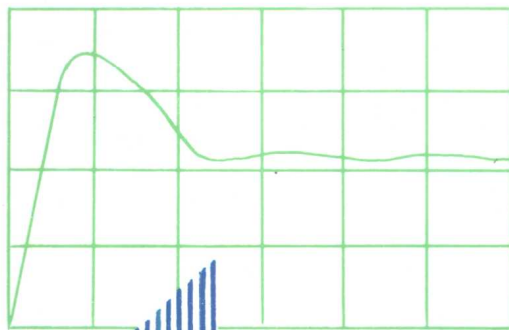


● 研究生教材 ● 研究生教材

高等结构动力学

李东旭 编著



■研究生教材■

李东旭 编著

高等结构动力学

国防科技大学出版社·长沙



C0395551

图书在版编目(CIP)数据

高等结构动力学/李东旭编著—长沙:国防科技大学出版社,1997.10

ISBN 7—81024—464—7

I 高等结构动力学

II 李东旭

III ①结构动力学②教材

IV O342

责任编辑:罗 青

责任校对:文 慧

封面设计:陆荣斌

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4555681 邮政编码:410073

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

787×1092 1/16 印张:18.5 字数:427 千

1997年10月第1版第1次印刷 印数:1—2000册

*

ISBN 7—81024—464—7

O·68 定价:22.0 元

内 容 简 介

结构动力学的研究内容从总体上可分为两大类:一是结构的固有特性问题,二是结构对外激励的响应问题。本书针对这两个问题着重从理论的高度系统地介绍了结构动力学的基本原理和主要研究方法。全书共分三篇,十二章。第一篇:结构振动系统的固有特性。主要介绍结构振动的本质以及有关的基本概念及基本理论,包括一些定理的论述及其推证;物理本质的揭示与分析,并介绍了确定固有特性的数值方法和辨识方法。第二篇:介绍动力响应的概念以及求解方法。第三篇是在前两篇的基础上介绍结构动力学理论的应用以及工程中的一些实际问题。涉及到弦、杆、梁、环、膜、板、壳等的简单振动及组合振动,以及固液耦合振动等问题。

本书是为已具有一定力学基础知识的研究生而编写的研究生教材,理论上具有一定的深度和难度。又由于以工程实际为背景,面向工程应用,因而也可作为有关专业工程技术人员的技术参考书。

前 言

随着科学与现代工程技术的飞速发展,以及人们对物质生活需求的增加,各种各样的结构应运而生,如飞机、火箭、卫星、大跨拱桥、多跨铁路桥、斜拉索桥、高层楼房、各种机床、海上平台、舰船等等。许多结构或者庞大或者复杂,或者既庞大又复杂,无论哪种结构都不可避免地将受到动载的作用。如地震作用于楼房;台风作用于海上钻井平台;发动机推力作用于火箭;对接碰撞作用于空间站;惯性力作用于汽车等等。动载对结构造成的影响完全不同于静载的影响。大量工程实际问题表明,结构的破坏往往源于动载,有时虽然未直接造成灾难性事故,也使得结构不能按设计所要求的性能正常工作。因此为了很好地利用各种结构为人类服务,无论是在设计时,还是在使用时,常常需要准确而迅捷地分析和预测它们的动态性能。

研究结构动态性能的科学就是结构动力学,它的一个非常重要的特点就是其数学概念完全与物理现象相协调,这些物理现象是人们可以体验得到和测量得出的。它是一门完备的学科。

结构动力学问题包含激励(泛称输入)、系统(弹性结构体本身)和响应(泛称输出)三个要素。已知激励和系统的问题归结为响应预测;已知系统和响应求激励是测量问题;已知激励和响应的问题是系统辨识。但不论是哪一类问题,系统所固有的内在品质是事物的内因,激励是外因,结构在外在激励的作用下所发生的响应就是外因通过内因起作用而产生的现象。内因是矛盾的主要方面,在结构的动态性能中起主要作用。因此结构动力学研究的内容在本质上分为两大类:一类是结构的固有特性问题;另一类是强迫响应问题,需要对激励和固有特性进行综合的考虑。

高等结构动力学正是从理论的高度揭示结构动力学的本质。它不是仅介绍结构动力学中的各种物理现象及一般分析方法,而是把重点放在对问题本质的剖析上。它所研究的对象也不是某一具体的结构而是一般的振动系统。高等结构动力学在内容上更侧重于基本原理、基本方法和基本理论的论述和推证,因而它所阐述的论点或结论对研究结构的动态性能具有更普遍的指导意义。

考虑到本书的阅读对象主要是已经具有一定基础的研究生,因此在内容的选择上较侧重于理论的深度。作为教材,为便于自学,在内容的编排上遵从由浅入深、循序渐进的原则。为了适应不同读者的需要,在内容上不受教学时数的限制,可以根据情况选用其中的章节,也可将其中的某些章节安排自学。同时,考虑到该书应对工程实际有一定参考价值,有鉴于此,该书在系统上分为三大部分,包含三篇共十二章。

第一章引言,主要介绍结构动力学基本思想、主要研究内容及研究方法。

第一篇,共六章(第二章~第七章)。针对结构动力学第一类大问题,着重介绍与固有特性有关的基本概念、基本理论与分析方法。包括定理证明、数值分析与参数辨识原理。

第二篇,共三章(第八章~第十章)。针对结构动力学的第二类大问题,着重介绍动力

响应的基本概念及求解动力响应的各种方法,主要是数值积分方法和模态叠加法。介绍了动力响应所包含的基本内容、数学表达式及其物理实质,以及各种方法本身所依据的基本理论。

第三篇,共两章(第十一章~第十二章)。这一篇在前两篇基本理论与基本方法的基础上介绍了结构动力学在实际应用中的一些有代表性的实例,对工程应用有一定参考价值。所涉及到的弦、杆、梁、环、膜、板、壳的振动问题,既是工程中最常见的问题,又是结构动力学中最基本的问题。本篇还介绍了较复杂的固液耦合振动问题。

本书的编写吸收了许多中外科学家的研究成果和工程界大量的实践成果。作者在总结了他人研究成果的基础上,结合自己多年从事结构动力学研究的成果以及实际授课的经验和体会编写了这本《高等结构动力学》。本书的内容曾作为国防科技大学航天技术系有关专业三届研究生课程的讲授内容。

该书主要的读者为研究生,也可作为工程技术人员的参考书。

由于作者水平有限,书中难免疏漏和不妥之处,欢迎各界同仁批评指正。

感谢所有关心、支持、帮助该书出版的人们。

编 者

1997年6月于国防科技大学

目 录

第一章 引 言

- § 1.1 结构动力学研究的基本内容 (1)
- § 1.2 结构动力学研究的基本方法 (2)

第一篇 结构振动系统的固有特性

第二章 多自由度系统的固有特性

- § 2.1 概 述 (6)
- § 2.2 无阻尼系统的自由振动 (6)
- § 2.3 固有频率与固有模态的特性 (11)
- § 2.4 有阻尼系统的自由振动 (15)
- § 2.5 确定基频的近似方法 (21)

第三章 用拉格朗日方程建立振动系统的数学模型

- § 3.1 概 述 (29)
- § 3.2 拉格朗日方程 (29)
- § 3.3 拉格朗日方程在振动系统中的应用 (31)
- § 3.4 约束坐标与拉格朗日乘子 (41)
- § 3.5 受约束结构的振动 (43)

第四章 求解特征问题的数值方法

- § 4.1 概 述 (48)
- § 4.2 分解法 (48)
- § 4.3 迭代法 (56)
- § 4.4 变换法 (63)
- § 4.5 三对角矩阵的特征值与特征向量 (73)

第五章 模态参数辨识的基本原理

- § 5.1 概 述 (79)
- § 5.2 粘性阻尼系统 (79)
- § 5.3 结构阻尼系统 (81)
- § 5.4 单自由度系统频响函数分析 (82)
- § 5.5 多自由度系统频响函数分析 (89)
- § 5.6 模态参数辨识的基本方法 (96)

第六章 部件模态综合法

§ 6.1 概 述	(110)
§ 6.2 基本概念	(110)
§ 6.3 无阻尼自由振动系统的综合	(113)
§ 6.4 自由部件模态	(118)
§ 6.5 残余柔度及残余部件模态	(123)

第七章 结构振动系统固有特性理论

§ 7.1 概 述	(132)
§ 7.2 特征值的变分式	(132)
§ 7.3 强迫振动	(137)
§ 7.4 Collatz 包含定理	(141)
§ 7.5 改进的 Collatz 定理及包含定理之间的关系	(142)
§ 7.6 实对称矩阵的非正特征值数	(148)
§ 7.7 基于动刚度的特征值计数法	(149)
§ 7.8 基于凝聚动刚度的特征值计数法	(150)
§ 7.9 约束定理证明	(154)

第二篇

结构振动系统的强迫响应

第八章 多自由度系统的强迫振动及其解法

§ 8.1 概 述	(156)
§ 8.2 求解强迫振动的直接积分法	(156)
§ 8.3 方程的解耦与模态响应	(163)

第九章 瞬态振动

§ 9.1 概 述	(167)
§ 9.2 脉冲激励与脉冲响应	(167)
§ 9.3 任意激励及其响应	(169)
§ 9.4 响应谱	(173)

第十章 模态叠加法

§ 10.1 概 述	(178)
§ 10.2 模态位移法	(178)
§ 10.3 模态加速度法	(183)
§ 10.4 含有刚体模态的模态叠加法	(189)

第三篇

结构动力学应用

第十一章 基本结构的动力学分析

§ 11.1	概 述	(198)
§ 11.2	弦的振动	(198)
§ 11.3	杆的纵向振动	(201)
§ 11.4	杆的扭转振动	(204)
§ 11.5	轴系的扭转振动	(206)
§ 11.6	梁横向振动的一般情况	(210)
§ 11.7	梁横向振动的特殊情况	(217)
§ 11.8	圆环的振动	(227)
§ 11.9	薄膜的振动	(230)
§ 11.10	板的横向振动	(232)
§ 11.11	壳的振动	(257)
第十二章 固液耦合振动		
§ 12.1	概 述	(269)
§ 12.2	液体贮箱的固有特性	(269)
§ 12.3	盛液贮箱固液耦合下的纵向振动	(271)
§ 12.4	考虑固液耦合时箭体的纵向振动	(276)
§ 12.5	箭体横向振动与液体晃动问题	(281)
主要参考文献		(287)

第一章 引言

§ 1.1 结构动力学研究的基本内容

1. 结构动力学的任务

当一个结构或结构物受到随时间变化的动载荷与仅受到不随时间变化的静载荷时所表现的力学现象是不同的。一个幅值为 p_0 的静载荷作用于结构时,可能远不致于使它产生破坏,但同样幅值的动载荷作用于同样的结构就完全有可能使结构破坏,即使不造成结构的破坏,由于动载所引起的结构的振动也会影响结构的正常工作。比如 1958 年发射的美国第一颗人造地球卫星 Explorer I。卫星入轨后,由于悬在星体外面的四根鞭状天线的弹性振动,造成系统的内能耗散,最后导致卫星姿态失稳而翻滚。又如 1982 年日本发射的技术实验卫星由于挠性太阳帆板的微小振动干扰了姿态控制系统,使卫星无法正常工作。当然,振动也有它有利的一面,如采煤钻、打夯机等的工作原理就是直接利用了振动的特点。凡此种种,无一不说明结构的动力特性与静力特性是完全不一样的。然而要使结构不受动载荷的作用是难以保证的。因此对于任一结构,无论是在设计还是在使用时,常常需要准确而迅速地分析或预测它们的动力特性。

研究结构在动载荷作用下所表现出来的动态特性就是结构动力学的基本任务。结构的动力特性中最基本的两个特性就是自由振动和强迫响应。前者取决于初始条件,反映的是结构本身的固有特性,后者将取决于外部对结构的输入。

高等结构动力学的任务不仅要研究结构在动载作用下表现出的各种各样的物理现象,研究结构动力学所包含的方方面面的问题,而且要揭示现象背后的物理实质和内部规律。它将从结构动力学的一般性问题出发,从理论上研究结构动力特性的本质问题。

2. 结构动力学的三个要素

结构动力学的三个要素是输入(激励)、系统(结构本身)和输出(响应)。

(1) 输入是动态的,即随时间变化的;变化规律可以是周期的、瞬态的和随机的。输入的形式是多样的,可以是力、位移、能量等。输入可以是单点输入,也可以是多点输入。

(2) 系统可以是线性的,也可以是非线性的。对于线性系统,叠加原理成立,系统自由振动的频率及模态是系统所固有的,其特性不随时间改变。而非线性系统没有相对应的固有特性。本书只讨论线性系统。系统可分为保守系统和非保守系统。有阻尼的系统,有能量的耗散,是非保守系统。在振动控制理论中,修改结构动态品质的一个行之有效的重要方法就是增加阻尼耗散系统的振动能量。

(3) 输出即结构系统对输入的响应。从时间的概念出发可以分为周期振动、瞬态振动

和随机振动等。从空间的概念出发可以分为纵向振动、弯曲振动、扭转振动及组合振动等。输出也可以是单输出或多输出。不论什么样的结构,也不论什么样的输入,响应都将以一定的形式表现出来。

在振动问题中,内容与形式是统一的。系统(结构)是引起振动的内因,结构的固有特性是结构动态品质的决定因素,输入是外因,外因通过内因而起作用,最后以输出的形式表现出来。

3. 结构动力学的研究范畴

在上述的三个要素中,知道其中的任意两个求第三个的问题都是结构动力学研究的范畴。

- (1) 响应预测。已知输入和系统求输出。
- (2) 系统辨识。已知输入和输出,确定系统的特征参数。
- (3) 测量问题。已知系统和输出求输入。

第一个问题又称为正问题,后两个问题称为逆问题,在本书中只涉及第一和第二个问题。研究的基本内容分为两个大类:固有特性和响应问题。

§ 1.2 结构动力学研究的基本方法

1. 研究步骤

在结构动力学分析中常用的研究步骤如图 1.2.1 所示。从大的方面主要分为设计、分析、试验和再设计。本书所涉及的主要是分析部分。这一部分的关键简言之:一是建立方程,二是求解方程。

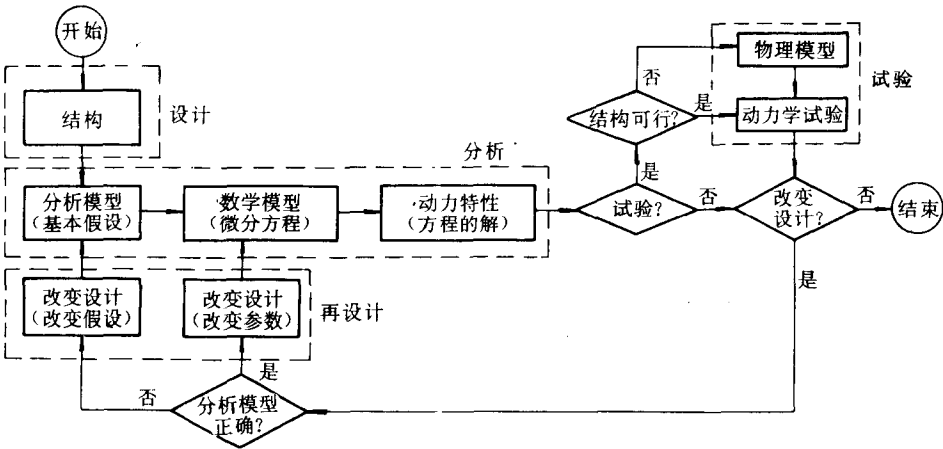


图 1.2.1 结构动力学研究框图

2. 建模

(1) 建模工作

首先引入一些假设将实际的结构进行简化,得到便于分析的形式;然后设计一系列的参数,如几何尺寸、材料特性、约束边界等;最后建立一组数学方程来描述所要分析的模型。建立的方程或数学模型应能反映结构动力学问题中的主要方面,并能较全面、客观地反映物理现象的本质,这是分析的关键之一。建模就是建立结构动力学基本运动方程。

(2) 建模方法

建模的方法总体上目前有两种,一是实验的方法,二是分析的方法。本书主要涉及分析的方法,主要依据是力学基本原理和变分原理。

根据问题分析的需要可采用相应的微分原理(当取微元体作研究对象时),也可采用相应的积分原理(当取整个系统为研究对象时)。力学微分原理主要是牛顿定律和达朗贝尔原理;力学积分原理主要是能量守恒定律和动量守恒定律。微分变分原理主要是虚功原理;积分变分原理主要是哈密顿原理。此外,有限元的基本概念、弹塑性基本理论以及其它力学基本原理,也将在本书中直接引用来帮助建立数学模型。

(3) 常用分析模型

针对连续系统的分布参数模型如式(1.2.1)所示。这种模型是用偏微分方程来描述的。例如弦的振动方程:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.2.1)$$

任何一个实际结构总是一个连续系统,如果模型正确那么用偏微分方程能够精确地描述动力学问题,如果能求得其偏微分方程的解析解,也就得到了问题的精确解。虽如此,实际中人们却往往采用所谓的集中参数模型。这是因为一方面建立偏微分方程是从局部着眼,对于较繁杂的问题难以建模,另一方面方程的求解比较困难,再者对于实际工程问题所关心的并不是问题的全部,而是起关键作用的方面。集中参数模型是用常微分方程来描述的。最常用的是有限元模型:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (1.2.2)$$

其中, M 、 C 、 K 为矩阵, $x(t)$ 、 $f(t)$ 为向量,式(1.2.2)为线性常微分方程组。

求解 $f(t) = 0$ 时的齐次方程,得到方程的通解将反映系统的自由振动特性,求解它所对应的特征方程得到系统特征解将反映结构的固有特性。

求解 $f \neq 0$ 时的非齐次方程,得到方程的特解将反映输入载荷的特点。

3. 分析与求解

(1) 理论分析

理论分析包括求解微分方程的解析解,以及对解中所隐含的物理实质进行分析,得出一般性原理,又根据这些一般性原理去指导一个新问题的分析,而得到新的结论。

通过分析由齐次微分方程所描述的自由振动,可以得到结构固有特性,即固有频率和固有模态的若干重要性质。这些性质反过来又可指导结构的设计。通过分析由非齐次微

分方程所描述的强迫振动,可以得到结构在受到各类载荷时所表现的物理现象,对于防灾减灾,或利用振动造福人类有很好的指导作用。

(2) 数值分析

数值分析主要是弥补理论分析的不足。因为并不是所有问题都能找到解析解,一方面对于实际问题的建模就带有许多假设前提,即模型本身就很难是精确的,另一方面由于数学上的困难使方程难于求解。目前已发展了许多数值求解的方法,无论是求解结构的固有特性问题,还是结构的响应问题都是行之有效的。因此,在结构动力学分析中应用较多的是数值分析方法。数值分析方法不仅能给出一定精度的数值解,同时,通过这些解同样能分析得到结构动力特性中的种种规律。

(3) 综合技术

除了上述方法外,还发展了利用部件的动力特性去综合一个大型复杂结构的动力特性的方法,依此来解决大型复杂结构在试验和求解中的困难。这种方法即所谓动态子结构法或部件模态综合法。另外一种综合技术是模态叠加法,是求解线性系统响应的一种方法,综合是在模态空间中完成的。

科学的发展是无止境的,随着科学技术的发展,结构动力学所研究的范畴必将拓宽,更多行之有效的分析方法和解决方法也会不断产生。但学习结构动力学最首要的是掌握它的基本原理,这些是在长期实践的基础上总结出来,并被实践所证明,又将对实践产生重要影响的基本理论。由于结构受静载作用和受动载作用所产生的现象是完全不同的,其分析方法也有本质区别。因此,在学习结构动力学时,一定要把握关键,抓住特点,透过现象看本质,全面、系统、深刻地掌握结构动力学知识。

第一篇

结构振动系统 的固有特性

第二章 多自由度系统的固有特性

§ 2.1 概 述

一个实际的工程结构往往用一个多自由度系统来描述,多自由度系统的动力特性要比一个单自由度系统的动力特性更丰富、更复杂。多自由度系统是用常微分方程来描述的集中参数系统,研究其动力特性即是研究齐次常微分方程解的形式、内容及物理意义。内因是变化的根据,外因是变化的条件,外因通过内因而起作用。结构的动力特性就是结构系统本身所固有的特性,是结构振动的内因。本章的主要任务就是揭示结构振动的内部原因以及各个物理量的物理实质,使人们能从本质上认识结构振动这一物理现象。

本章首先从无阻尼自由振动系统入手,介绍多自由度系统的有关概念,特别是固有模态与固有频率的四条重要性质,在此基础上研究有阻尼系统的自由振动,并相应地介绍有关基本概念。最后,介绍瑞利原理和邓克列公式,给出了多自由度系统的近似解,另外指出了用多自由度的集中参数模型描述一个实际的结构时,分析结果的近似性和可信性。

另外,这一章不讨论数学建模问题,即认为所讨论的齐次微分方程已经通过某种方法建立。本章中所获得的结论对所有的线性系统具有普遍适用的意义。

§ 2.2 无阻尼系统的自由振动

1. 运动微分方程

对于一个具有 N 个自由度的自由振动无阻尼系统,其运动微分方程用矩阵形式表示为:

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = 0 \quad (2.2.1)$$

其中: $M(\in R^{N \times N})$ 是质量矩阵, $K(\in R^{N \times N})$ 是刚度矩阵, $u = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$ 是 N 维的广义位移矢量。

2. 质量矩阵的物理意义

因系统的动能:

$$T = \frac{1}{2} \dot{u}^T M \dot{u} > 0 \quad (2.2.2)$$

且有:

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial u_i \partial u_j} = m_{ji} \quad (2.2.3)$$

由此可见:

- ①质量矩阵反映了系统的动能;
- ②质量矩阵是正定的;
- ③质量矩阵是对称的。

另外,存在纯静态位移 u_∞ 的情况,使:

$$T = \dot{u}_\infty^T M \dot{u}_\infty = 0 \quad (2.2.4)$$

例如在用有限元法建模时,采用非一致质量矩阵就会出现某些自由度上无质量的情况,这时就不能保证质量矩阵的正定性,在这样的自由度上,式(2.2.4)成立。亦即存在质量矩阵不正定的特殊情况。

3. 刚度矩阵的物理意义

由于系统的弹性势能为:

$$U = \frac{1}{2} u^T K u \geq 0 \quad (2.2.5)$$

且:

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} = k_{ji} \quad (2.2.6)$$

由此可见:

- ①刚度矩阵反映了系统的势能;
- ②刚度矩阵是半正定的(对应于刚体位移,系统弹性势能为零);
- ③刚度矩阵是对称矩阵。

另外,可以证明刚度矩阵的逆是柔度矩阵,而且刚度矩阵反映了功的互等原理。

柔度影响系数 a_{ij} 定义为由于在第 j 个自由度上加一个相应的广义单位力而在第 i 个自由度上引起的广义位移。对一个具有 3 个自由度的系统,如果作用在位置 1, 2 及 3 的力为 f_1, f_2, f_3 , 则应用迭加原理,以柔度影响系数来表示位移:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + a_{13}f_3 \\ u_2 &= a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + a_{23}f_3 \\ u_3 &= a_{31}f_1 + a_{32}f_2 + a_{33}f_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.7)$$

用矩阵表示:

$$u = af \quad (2.2.8)$$

式中:

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

即是柔度矩阵。

如果以 a^{-1} 左乘式(2.3.8), 则:

$$a^{-1}u = f = Ku \quad (2.2.10)$$

因此:

$$K = a^{-1} \quad (2.2.11)$$

即为柔度矩阵的逆。

展开式(2.2.10),有:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.2.12)$$

那么刚度矩阵中各元素的意义解释为:

假如 $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0$, 为了得到这种位移, 需要在位置 1、2、3 处分别施以 k_{11}, k_{21}, k_{31} 的力。同样地为了保持位移形状, $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0$, 在这三处所需要的力分别是 k_{12}, k_{22}, k_{32} 。因此, 确定刚度矩阵任一列元素(比如第 j 列元素)的一般规则是, 使第 j 个自由度上的广义位移等于 1, 其它自由度位移为零, 量度出每个自由度上所需要的力便是该列元素的值。

考虑 f_i 和 f_j 所做的功, 加载顺序为先 i 后 j , 然后反之, 其结果应该是功与加载顺序无关(这里考虑的是线性系统), 那么

f_i 做的功: $f_i^2 a_{ii}/2$

f_j 做的功: $f_j^2 a_{jj}/2$

f_j 在 i 处引起的位移: $a_{ij} f_j$

f_i 在位移 $a_{ij} f_j$ 上做功: $a_{ij} f_j f_i$

总功:

$$W_1 = \frac{1}{2} f_i^2 a_{ii} + \frac{1}{2} f_j^2 a_{jj} + a_{ij} f_i f_j \quad (2.2.13)$$

交换加载顺序:

$$W_2 = \frac{1}{2} f_i^2 a_{ii} + \frac{1}{2} f_j^2 a_{jj} + a_{ji} f_i f_j \quad (2.2.14)$$

因为:

$$W_1 = W_2 \quad (2.2.15)$$

所以有:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (2.2.16)$$

因此刚度矩阵(或柔度矩阵)的对称性反映了系统的功的互等性。

4. 特征方程

对于一个多自由度系统, 认为各个自由度上的运动都是互不相同的, 但每个自由度上的运动都是在其各自的平衡位置附近作简谐振动, 因此运动微分方程式(2.2.1)的解的形式为:

$$u(t) = U \cos(\omega t - \alpha) \quad (2.2.17)$$

将式(2.2.17)代入式(2.2.1)得:

$$(K - \omega^2 M)U = 0 \quad (2.2.18)$$

式(2.2.18)即是所谓的代数特征值问题。