洛必达法则，有

$$I=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}\cos x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}\cos^2x+e^{\sin x}\sin x}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}\cos^2x}{\sin x}+\lim_{x\to0}e^{\sin x}=1+\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}\cos^3x+2e^{\sin x}\cos x\sin x}{\cos x}=1$$

解法 2 经变量替换后再使用洛必达法则，有

$$I=\lim_{x\to0}\frac{e^x(1-e^{\sin x-x})}{x-\sin x}\xlongequal{\text{令 } t=x-\sin x}\lim_{t\to0}\frac{1-e^{-t}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e^{-t}}{1}=1$$

本题也可以使用导数的定义，而不用洛必达法则，这是因为

$$\lim_{t\to0}\frac{1-e^{-t}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e^{-t}-e^0}{-t}=(e^t)'\Big|_{t=0}=1$$

解法 3 使用泰勒公式.由于

$$e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{1}{2!}(\sin x)^2+\frac{1}{3!}(\sin x)^3+o(\sin^3x)$$

$$=1+x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$$

$$e^x-e^{\sin x}=\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$$

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{1}{3!}x^3\right) + 0(x^3) = \frac{1}{3!}x^3 + 0(x^3)$$

因此

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = 1$$

例 3 设 $f(x), g(x), \varphi(x)$ 都有二阶连续导数，求

$$I = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^3} \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & \varphi(x) \\ f(x+h) & g(x+h) & \varphi(x+h) \\ f(x+2h) & g(x+2h) & \varphi(x+2h) \end{vmatrix}.$$

解 根据泰勒公式，有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi_1)}{2}h^2, f(x+2h) = f(x) + f'(x)2h + \frac{f''(\xi_2)}{2}(2h)^2$$

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + \frac{g''(\eta_1)}{2}h^2, g(x+2h) = g(x) + g'(x)2h + \frac{g''(\eta_2)}{2}(2h)^2$$

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)h + \frac{\varphi''(\zeta_1)}{2}h^2, \varphi(x+2h) = \varphi(x) + \varphi'(x)2h + \frac{\varphi''(\zeta_2)}{2}(2h)^2$$

其中，$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ 分别位于 x 与 $x+h$，x 与 $x+2h$ 之间. 将其代入原行列式，并利用行列式的性质化简，即得

$$I = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & \varphi(x) \\ f'(x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}h & g'(x) + \frac{g''(\eta_1)}{2}h & \varphi'(x) + \frac{\varphi''(\zeta_1)}{2}h \\ 2f'(x) + 2f''(\xi_2)h & 2g'(x) + 2g''(\eta_2)h & 2\varphi'(x) + 2\varphi''(\zeta_2)h \end{vmatrix}$$

$$= \lim_{h \to 0} \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & \varphi(x) \\ f'(x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}h & g'(x) + \frac{g''(\eta_1)}{2}h & \varphi'(x) + \frac{\varphi''(\zeta_1)}{2}h \\ 2f''(\xi_2) - f''(\xi_1) & 2g''(\eta_2) - g''(\eta_1) & 2\varphi''(\zeta_2) - \varphi''(\zeta_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & \varphi(x) \\ f'(x) & g'(x) & \varphi'(x) \\ f''(x) & g''(x) & \varphi''(x) \end{vmatrix}$$

评注 例 2 给出了此类极限的三种计算方法；例 3 不能完全依靠洛必达法则，因为那样就需要对 h 求三次导数，从而也就要求 $f(x), g(x), \varphi(x)$ 具有三阶连续导数，题目只给出它们有二阶连续导数；例 1 若直接使用洛必达法则是复杂的. 在例 1 的计算中，除了使用恒等变换与等价无穷小代换外，还分出来计算了有确定极限的因式：$\lim\limits_{x \to 0}\left(\sqrt{1 + x\sin x} + \sqrt{\cos x}\right) = 2$，这些都是为了简化计算.

四、$0\cdot\infty$ 与 $\infty-\infty$ 型未定式的极限

例 4 求极限 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

解 改写上述极限，则有

$$I=\lim_{x\to+\infty}[((x+1)\ln(x+2)-(x+1)\ln(x+1))-(x\ln(x+1)-x\ln x)+(\ln(x+2)-\ln(x+1))]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}+\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\right]$$

$$=\ln e-\ln e+\ln 1=0$$

例 5 求极限 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right]$.

解法 1 将根式有理化，则有

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)^2-4(x^2+x)\right]}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2\left[\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right]}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2[x^2+2x-(x+1)^2]}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x+1\right)}=-\frac{1}{4}$$

解法 2 根据泰勒公式，有

$$\sqrt{1+\frac{2}{x}}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{2}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

因此

$$I=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}}-2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{4}+o(1)\right]=-\frac{1}{4}$$

例 6 求下列极限：

(1)$I_1=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$;

(2)$I_2=\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)-\sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right]$.

分析 第(1)小题为 $\infty-\infty$ 型未定式，但是如果将其改写为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$ 就是 $0\cdot\infty$ 型未定式.

解 (1) 令 $t=\frac{1}{x}$，则

$$I_1=\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2}$$

(2) 令 $t=\frac{1}{x}$，则

$$I_2=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\ln(1+3t))-\sin(\ln(1+t))}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left[\cos(\ln(1+3t))\frac{3}{1+3t}-\cos(\ln(1+t))\frac{1}{1+t}\right]=2$$

评注 (1)$0\cdot\infty$ 型与 $\infty-\infty$ 型未定式一般要化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式求其极限，不过例 4 是一个例外，那里化成了几个有确定极限的项的代数和.

(2) 在例 6 中，使用了变量替换 $t=\dfrac{1}{x}$，这样就可以简化计算. 我们知道洛必达法则是计算未定式极限的重要方法，然而在例 5 中未使用它. 其实，对它也可以使用洛必达法则，只是这样做并不简单. 此时也可令 $t=\dfrac{1}{x}$，这样，原极限即变为

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$$

(3) 例 6 第(2) 小题还可以直接利用拉格朗日中值定理求其极限，即

$$I_2=2\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)-\sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\left(1+\frac{3}{x}\right)-\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{3}{x}\right)-f\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}\right)-\left(1+\frac{1}{x}\right)}=2\lim_{x\to\infty}f'(1+\xi)$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\cos(\ln(1+\xi))\frac{1}{1+\xi}=2$$

其中 ξ 位于$\dfrac{1}{x}$与$\dfrac{3}{x}$之间.

五、指数型未定式(1^∞，0^0，∞^0) 的极限

指数型未定式的极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ 均可通过取对数的方法化为 $0\cdot\infty$ 型未定式，即 $\lim g(x)\ln f(x)$，然后再化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式.

例 7 求下列极限：

(1)$I_1=\lim\limits_{x\to0}(\cos x+x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$；　　(2)$I_2=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

(1) **解法 1** 使用洛必达法则，先取对数，就有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x+x\sin x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+\sin x+x\cos x}{2x(\cos x+x\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2(\cos x+x\sin x)}=\frac{1}{2}$$

因此

$$I_1=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x+x\sin x)}=e^{\frac{1}{2}}$$

解法 2 本题属 1^∞ 型未定式，也可以利用重要极限，即

$$I_1=\lim_{x\to0}\left\{[1+(\cos x-1+x\sin x)]^{\frac{1}{\cos x-1+x\sin x}}\right\}^{\frac{\cos x-1+x\sin x}{x^2}}$$

注意到大括号内的部分具有重要极限的形式，所以其极限为 e，这样就需要计算极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}+1=\frac{1}{2}$$

因此 $I_1=e^{\frac{1}{2}}$

(2) **解法 1** 采用洛必达法则，由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cot x-\frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

所以 $I_2=e^{-\frac{1}{3}}$

解法 2 根据泰勒公式

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)=1-\frac{1}{3!}x^2+o(x^2)$$

$$\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\left[1-\frac{1}{3!}x^2+o(x^2)\right]=-\frac{1}{3!}x^2+o(x^2)$$

$$1-\cos x=\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to +0}\frac{-\frac{1}{3!}x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)}=-\frac{1}{3}$$

由此亦可得 $I_2=e^{-\frac{1}{3}}$

解法 3 如第(1)小题，本题也可以利用重要极限，过程从略.

例 8 求极限 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 本题属 ∞^0 型未定式，取对数，并采用洛必达法则，即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0$$

从而 $I=1$

评注 指数型未定式一般都可以采用洛必达法则求其极限，其中 1^∞ 型未定式还可以采用重要极限或泰勒公式(例 7 就是如此，尽管第(1)小题未写出使用泰勒公式法求极限的过程，其实也是可以的，读者可以自行补出)，而 0^0 与 ∞^0 型未定式则不能使用重要极限与泰勒公式.

六、未定式数列的极限

在采用洛必达法则求未定式数列的极限时，首先就要将不连续的自然数 n 换成实数 x.

例 9 设 $a>0,b>0,c>0$，求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$.

解 本题为 1^∞ 型未定式. 注意到

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\xlongequal{\text{令 } t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to+0}\frac{\ln(a^t+b^t+c^t)-\ln 3}{t}$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{a^t\ln a+b^t\ln b+c^t\ln c}{a^t+b^t+c^t}=\frac{1}{3}\ln abc$$

因此

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{x\ln\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{3}\ln abc\right\} = \sqrt[3]{abc}$$

评注　这里所讲述的是如何利用洛必达法则求未定式数列的极限，当然并不排除用其他方法求此类极限. 比如计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n} - \arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$ 就可以采用例 9 的方法，即使用洛必达法则，也可以采用恒等变换的方法. 这是由于 $\arctan\dfrac{a}{n} - \arctan\dfrac{a}{n+1} = \arctan\dfrac{a}{n(n+1)+a^2}$，而且，当 $x\to 0$ 时，$\arctan x \sim x$，所以

$$\text{原极限} = \lim_{n\to\infty} n^2\arctan\frac{a}{n(n+1)+a^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{an^2}{n(n+1)+a^2} = a$$

其实，例 9 也可以使用重要极限及导数定义求得其极限，具体过程从略.

1.2　含待定参数的极限问题

通过极限确定参数主要是根据极限存在的条件，以及极限值的计算.

例 1　试确定常数 a 和 b，使

$$I = \lim_{x\to 0}\left[\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}dt\right]$$

为有限值，并求此极限.

解　由于

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{ax^3 + x + b\int_0^x e^{-t^2}dt}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{3ax^2 + 1 + be^{-x^2}}{5x^4}$$

为使其为有限值，分子必须为无穷小量，因此 $b=-1$. 又由于

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{6ax + 2xe^{-x^2}}{20x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{3a + e^{-x^2}}{10x^2}$$

因此，必须 $a=-\dfrac{1}{3}$ 才能有有限极限，其极限值为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1}{10x^2} = -\dfrac{1}{10}$.

例 2　求 a 与 b，使 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

解　显然，为使左端的极限存在，必须使 $4+2a+b=0$.

而且

$$\text{左端} = \lim_{x\to 2}\frac{2x+a}{2x-1} = \frac{4+a}{3}$$

注意到右端部分尽管也是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，然而却不能使用洛必达法则. 分子、分母同除以 x，则有

$$\text{右端} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{a\sin x}{x} + x\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\dfrac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{a}{2}$$

由此即得 $\dfrac{4+a}{3} = \dfrac{a}{2}$，即 $a=8$. 再由上面得到的关系式，即知 $b=-20$.

例 3 问 m 为何值时,极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^c+7x^4+2)^m-x]$ 存在,其中 c 是大于 4 的自然数,并求此极限.

解 其极限存在则要求 $(x^c+7x^4+2)^m$ 为无穷大量($x\to+\infty$ 时),即属于 $\infty-\infty$ 型未定式.将 x 提出,则为

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^c+7x^4+2)^m-x]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{(x^c+7x^4+2)^m}{x}-1\right]$$

这样,为保证其极限存在,必须

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^c+7x^4+2)^m}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{cm}(1+7x^{4-c}+2x^{-c})^m}{x}=1$$

因此 $cm=1$,即 $m=\frac{1}{c}$.

为求极限值,将得到的结果代回原关系式,并采用洛必达法则,即得

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x^c+7x^4+2)^{\frac{1}{c}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+7x^{4-c}+2x^{-c})^{\frac{1}{c}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{c}(1+7x^{4-c}+2x^{-c})^{\frac{1}{c}-1}[7(4-c)x^{4-c-1}-2cx^{-c-1}]}{-x^{-2}}$$

$$=\frac{1}{c}\lim_{x\to+\infty}[7(c-4)x^{5-c}+2cx^{1-c}]$$

这说明,当 $c=5$ 时,其极限值为 $\frac{7}{5}$;$c>5$ 时,其极限值为 0.

评注 (1) 由极限关系式确定参数的主要依据是:若极限 $\lim f(x)g(x)$ 存在且不为零,则当 $f(x)\to 0$ 时,必有 $g(x)\to\infty$;反之,当 $f(x)\to\infty$ 时,$g(x)\to 0$.

(2) 同样地,如果 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在且不为零,则当 $f(x)\to 0$(或 $g(x)\to 0$)时,必有 $g(x)\to 0$(或 $f(x)\to 0$);并且,当 $f(x)\to\infty$(或 $g(x)\to\infty$)时,$g(x)\to\infty$(或 $f(x)\to\infty$).

(3) 例 3 在确定了 $m=\frac{1}{c}$ 之后,采用了洛必达法则求极限,也可以使用泰勒公式,具体过程从略.

1.3 求 n 项和与 n 项积数列的极限

一、求 n 项和数列的极限

所谓 n 项和数列是指其通项为 n 项的和,而且项数又随 n 无限增加.这里所讲的就是求这种数列的极限,其主要方法有:

(1) 通过恒等变换化为便于计算的形式,比如 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$ 就属于这种形式;

(2) 利用极限的性质:若 $\lim\limits_{n\to\infty}=a$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$,例 1 所使用的就是这一结论;

(3) 夹逼法;

(4) 化为积分和的形式，利用定积分求其极限；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，用数值级数求和的方法求极限.

例 1 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

解 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，根据上面所指出的结论就有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$.

例 2 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，其中 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{i}{n^2}}-1\right)$.

解 这是一个采用夹逼法的例题. 首先，经恒等变换可得

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}+1}$$

注意到 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2}=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}i=\dfrac{n+1}{2n}$. 这样，经放大与缩小后，即得

$$x_n\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{2}=\frac{n+1}{4n}$$

$$x_n\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\cdot\frac{n+1}{2n}$$

两式右端的极限均为$\dfrac{1}{4}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{4}$.

例 3 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}\arctan\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\arctan\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\arctan\dfrac{n}{n}\right]$

分析与解 将$\dfrac{1}{n}$提出，则原和式可改写为 $x_n=\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{n}\arctan\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}\arctan\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n}{n}\arctan\dfrac{n}{n}\right]$，它可以看作是函数 $x\arctan x$ 在区间$[0,1]$上的积分和，所采用的是 n 等分$[0,1]$区间，并且在每个小区间上均取右端的函数值. 因此

$$I=\lim_{n\to\infty}x_n=\int_0^1 x\arctan x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

例 4 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1^x+2^x+\cdots+n^x)^{y+1}}{(1^y+2^y+\cdots+n^y)^{x+1}}$ $(x\neq-1,y\neq-1)$.

分析 本题分子、分母同为 n 项和的形式，即为两个 n 项和之商的极限.

解 分子、分母同除以 $n^{(x+1)(y+1)}$，则有

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^x}{n^x}\right)^{y+1}}{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^y}{n^y}\right)^{x+1}}=\frac{\left(\int_0^1 t^x\mathrm{d}t\right)^{y+1}}{\left(\int_0^1 t^y\mathrm{d}t\right)^{x+1}}=\frac{(y+1)^{x+1}}{(x+1)^{y+1}}$$

评注 这一部分的关键是掌握何时用夹逼法，何时用定积分求极限. 只有和式为某函数在一个区间上的积分和时才能利用定积分求极限，为此就需要有一个因子作为区间长，另一个因式就是该函数在各小区间某点上的取值；夹逼法则要求放大、缩小后极限相同，而且便于计算.

二、求 n 项积数列的极限

若 $x_n=\prod\limits_{k=1}^{n}a_k$，则 $\{x_n\}$ 就是 n 项积数列，计算其极限常用的方法有：

(1) 通过恒等变换化为便于计算的形式；

(2) 取对数使其变为 n 项和数列的形式；

(3) 利用级数理论证明数列极限的存在性.

例 5 设 $x_n=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 利用倍角公式化简. 由于

$$x_n\sin\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^n}\sin x$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$$

上式成立的条件是 $x\neq 0$. 当 $x=0$ 时，$x_n=1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

例 6 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$.

解 注意到 $\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{k-1}{k+1}\cdot\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$，因此

$$I=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{2}{3}$$

例 7 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解 改写通项 $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$，则为 n 项积的形式，采用取对数的方法，即得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)\\&=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{d}x=-1\end{aligned}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{-1}$$

评注 从另一角度看，本题也是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式，然而，由于它是数列，不是通常的函数，所以不能直接使用洛必达法则. 而且由于它含有阶乘 $n!$，所以也无法变成通常的函数. 这就说明数列的未定式极限，并不是总能化为可以使用洛必达法则的形式.

例 8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

分析 与上题相似，本题也是 n 项积数列的极限. 因为取对数后不能使其变为积分和的

形式，所以这里不能利用定积分求其极限．这里将证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ 收敛，从而其通项趋于零．

解　若记 $u_n=\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$，并注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1$$

因此，由比值判别法可知：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ 收敛，其通项也必趋于零，即 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}=0$．

1.4　递归数列极限的计算

例 1　假定 p 为自然数，$k>0$，$x_n=\frac{p-1}{p}x_{n-1}+\frac{k}{px_{n-1}^{p-1}}$，$n=1,2,\cdots$，证明 $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt[p]{k}$．

分析　在求递归数列极限时，通常先证极限的存在性．而证明存在性又经常采用两种方法，即

(1) 直接利用极限定义；

(2) 证明数列单调有界．

其实这两种办法对于其他数列也是适用的．

当 $p=2$ 时，$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{k}{x_{n-1}}\right)$，这是一个常见的递归数列．证明其极限为 $\sqrt{k}$ 可以采用两种办法，一种是单调有界原理，这同下面在一般情形下的解法是类似的；另一种办法就是可以归纳地证明 $\frac{x_n-\sqrt{k}}{x_n+\sqrt{k}}=\left(\frac{x_0-\sqrt{k}}{x_0+\sqrt{k}}\right)^{2^n}$，注意到 $\left|\frac{x_0-\sqrt{k}}{x_0+\sqrt{k}}\right|<1$，因此 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_0-\sqrt{k}}{x_0+\sqrt{k}}\right)^{2^k}=0$，即 $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{k}$．

证　为证明数列 $\{x_n\}$ 单调递减有下界，可注意

$$x_n-x_{n-1}=\frac{k-x_{n-1}^p}{px_{n-1}^{p-1}}$$

这样，只要能证明 $x_{n-1}^p\geqslant k$，即 $x_{n-1}\geqslant\sqrt[p]{k}$，即得所需结论．为此考虑函数

$$f(x)=\frac{p-1}{p}x+\frac{k}{px^{p-1}}$$

由于 $f'(x)=\frac{p-1}{px^p}(x^p-k)$，因而 $x=\sqrt[p]{k}$ 为 $f(x)$ 的驻点，同时，容易看出它就是最小值点，最小值亦为 $\sqrt[p]{k}$，这说明 $x_{n-1}\geqslant\sqrt[p]{k}$ 成立．

$\{x_n\}$ 单调递减有下界，因此其极限存在．设其极限为 λ，则

$$\lambda=\frac{p-1}{p}\lambda+\frac{k}{p\lambda^{p-1}}$$